

贵州民族大学学术文库  
贵州民族大学学术著作出版基金资助

# 复合材料的多尺度分析

王自强 著

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

## 内容简介

本书针对复合材料及其结构的热传导问题、热-力耦合和力-电耦合问题给出了多尺度计算方法及其理论分析。本书共分为八章，第一章给出了复合材料的多尺度分析方法；第二章介绍了小周期参数的椭圆形方程的均匀化理论；第三章介绍了两种多尺度算法；第四、五章给出了小周期复合材料热传导问题的二阶双尺度展开式及其收敛性分析；第六至八章分别研究了复合材料板的弯曲、热-力耦合和力-电耦合问题的二阶多尺计算方法。

读者需具备微分方程、有限元方法和程序设计方面的初步知识即可学习本书。

本书可供统计学、信息与计算科学、数学与应用数学专业的本科生，应用数学、计算数学、运筹学与控制论和统计学专业的研究生，理工科相关专业的研究生，对微分方程数值解感兴趣的教师及科技工作者阅读。

---

### 图书在版编目 (C I P) 数据

复合材料的多尺度分析 / 王自强著. — 成都: 西南交通大学出版社, 2015.1

(贵州民族大学学术文库)

ISBN 978-7-5643-3479-6

I. ①复… II. ①王… III. ①复合材料—尺度分析  
IV. ①TB33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 224333 号

---

贵州民族大学学术文库

### 复合材料的多尺度分析

王自强 著

\*

责任编辑 黄淑文

封面设计 墨创文化

西南交通大学出版社出版发行

四川省成都市金牛区交大路 146 号 邮政编码: 610031

发行部电话: 028-87600564

<http://www.xnjdcbs.com>

成都蓉军广告印务有限责任公司印刷

\*

成品尺寸: 170 mm×230 mm 印张: 10

字数: 178 千字

2015 年 1 月第 1 版 2015 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5643-3479-6

定价: 39.00 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话：028-87600562

# 贵州民族大学学术文库编委会

主任委员	高万能	王凤友		
副主任委员	唐建荣	刘黔生	刘雷	杨昌儒
	吴晓萍(常务)	范允龙		
委员	肖远平	周相卿	王林	吴有富
	杨正万	张艾清	石开忠	夏五四
	汪文学	肖唐金	颜春龙	王建山
	童红	贺华中	任达森	王建平
	龚锐	岑燕坤	田铁	索洪敏
	白明政	龙耀宏	张鹏程	张平
	何兴发	吕映红	王道铭	杜国景
	管兵	莫子刚		
办公室主任	吴有富(兼)			
办公室成员	柳远超	张琪亚		



# 序 言

科学和工程中的许多问题都涉及多种尺度. 对于多尺度问题, 由于其巨大的计算量使得传统的数值方法难以直接求解, 因此人们希望找到既能节省计算时间又可以保持计算精度的多尺度计算方法, 以求解多尺度问题. 目前为止, 已经有一些经典的多尺度计算方法, 如多重网格方法、均匀化方法、小波数值均匀化方法、多尺度有限元法、非均匀化多尺度方法等, 这些方法在很多科学和工程领域中的应用已取得了一定的成功.

很多自然科学和工程的问题都具有多尺度的特征: 例如材料的微损伤有大小不同的尺度, 多孔介质的孔径大小存在着不同的尺度等; 然而, 在实际应用中却常常忽略多尺度特征而采用经验模型. 这些模型在应用中取得很大的成功, 但经验模型也存在本身的局限性, 主要体现在: (1) 由于模型的误差很大, 导致很多问题求解的精度不高; (2) 完全忽略细观结构的影响, 不能完全反应问题本身的自然特征; (3) 缺乏可靠的理论基础.

因此, 对于很多问题, 人们希望建立能反映自然属性, 精度更高且具有理论基础的多尺度模型. 在建立多尺度模型的同时, 首先必需考虑问题自身的特征. 按照问题的特征可以把多尺度问题分为以下几类:

第一类: 这类多尺度问题包含了孤立的瑕点或奇异点, 比如裂痕、断层、突变以及接触线. 对于这类问题, 只需要在孤立的瑕点或奇异点附近建立细观尺度的模型, 其它区域满足某个宏观模型即可. 这样, 细观尺度的模型只需在很小的计算区域里求解.

第二类: 这类多尺度问题存在相关的宏观模型, 但宏观模型不清晰, 不能直接用于求解. 典型的一个例子是均匀化问题, 这时系数为  $a^\varepsilon(x) = a(x, x/\varepsilon)$ , 其中  $\varepsilon$  表示细观尺度, 虽然与宏观变量  $x$  相关的宏观模型确实存在, 但宏观模型不明确.

第三类: 这类多尺度问题的细观结构具有强烈的不规则性, 难以找到相关的宏观模型.

随着多尺度模型的发展，还会出现更多类型的多尺度问题，对各类多尺度问题的求解引起了人们广泛的关注，也推动了多尺度计算方法的发展。很多科学和工程问题都存在多尺度问题，多尺度模拟是一个典型的跨学科问题，它涉及数学、化学、物理、工程、计算机科学、环境科学、统计学、金融数学等学科，越来越受到科学家的重视。很多科学和工程问题都存在多尺度问题。对于多尺度问题，传统的数值方法需要在细尺度上求解，即要对求解区域进行非常精细的剖分。精细剖分产生的节点过多，往往需要很大的计算量而导致计算时间过长。若只在粗尺度上求解，则会忽略细尺度的信息。因此，人们一直致力于寻求既可以节省计算时间又可以保持计算精度的新数值方法来求解多尺度问题，从而推动了多尺度计算方法的发展。

随着多尺度问题在工程中的应用越来越广泛，基于多尺度问题求解的复杂性，国内外学者提出了一些多尺度计算方法，这些数值方法主要可分为传统的多尺度计算方法和近年来发展的多尺度计算方法。传统的多尺度计算方法包括多重网格法、自适应方法等。其中多重网格方法通过粗网格校正和误差光滑技术，在减小工作量的同时保证了细尺度上解的计算精度。然而，传统的多尺度计算方法需要在细观尺度上求解原问题，使得在解决很多实际问题时仍需要巨大的计算量，甚至难以求解。因此，人们希望找到更有效的数值方法来求解多尺度问题。

近年来发展的多尺度计算方法包括多尺度有限体积法（Multi-scale Finite Volume Method）、多尺度有限元法（Multi-scale Finite Element Methods）、均匀化方法（Homogenization Method）、非均匀化多尺度方法（Heterogeneous Multi scale Method）等。

多尺度有限体积法是由 Jny 等提出的，多尺度有限元方法是由 Bauska、Hou 等提出的。这两类方法在宏观尺度上进行网格剖分，然后通过在每个单元里求解细观尺度的方程（构造线性或者振荡的边界条件）来获得基函数。从而把细观尺度的信息反应到有限元法或有限体积法的基函数里，使宏观尺度的解包含了细观尺度的信息。但多尺度有限元方法和多尺度有限体积法在构造基函数时需要较大的计算量。

均匀化方法是一种多尺度分析的方法。该方法通过对单胞问题的求解，把细观尺度的信息映射到宏观尺度上，从而推导出宏观尺度上的均匀化等式，即可在宏观尺度上求解原问题。均匀化方法在很多科学和工程应用中取得了



巨大成功。崔俊芝院士在均匀化理论的基础上，提出了可计算的双尺度渐近分析模式，并给出了相应的有限元算法及其误差分析。该算法可以很好地处理周期复合材料的热传导问题、弹性力学问题、热力耦合问题等。该算法的优点是只需在宏观区域上求解均匀化问题的均匀化解，在参考单胞上求解局部单胞函数组，利用渐近展开式把均匀化解和局部单胞函数族组装成为求解周期复合材料的多尺度算法。

本书为复合材料热传导行为分析和复合材料板的热-力耦合、力-电耦合弯曲行为分析提供一套理论上可靠的高性能数学方法，为复合材料及其板、壳结构设计，性能优化提供技术支持和理论依据。

**曹俊英**

2014年4月



# 前 言

近年来，随着复合材料的广泛应用，复合材料及其结构的热-力耦合、力-电耦合响应机理、多尺度模型及其算法研究已经成为力学、数学、物理学与材料科学多学科交叉的前沿研究领域，成为高科技与国防重大装备研发中迫切需要解决的基础科学问题。虽然对于这类问题的研究已有一定进展，众多学者已经对复合材料及其结构的力、热性能分析的计算方法进行了研究，并取得了重要成果，但是多限于复合材料块体结构的静态热-力耦合问题。

复合材料因其具有优良性能而被广泛应用于众多高科技领域，且大多被制备成板、壳形态的薄壁结构。本书将围绕复合材料及其板结构的热传导问题、热-力耦合和力-电耦合弯曲行为的数学模型和计算方法开展系统、深入研究。主要研究内容包括：复合材料及其板结构的热传导问题、热-力耦合和力-电耦合的宏-细-微观关联的弯曲模型，包括高阶多尺度方法及其收敛阶；高阶多尺度方法的有限元算法；典型复合材料及其板结构的热传导问题、热-力耦合和力-电耦合弯曲行为计算，以验证高阶多尺度模型和算法的有效性。旨在为复合材料及其板、壳结构的设计、性能优化提供技术支持和理论依据。本专著的研究结果和方法将对复合材料结构在恶劣服役环境下的防热、隔热、健康检测的模拟分析，加速复合材料在航空、航天、兵器和舰船中的应用，具有重要的指导意义。

随着复合材料结构应用的深入，复合材料结构的服役环境经历了从单一物理场到多物理场耦合的发展过程。对复合材料结构性能的要求也从简单到复杂，例如航天飞行器的外壳结构为复合材料板、壳结构，它的服役环境是热-力耦合的环境，要求复合材料板、壳结构具有高比强度、高抗冲击能力、低热膨胀系数以及抗热损伤、抗辐射损伤等特点。工作在热-力耦合环境下的复合材料板还有太阳能帆板、大型抛物面天线、高灵敏度射电望远镜的反射面、多层集成电路元件等。目前在复合材料板热-力耦合问题的分析和数值计算方法方面尚缺少精细的分析技术与手段，现有的分析方法与数值算法不是特别理想。因此，迫切需要寻求新的高精度数值计算方法，来研究复合材料板在多物理场耦合环境下的宏-细观行为，为材料优化设计和制备提供理论依据。

预测复合材料结构在一定载荷下的物理和力学行为，在数学上就是求解

偏微分方程初边值问题，此类问题的系数是随机函数或周期振荡函数。复合材料的均匀化方法，就是寻求和原问题对应的均匀化的偏微分方程初边值问题，此问题描述复合材料的宏观行为，称为均匀化问题，其解称为均匀化解，方程的系数称为均匀化系数，这种方法称为数学均匀化方法，它已经成为预测复合材料等效性能的方法之一，目前仍在发展当中。多尺度渐近展开法是一种重要的数学均匀化方法，该多尺度渐近展开法由 V. A. Marchenko 和 E. J. Khrousllyov 于 1964 年首次提出；随后，I. Babuska 和 O. A. Oleinik 等基于均匀化思想做了很大补充，解决了大量的数学理论问题，该方法对具有剧烈振荡系数问题的研究起了很大的促进作用；A. Bensoussan 和 J. L. Lions 介绍了具有小周期结构椭圆问题的一阶多尺度渐近展开；Weinan E 院士、张平文教授和明平兵研究员等对复合流体进行了多尺度分析和建模，提出了非均匀的多尺度分析方法（HMM）；T. Y. Hou 教授等对具有剧烈振荡系数的椭圆问题给出了多尺度有限元方法，其基本思想是在有限元的基函数构造中考虑了多种尺度效应，从数值计算和理论分析等角度提供了一个很好的方法，并将该方法应用到不可压缩流体和黏性流体模拟中；陈志明研究员对电磁学问题、多相流、多向异性孔洞介质等问题给出了相应的多尺度分析方法；崔俊芝院士对具有剧烈振荡周期系数和随机系数的热传导问题、弹性问题、网状及编织结构的复合材料提出了高阶多尺度方法，特别是二阶双尺度方法。目前，多尺度方法已被广泛应用于统计学、力学、化学、生物学等相关领域。

在本书完成之际，我要感谢我的老师、同学、亲友、领导和同事。他们一直以来的支持和帮忙让我克服了种种困难，并不断进步。

首先我要感谢培养和教育我的博士生导师崔俊芝院士。感谢您将我带入更高的科研之门，使我在科研道路上找准方向。

同样的谢意致以我的硕士生导师郑州大学的宋士仓教授，感谢您在学习、生活和工作上对我的关心和鼓励！

感谢贵州民族大学校领导和理学院领导对我的大力支持和关心以及同事们热情鼓励和帮助！同时感谢贵州民族大学学术出版基金和贵州省科技厅自然科学基金（（2013）2144）的资助。

此外，我要感谢我的父母、我的岳父、我的哥嫂、姐姐和亲戚们。

最后，我要对我的妻子曹俊英博士一直以来给予的鼓励和支持表示深切的感谢。同时，我要感谢我的儿子王维麟，你是我努力奋斗的动力，你是我勇往直前的精神支柱！

谨以此书献给我的恩师和父母，以及所有给予我关心和帮助的人！

王自强

E-mail: wangzq@lsec.cc.ac.cn

# 目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 研究背景	1
1.2 预备知识	8
第 2 章 含有高阶振荡参数椭圆型方程的多尺度渐近展开式	15
2.1 数学模型	15
2.2 数学模型	16
2.3 多尺度渐近展开式的收敛性分析	19
第 3 章 数值多尺度算法	22
3.1 基于多尺度渐近分析的有限元算法	22
3.2 多尺度有限元算法	28
第 4 章 小周期复合材料热传导问题的二阶双尺度渐近展开及收敛性分析	41
4.2 收敛性分析	46
4.3 高-低阶的半离散二阶双尺度有限元分析	51
4.4 全离散双尺度有限元格式的误差估计	55
4.5 热传导问题的二阶双尺度算法和数值算例	59
第 5 章 平面复合材料热传导问题的一个新的多尺度渐近展开式	64
5.1 传统的渐近展开式和已知结果	64
5.2 新的渐近展开式和误差分析	66
5.3 高-低阶的半离散二阶双尺度有限元分析	68
5.4 新的二阶双尺度有限元方法的全离散误差分析	73
5.5 热传导问题的二阶双尺度算法和数值算例	77
第 6 章 复合材料板弯曲问题的二阶双尺度方法及其近似性分析	83
6.1 二阶双尺度近似解的构造	83

6.2 均匀化板问题的求解	88
6.3 二阶双尺度近似解的近似性分析	95
6.4 二阶双尺度算法和数值例子	105
第7章 复合材料板静态热力耦合问题的二阶双尺度算法	110
7.1 数学模型	110
7.2 位移场的二阶双尺度近似解的构造和 均匀化板问题的求解	113
7.3 二阶双尺度算法和数值例子	122
第8章 压电复合材料板的二阶双尺度算法	129
8.1 稳态力-电耦合问题的二阶双尺度展开式	129
8.2 压电复合材料板的均匀化力-电耦合问题的求解	133
8.3 二阶双尺度算法和数值例子	136
参考文献	140





## 第3章 数值多尺度算法

### 3.1 基于多尺度渐近分析的有限元算法

复合材料和周期结构的材料系数在局部区域内是间断的且跳跃性很大，加上区域内含有周期性洞穴或裂缝，且周期长度很小。一般而言，直接采用有限元进行求解计算量大得惊人，甚至难以实现。崔俊芝院士在文献<sup>[33]</sup>中针对这种特征，提出了一种可计算的双尺度渐近分析模式。进一步，崔俊芝院士又在文献<sup>[34]</sup>中基于文献<sup>[33]</sup>中的可计算的双尺度渐近分析模式给出了相应的有限元算法及其误差分析。该算法可以很好地处理小周期复合材料的有关的热传导问题、弹性力学问题、热力耦合问题等。该算法的优点是只需在宏观区域上求解均匀化问题的均匀化解，在小周期参考单胞上求解局部单胞函数组，利用渐近展开式把均匀化解和局部单胞函数族组装成为求解小周期复合材料的多尺度算法。

#### 3.1.1 周期复合材料结构的稳态热传导问题

考虑如下稳态热传导问题：

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_j} \right) = f(x), & x \in \Omega, \\ u_\varepsilon(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中  $u_\varepsilon$  表示温度分布， $f$  是热源， $a_{ij}^\varepsilon(x)$  ( $i, j = 1, 2$ ) 为热传导系数，是以  $Y$  为周期的周期函数。  $a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}(y)$ ,  $y = \frac{x}{\varepsilon} \in Y = [-1, 1]^2$ ,  $Y$  为参考单胞。

问题 (3.1) 的多尺度特性源于方程的系数含有小参数

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right). \quad (3.2)$$

假设  $(a_{ij}(\xi))_{2 \times 2} \in M(\alpha, \beta)$ , 即存在常数  $0 < \alpha < \beta$ , 使得:

$$\alpha \sum_{i=1}^2 \eta_i^2 \leq a_{ij}(x) \eta_i \eta_j \leq \beta \sum_{i=1}^2 \eta_i^2, \quad \forall (\eta_i, \eta_j) \neq (0, 0), \quad (3.3)$$

设  $u_\varepsilon(x)$  的二阶多尺度渐近展开式为:

$$u^{(2)}(x) = u(x) + \varepsilon N_k(y) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + \varepsilon^2 N_{kl}(y) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l}, \quad (3.4)$$

其中

(1) 求  $N_k \in H_0^1(Y), k=1, 2$  使得

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( a_{ij} \frac{\partial N_k(y)}{\partial y_j} \right) = -\frac{\partial a_{jk}}{\partial y_j}, \quad (3.5)$$

在  $Y$  中该弱解是存在唯一的.

(2) 均匀化系数

$$a_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( a_{ij}(y) + a_{ip} \frac{\partial N_j(y)}{\partial y_p} \right) dy, \quad (i, j = 1, 2). \quad (3.6)$$

(3) 求解均匀化问题

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^0(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

(4) 求  $N_{kl} \in H_0^1(Y), (k, l = 1, 2)$  使得:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij} \frac{\partial N_{kl}(y)}{\partial y_j} \right) = a_{kl}^0 - a_{kl}(y) - a_{ik} \frac{\partial N_l(y)}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{jk}(y) N_l(y)), \quad (3.8)$$

在  $Y$  中易知该弱解存在且唯一.

类似于经典的均匀化理论, 可以证明:

定理 3.1 设  $\Omega \in R^2$  的光滑凸区域,  $f \in H^2(\Omega)$ ,  $a_{ij}(\xi)$  关于  $Y$  中心轴对称且关于  $i, j, (i \neq j)$  反对称. 渐近展开式如式 (3.4), 如果  $u(x, t) \in H^4(\Omega)$ ,  $N_k, N_{kl} \in H^3(Y), (k, l = 1, 2)$ , 则有以下估计式:

$$\|u_\varepsilon(x) - u^{(2)}(x)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} + C \varepsilon, \quad (3.9)$$

这里  $C$  与  $\varepsilon$  无关.

### 3.1.2 基于二阶双尺度展开式的有限元解

通过 3.1.1 节的描述容易知道, 温度场的有限元近似解可以表示为:

$$u_{h_0}^{2,h} = u_0^{h_0} + \varepsilon N_k^h \frac{\partial u_0^{h_0}}{\partial x_k} + \varepsilon^2 N_{kl}^h \frac{\partial^2 u_0^{h_0}}{\partial x_k \partial x_l}, \quad (3.10)$$

其中  $u_0^{h_0}, N_k^h, N_{kl}^h$  是下面问题的解:

(1) 设  $T_h$  为  $Y$  的拟一致剖分, 半径为  $h, V_h \subset H_0^1(Y)$  是剖分  $T_h$  上的线性协调有限元空间. 那么  $N_k$  的有限元近似为: 求  $N_k^h \in V_h$  满足

$$\left( a_{ij} \frac{\partial N_k^h}{\partial y_j}, \frac{\partial v}{\partial y_i} \right)_Y = \left( a_{ik}, \frac{\partial v}{\partial y_i} \right)_Y, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.11)$$

用  $N_j^h$  代替

$$a_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( a_{ij}(y) + a_{ik} \frac{\partial N_j^h(y)}{\partial y_k} \right) dy, \quad (i, j = 1, 2)$$

中的  $N_j$ , 得到  $a^0$  的一个近似  $a_h^0 = (a_{ij}^{0,h})$ , 其中

$$a_{ij}^{0,h} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( a_{ij} + a_{ik} \frac{\partial N_j^h}{\partial y_k} \right) dy.$$

(2) 求  $N_{kl}$  的有限元近似解为: 求  $N_{kl} \in V_h$  满足:

$$\left( a_{ij}(y) \frac{\partial N_{kl}^h(y)}{\partial y_j}, \frac{\partial v}{\partial y_i} \right)_Y = (a_{kl}^{0,h} + a_{kl}(y) - a_{ik} \frac{\partial N_l^h(y)}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{jk}(y) N_l(y)), v)_Y, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.12)$$

(3) 设  $\Omega$  的一个剖分为  $J_{h_0}, h_0$  为剖分半径, 设  $V_{h_0}$  为  $J_{h_0}$  上的二次协调有限元空间. 对于式 (3.7), 它的有限元解为

$$(a^{0,h} \nabla u_0^{h_0}(x), \nabla v(x)) = (f(x), v(x)), \quad \forall v(x) \in V_{h_0}. \quad (3.13)$$

(4) 计算  $\frac{\partial^2 u_0^{h_0}}{\partial x_i \partial x_j}$ , 设

$$\delta_{x_i} u_0^{h_0}(M) = \frac{1}{\tau(M)} \sum_{K \in S^{h_0}(M)} \left[ \frac{\partial u_0^{h_0}}{\partial x_i} \right]_K, \quad (3.14)$$

其中  $M$  表示有限元节点集合  $S^{h_0}(M)$  中的一个节点,  $S^{h_0}(M)$  表示含有节点  $M$  的有限元的集合和  $\tau(M)$  表示  $S^{h_0}(M)$  中含有的有限元的单元个数. 并且对于  $x \in K$  设

$$\delta_{x_i x_j}^2 u_0^{h_0}(x) = \sum_{M \in S^{h_0}(K)} \delta_{x_i} u_0^{h_0}(M) \frac{\partial \psi_K^M}{\partial x_j}, \quad (3.15)$$

其中  $S^{h_0}(K)$  表示单元  $K$  的节点集合,  $\psi_K^M$  是在单元  $K$  上节点  $M$  处的形状函数. 如果  $x$  和单元的节点  $M$  重合时设

$$\delta_{x_i x_j}^2 u_0^{h_0}(M) = \frac{1}{\tau(M)} \sum_{K \in S^{h_0}(M)} \delta_{x_i x_j}^2 u_0^{h_0}(x)|_K, \quad (3.16)$$

如果  $x \in K_1 \cap K_2$ , 设

$$\delta_{x_i x_j}^2 u_0^{h_0}(x) = \frac{1}{2} (\delta_{x_i x_j}^2 u_0^{h_0}(x)|_{K_1} + \delta_{x_i x_j}^2 u_0^{h_0}(x)|_{K_2}) \quad (3.17)$$

因此, 取

$$\frac{\partial^2 u_0^{h_0}}{\partial x_i \partial x_j} \approx \delta_{x_i x_j}^2 u_0^{h_0}(x). \quad (3.18)$$

### 3.1.3 二阶双尺度有限元算法流程

二阶双尺度计算的算法流程如下:

(1) 定义复合材料, 也即确定单胞的基本结构, 包括基本的组成部分、纤维、基体及其界面的位置等. 最后给出表示材料性质的函数  $a_{ij}^c(x)$ .

(2) 在  $Y$  上求解方程 (3.5) 得到  $N_i(y)$ , 或者利用式 (3.11) 求得其有限元近似解  $N_i^{(h)}(y)$ . 并由式 (3.6) 求得均匀化系数  $a_{ij}^0(x)$ .

(3) 设计复合材料  $\Omega$ , 并施热源和边界条件.

(4) 在  $Y$  上求解方程 (3.8) 获得  $N_{ij}(y)$ , 或者利用有限元求解方程 (3.12) 得到它的近似解  $N_{ij}^{(h)}(y)$ . 事实上, 我们可以利用与第 (2) 步相同的有限元网格及其刚度矩阵.

(5) 利用有限元求解方程 (3.13) 的近似解  $u_0^{h_0}$ . 进一步利用式 (3.18) 求解其各阶导数, 如  $\frac{\partial^2 u_0^{h_0}}{\partial x_i \partial x_j}$ .

(6) 利用公式 (3.4) 计算在  $\Omega$  内的任意一点温度  $u^{(2)}(x)$ .

### 3.1.4 二阶双尺度有限元算法的数值算例

为了验证二阶多尺度算法的有效性, 这一节我们给出一个数值算例. 宏观区域  $\Omega = [0, 1]^2$  和单胞区域  $Y = [0, 1]^2$  见图 3.1.

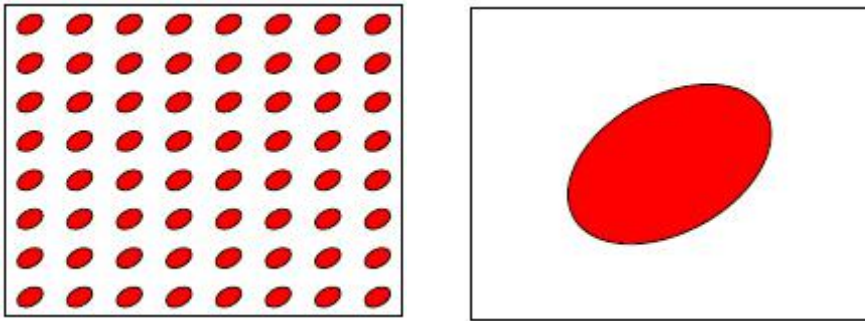
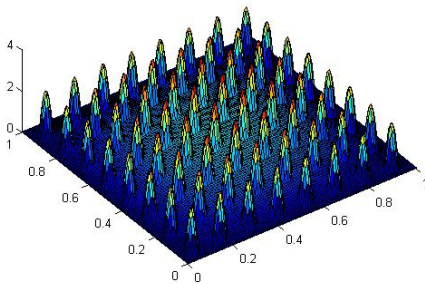


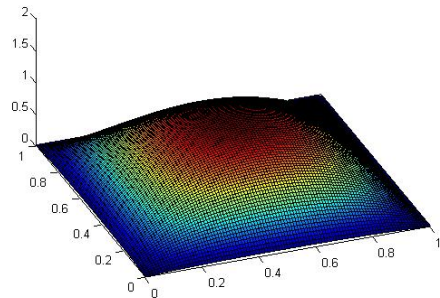
图 3.1 宏观区域  $\Omega$  和单胞区域  $Y$

取  $f = 10$ . 材料系数分别为:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{pmatrix}.$$



(a) 温度  $u_\epsilon(x)$



(b) 均匀化温度  $u(x)$

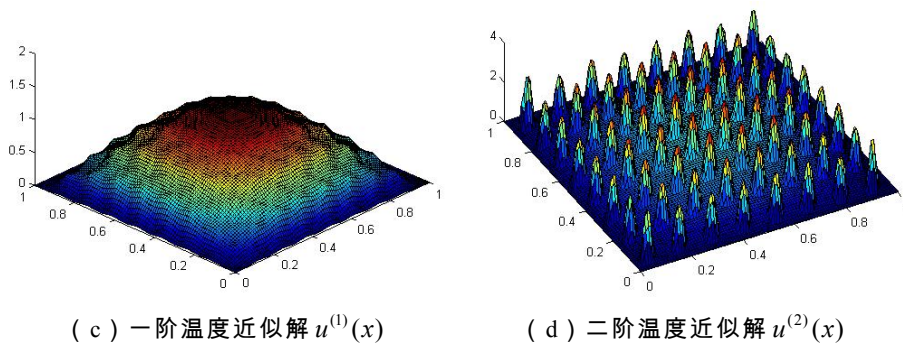


图 3.2 当  $\varepsilon = \frac{1}{8}$  时

通过图 3.2 的分析，我们容易得到：

(1) 具有周期结构的热传导行为不但依赖于宏观条件，如板的几何结构、等效均匀化常数、热源和边界条件，同时还依赖于它的微观单胞的结构。

(2) 一阶双尺度近似解  $u^{(1)}(x)$  对  $u_\varepsilon(x)$  有一定的近似度和仅仅捕捉住部分由微观结构引起的微观热传导行为。

(3) 相比较一阶双尺度解  $u^{(1)}(x)$  来说，温度的二阶双尺度近似解  $u^{(2)}(x)$  是  $u_\varepsilon(x)$  的一个更好的近似和捕捉住微观结构引起的微观热传导行为，从而表明二阶双尺度方法是分析复合材料力学行为的高效数值方法。

为了进一步显示二阶双尺度算法的高效性，我们再计算  $\varepsilon = \frac{1}{16}$  和  $\frac{1}{32}$  时的一阶双尺度近似解  $u^{(1)}(x)$  和二阶双尺度近似解  $u^{(2)}(x)$ ，分别见图 3.3 和图 3.4。

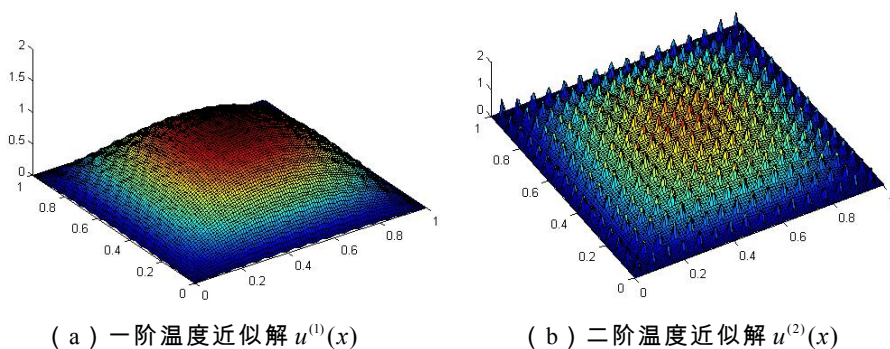


图 3.3 当  $\varepsilon = \frac{1}{16}$  时

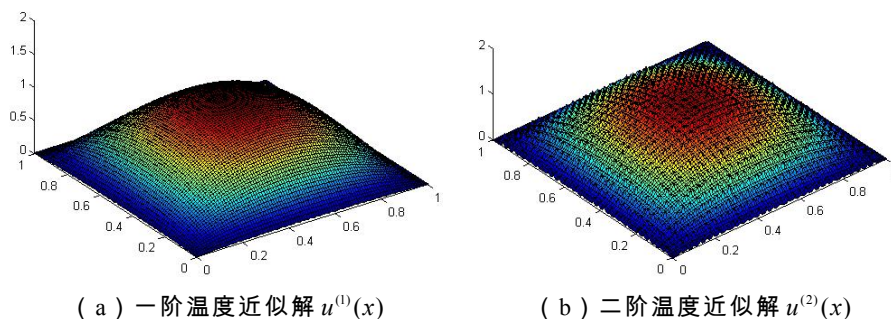


图 3.4 当  $\varepsilon = \frac{1}{32}$  时

通过图 3.3, 图 3.4 的分析, 进一步说明:

(1) 均匀化解  $u(x)$  对  $u_\varepsilon(x)$  有一定的近似度和可以捕捉住材料的宏观热传导行为, 且随着  $\varepsilon$  越来越小, 其逼近的程度也越来越好.

(2) 一阶双尺度近似解  $u^{(1)}(x)$  对  $u_\varepsilon(x)$  有一定的近似度和仅仅捕捉住部分由微观结构引起的微观热传导行为.

(3) 温度的二阶双尺度近似解  $u^{(2)}(x)$  是  $u_\varepsilon(x)$  的一个更好的近似和捕捉住微观结构引起的微观热传导行为.

(4) 我们的算法的计算量与  $\varepsilon$  变化无关, 这进一步显示了二阶双尺度算法的高效性.

## 3.2 多尺度有限元算法

在文献[26]中, Hou 首次提出了一种处理复合材料或多孔介质的椭圆型方程的多尺度有限元方法. 该方法可以高效地捕捉住解的大尺度的行为而不需要重新求解所有的微观尺度信息. 这是通过构造多尺度有限元的基函数满足微分算子的局部性质实现的. 多尺度有限元法的基本思想是, 基于方程的微分算子在单元上求解基函数的局部方程, 获得的基函数自动地将小尺度下解的信息带入到大尺度范围内, 利用有限元格式在粗网格上组装总刚度矩阵, 用较少的计算机资源在宏观尺度范围获得良好的解. 从过往的研究历史看出, 多尺度基函数是方法的关键所在, 如何尽可能地消除单元上尺度之间的不良影响, 基函数越能完整地体现小尺度的完整信息, 最终得到的数值结果就越好.

用  $N$  表示空间方向上的单元剖分数, 用  $M$  表示求基函数子问题的子单元剖分数, 于是在细网格水平总共有  $O((NM)^n)$  ( $n$  是维数) 个单元. 为了保证可靠的精度, 用经典有限元法来解这种问题, 需要的计算机资源是  $O(N^n M^n)$ , 这对具体的实际问题通常是难以承受的. 相比之下, 用多尺度有限元法需要的计算机资源只是  $O(N^n + M^n)$ , 从而大大降低了对计算机的要求和依赖. 多尺度有限元法在粗网格水平  $h = \frac{1}{N}$  下求解方程, 而经典有限元法要在细网格水平  $h = \frac{1}{M}$  下求解方程, 可以证明, 用多尺度有限元法能得到很好的结果, 有时甚至比细网格下的经典有限元法更好. 多尺度有限元方法是处理多尺度问题的一种十分有效的数值方法.

### 3.2.1 经典有限元理论

在有限元方法中, 一维线性元的形函数是分段楔形函数, 如下:

$$\psi^i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i}{h_i}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (3.20)$$

步长  $h_i = x_i - x_{i-1}$ , 显然  $\psi^i(x)$  在节点  $x_i$  处连续, 且在每个单元上  $[x_{i-1}, x_i]$  属于  $C^1(\Omega)$ .

下面给出几个重要的定理.

定理 3.2 (Lax-Milgram 定理) 设  $V$  是 Hilbert 空间, 双线性型  $a(\cdot, \cdot)$  是连续且  $V$  椭圆的, 连续线性泛函  $f \in V'$ , 则存在唯一的  $u \in V$  使得

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V. \quad (3.21)$$

考虑问题: 求  $u \in V$ , 使得式 (3.21) 成立, 其中  $V$  是定义在区域  $\Omega$  上函数的 Banach 空间, 双线性型  $a(\cdot, \cdot)$  及泛函  $f$  满足 Lax-Milgram 定理的条件. 设  $V_h \subset V$  是相应的有限元空间, 则离散的有限元逼近为: 求  $u_h \in V_h$ , 使得

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.22)$$



下面给出关于误差  $\|u - u_h\|_V$  的一个估计定理.

引理 3.1 (Céa 引理) 设双线性型  $a(\cdot, \cdot)$  是连续且  $V$  椭圆的,  $u$  和  $u_h$  分别为原问题 (3.21) 和离散问题 (3.22) 的解, 则存在  $C$ , 使得

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (3.23)$$

考虑二阶问题: 求  $u \in V$ , 使得式 (3.21) 成立, 其中  $H_0^1(\Omega) \subset V_h \subset V$ , 双线性型  $a(\cdot, \cdot)$  和泛函  $f$  满足 Lax-Milgram 定理的条件. 设  $V_h \subset V$  是相应的协调有限元空间, 则离散的有限元逼近为: 求  $u_h \in V_h$ , 使得

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.24)$$

下面给出关于误差  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$  的一个定理.

定理 3.3 (Aubin-Nitsche 定理) 设双线性型  $a(\cdot, \cdot)$  是连续且  $V$  椭圆的,  $u$  和  $u_h$  分别为原问题 (3.21) 和离散问题 (3.24) 的解, 则存在  $C$ , 使得

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \sup_{g \in L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{\|g\|_{0,\Omega}} \inf_{\varphi^h \in V_h} \|\varphi^g - \varphi^h\|_{1,\Omega} \right\}, \quad (3.25)$$

其中, 对任意给定的  $g \in L^2(\Omega)$ , 存在  $\varphi^g \in V$ , 使得

$$a(\varphi^g, v) = (g, v), \quad \forall v \in V. \quad (3.26)$$

即  $\varphi^g$  是以  $g$  为右端项是问题 (3.21) 的共轭问题的解.

### 3.2.1 多尺度有限元算法的构造

我们通过下面的多尺度问题来具体地说明多尺度有限元法, 考虑如下二维问题

$$\begin{cases} L_\varepsilon u_\varepsilon = f, & x \in \Omega, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.27)$$

其中  $L_\varepsilon = -\nabla \cdot (a_\varepsilon \nabla)$  是与参数  $\varepsilon$  相关的微分算子,  $0 < \varepsilon \ll 1$  是一些小参数, 表示问题中最小尺度与最大尺度的比率,  $f$  是  $L^2(\Omega)$  的光滑函数,  $\Omega$  是有界区域且满足椭圆型算子的连续性凸状假设条件. 为简便起见我们用  $u$  代替  $u_\varepsilon$ , 实际上  $u$  是依赖于尺度参数  $\varepsilon$  的. 我们在区域  $\Omega = [0, 1]^2$  上求解问题.  $x$  表示二维空间坐标  $(x_1, x_2)$ ,  $\varepsilon$  表示描述模型问题多尺度性质的一些小参数, 系数

的尺度跨度为  $O(1)$  和  $O(\varepsilon)$ .

问题 (3.27) 的变分形式是选取合适的  $u \in H_0^1(\Omega)$  满足

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.28)$$

为了叙述的简便, 我们假设  $u = 0$  在  $\partial\Omega$  和  $\Omega = [0, 1]^2$ .

问题 (3.27) 的变分问题为: 求  $u \in H_0^1(\Omega)$  满足

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.29)$$

其中

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx, \quad f(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

容易看出, 双线性型  $a(\cdot, \cdot)$  是椭圆型的且连续的, 即

$$C_1 \|v\|_{1, \Omega}^2 \leq a(v, v) \leq C_2 \|v\|_{1, \Omega}^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{1, \Omega} \|v\|_{1, \Omega}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

令  $K^h$  为区域  $\Omega$  的矩形网格剖分, 矩形元  $K$  的尺寸由网格步长  $h$  ( $0 < h \leq 1$ ) 来度量. 在每个单元  $K \in K^h$ , 我们定义节点基函数的集合  $\{\phi_K^i; i=1, \dots, d\}$ , 其中  $d$  表示有限元的单元节点个数.

多尺度有限元法与经典有限元法的最大不同之处在于基函数的构造, 前者利用问题的微分算子  $L_\varepsilon$  来构造基函数, 即基函数  $\phi^i$  满足齐次子问题

$$\begin{cases} L_\varepsilon \phi^i = 0, x \in K \in K^h, \\ \phi^i = \theta^i, x \in \partial K, \end{cases} \quad (3.30)$$

要求  $\phi^i(x_j) = \delta_{ij}$ , 即当  $i = j$  时  $\delta_{ij} = 1$ , 当  $i \neq j$  时  $\delta_{ij} = 0$ . 为保证问题 (3.30) 的适定性, 需要限定  $\phi^i$  在单元  $K$  的边界条件. 我们知道, 不同的边界条件对解的性态有重要影响.

利用有限元法求解上述子问题, 得到的多尺度基函数自动地满足了微分算子在单元的局部性质, 而这个优点是标准有限元基函数不具备的. 多尺度有限元法通过限定变分形式 (3.29) 到  $H_0^1(\Omega)$  一个有限维子空间来做, 用  $V_h$  表示这个有限维子空间. 假定基函数在单元边界上是连续的, 有

$$V_h = \text{span} \{\phi_K^i; i=1, \dots, d, K \in K^h\} \subset H_0^1(\Omega).$$

我们在  $V_h$  中寻找 (3.29) 的近似解, 即寻找  $u_h \in V_h$  满足

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.31)$$

其中  $u_h$  为多尺度有限元解.

根据均匀化理论, 问题 (3.27) 解的展开式为

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon \theta_\varepsilon, \quad (3.32)$$

其中  $u_0(x)$  是与 (3.27) 对应的均匀化问题的解:

$$\begin{cases} L_0 u_0 = f, & x \in \Omega, \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.33)$$

这里  $L_0 = -\nabla \cdot (a_0 \nabla)$  是均匀化算子  $a_0 = (a_{ij}^0)$ , 且

$$a_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( a_{ij} - a_{ik} \frac{\partial \chi_j}{\partial y_k} \right) dy, \quad (3.34)$$

和  $\chi_j$  是下面周期问题的解

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij} \frac{\partial \chi_k(y)}{\partial y_j} \right) = -\frac{\partial a_{jk}}{\partial y_j}, \\ \int_Y \chi_k(y) dy = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

容易证明均匀化算子  $L_0$  是对称正定的, 于是由 Poincare-Friedrich 不等式及 Lax-Milgram 定理可知方程 (3.33) 存在唯一的弱解.

因为

$$u_1(x, y) = -\chi_j(y) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}, \quad (3.36)$$

在  $\partial\Omega$  上不满足边界条件  $u_0(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \neq u_\varepsilon(x)$ , 于是引入校正算子  $\theta_\varepsilon$  满足

$$\begin{cases} L_\varepsilon \theta_\varepsilon = 0, & x \in \Omega, \\ \theta_\varepsilon = u_1(x, y), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.37)$$

由均匀化理论, 容易证明以下定理:

引理 3.2 假设  $u_0(x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  满足式 (3.33),  $u_1$  由式 (3.36) 确

定,  $\theta_\varepsilon$  满足式 (3.37), 则存在不依赖于  $u_0, \varepsilon, \Omega$  的  $C$ , 使得

$$\|u_\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon(u_1 - \theta_\varepsilon)\|_{1,\Omega} \leq C\varepsilon \|u_0(x)\|_{2,\Omega}. \quad (3.38)$$

利用上述引理, 可以得到下面的推论:

推论 3.1 在引理 3.2 的假设下, 则这里存在一个不依赖于  $h, \varepsilon$  的常数  $C$ , 满足

$$\|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\|_{0,\Omega} \leq C\varepsilon \|u_0(x)\|_{2,\Omega}. \quad (3.39)$$

### 3.2.3 多尺度有限元的收敛性分析

#### 1. 当 $h < \varepsilon$ 时的收敛性分析

注意到当  $h \ll \varepsilon$  时, 多尺度有限元和标准的有限元是非常接近的. 它们的关系这里做详细的讨论. 稍作修改标准的有限元就可以实现对多尺度有限元的理论分析. 为了简单起见, 假设  $\phi^i$  在边界上  $\theta^i$  是线性的.

把式 (3.28) 代入式 (3.31), 我们得到正交性

$$a(u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.40)$$

首先, 类似于 Céa 引理可以证明引理 3.3.

引理 3.3 设  $u$  和  $u_h$  分别为原问题 (3.28) 和离散问题 (3.31) 的解, 则

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{\beta}{\alpha} \|u - v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.41)$$

其次, 考察基函数的逼近性. 定义  $u$  在  $K \in K^h$  上的局部插值为

$$(I_K u)(x) = \sum_{j=1}^d u(x_j) \phi^j(x),$$

其中  $x_j$  是单元  $K$  的节点. 整体插值定义为

$$(I_{K^h} u)|_K = I_K u,$$

为了叙述方便, 我们记局部插值和整体插值均为  $u_I$ . 根据式 (3.30) 和基函数的线性性可得

$$-\nabla \cdot (a_0 \nabla u_I) = 0, \quad x \in K \in K^h. \quad (3.42)$$

为了获得误差的估计, 我们会用到正则性估计

$$|u|_{2,\Omega} \leq (C/\varepsilon) \|f\|_{0,\Omega}. \quad (3.43)$$

引理 3.4 设  $u$  是原问题 (3.28) 的解和  $u_I \in V_h$  是插值且它在  $\partial K$  是线性的. 则存在与  $h$  无关的常数  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > 0$ , 使得

$$\|u - u_I\|_{0,\Omega} \leq C_1 \frac{h^2}{\varepsilon} \|f\|_{0,\Omega}, \quad (3.44)$$

$$\|u - u_I\|_{1,\Omega} \leq C_2 \frac{h}{\varepsilon} \|f\|_{0,\Omega}. \quad (3.45)$$

证明 设  $u_I$  是  $u$  标准的线性插值在  $K \in K^h$ . 利用逼近理论, 有

$$\|u - u_I\|_{0,K} \leq C_1 h^2 |u|_{2,K}, \quad (3.46)$$

$$\|u - u_I\|_{1,K} \leq C_2 h |u|_{2,K}. \quad (3.47)$$

下面, 我们在  $K$  上估计  $u_I$  和  $u_I$  的误差. 因为  $u_I|_{\partial K} = u_I|_{\partial K}$ , 所以有  $u_I - u_I \in H_0^1(K)$ , 利用 Poincaré-Friedrichs 不等式有

$$\|u_I - u_I\|_{0,K} \leq C_3 h |u_I - u_I|_{1,K}. \quad (3.48)$$

根据式 (3.28), (3.42), (3.47) 和  $a_{ij}$  的有界性, 可得

$$\begin{aligned} \alpha |u_I - u_I|_{1,K}^2 &\leq \int_K \nabla(u_I - u_I) a \nabla(u_I - u_I) dx \\ &= - \int_K (u_I - u_I) \nabla \cdot a \nabla(u_I - u_I) dx \\ &= - \int_K (u_I - u_I) \nabla \cdot (a \nabla(u_I - u_I) - f) dx \\ &= \int_K \nabla(u_I - u_I) a \nabla(u_I - u_I) dx + \int_K (u_I - u_I) f dx \\ &\leq C |u_I - u_I|_{1,K} |u_I - u_I|_{1,K} + \|u_I - u_I\|_{0,K} \|f\|_{0,K} \\ &\leq C |u_I - u_I|_{1,K} (C_2 h |u|_{2,K} + C_3 h \|f\|_{0,K}). \end{aligned}$$

因此, 我们可得

$$|u_I - u_I|_{1,K} \leq \frac{Ch}{\alpha} (C_2 |u|_{2,K} + C_3 \|f\|_{0,K}). \quad (3.49)$$

进一步, 利用式 (3.48) 可得

$$|u_l - u_I|_{1,K} \leq \frac{Ch^2}{\alpha} (C_2 |u|_{2,K} + C_3 \|f\|_{0,K}). \quad (3.50)$$

因此, 利用三角不等式及 (3.49) 和 (3.50), 我们得

$$|u - u_I|_{1,K} \leq |u - u_l|_{1,K} + |u_l - u_I|_{1,K} \leq h(C_1 |u|_{2,K} + C_2 \|f\|_{0,K}). \quad (3.51)$$

进一步, 可得

$$\begin{aligned} |u - u_I|_{1,\Omega} &= \left( \sum_{K \in K^h} |u - u_I|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq h \left( 2 \sum_{K \in K^h} (C_1^2 |u|_{2,K}^2 + C_2^2 \|f\|_{0,K}^2) \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2} h (C_1^2 |u|_{2,\Omega} + C_2^2 \|f\|_{0,\Omega}) \\ &\leq C(h/\varepsilon) \|f\|_{0,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

不等式 (3.44) 的证明可以从式 (3.45) 和式 (3.48) 得到.

从式 (3.41) 和式 (3.45) 我们可以立即得到推论 3.2.

推论 3.2 设  $u$  和  $u_h$  分别是原问题 (3.28) 的解和问题 (3.31) 的解, 则这里存在一个不依赖于  $h, \varepsilon$  的数  $C$ , 满足

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C(h/\varepsilon) \|f\|_{0,\Omega}. \quad (3.53)$$

利用 (3.41) 和 (3.44) 可以得到定理 3.4.

定理 3.4 设  $u$  和  $u_h$  分别是原问题 (3.28) 的解和问题 (3.31) 的解, 则这里存在一个不依赖于  $h, \varepsilon$  的数  $C$ , 满足

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C(h^2/\varepsilon) \|f\|_{0,\Omega}. \quad (3.54)$$

## 2. 当 $h > \varepsilon$ 时的收敛性分析

### 1) $H^1$ 范数估计

我们将利用下面的经验. 因为  $\phi^i$  满足式 (3.30), 则  $\phi^i$  可以展开为

$$\phi^i = \phi_0^i + \varepsilon \phi_1^i - \varepsilon \theta, \quad (3.55)$$

这里

$$\begin{cases} L_0 \phi_0^i = 0, & \text{在 } K \in K^h \text{ 内,} \\ \phi^i = \mu^i, & \text{在 } \partial K \text{ 上,} \end{cases} \quad (3.56)$$

$$\phi_1^i = -\chi_j \frac{\partial \phi_0^i(x)}{\partial x_j}, \quad (3.57)$$

$$\begin{cases} L_\varepsilon \theta^i = 0, & \text{在 } K \text{ 内,} \\ \theta^i = \phi_1^i, & \text{在 } \partial K \text{ 上.} \end{cases} \quad (3.58)$$

定理 3.5 设  $u$  和  $u_h$  分别是原问题 (3.28) 的解和问题 (3.31) 的解, 则这里存在一个不依赖于  $h, \varepsilon$  的常数  $C$ , 满足

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C_1 h \|f\|_{0,\Omega} + C_2 (\varepsilon/h)^{1/2}. \quad (3.59)$$

证明 式子 (3.59) 的估计可以直接从 Céa 引理和下面的插值引理 3.5 证明.

引理 3.5 设  $u$  是原问题 (3.28) 的解和  $u_I \in V_h$  是利用多尺度基函数  $\phi^i$  的均匀化解  $u_0$  的插值. 则存在与  $h$  无关的常数  $C_1 > 0, C_2 > 0$  使得

$$\|u - u_I\|_{0,\Omega} \leq C_1 h \|f\|_{0,\Omega} + C_2 (\varepsilon/h)^{1/2}. \quad (3.60)$$

为了估计  $\|u - u_I\|_{0,\Omega}$ , 我们利用匹配  $u$  和  $u_I$  展开式并利用引理 3.2 和式子 (3.30), 我们有  $L_\varepsilon u_I = 0$  在  $K$  上. 因此  $u_I$  可以在  $K$  上展开为

$$u_I = u_{I0} + \varepsilon u_{I1} - \varepsilon \theta_{I\varepsilon},$$

这里  $L_0 \phi_0^i = 0$ , 在  $K \in K^h$  上, 且

$$u_{I1} = -\chi_j \frac{\partial u_{I0}}{\partial x_j}, \quad (3.61)$$

显然,  $u_{I0} \in V_h$  是  $u_0$  的一个插值, 且

$$u_{I0} = \sum_{i=1}^d u_0(x_i) \phi_0^i. \quad (3.62)$$

进一步, 因为  $u_I \neq u_{I0}$  在  $\partial K$  上, 则一阶的校正子  $\theta_{I\varepsilon}$  满足

$$\begin{cases} L_\varepsilon \theta_{I\varepsilon} = 0, & \text{在 } K \text{ 内,} \\ \theta_{I\varepsilon} = u_{I1}, & \text{在 } \partial K \text{ 上.} \end{cases} \quad (3.63)$$

引理 3.6 设  $u_I \in V_h$  是利用多尺度基函数  $\phi^i$  的均匀化解  $u_0$  的插值.  $u_{I0}$  和  $u_{I1}$  分别由 (3.62) 和 (3.63) 决定. 记  $\theta_{I\varepsilon}$  为方程 (3.63) 的解, 则存在与  $h$  无关的常数  $C > 0$  使得

$$\|u_I - u_{I0} - \varepsilon u_{I1} + \varepsilon \theta_{I\varepsilon}\|_{1,\Omega} \leq C\varepsilon \|f\|_{0,\Omega}. \quad (3.64)$$

证明 利用式 (3.33) 和椭圆型方程解的正则性理论, 我们有

$$\|u_0\|_{2,\Omega} \leq C\|f\|_{0,\Omega}. \quad (3.65)$$

进一步, 根据标准的逼近理论有

$$|u_{0I}|_{2,K} \leq |u_0 - u_{0I}|_{2,K} + |u_0|_{2,K} \leq C|u_0|_{2,K},$$

这里  $u_{0I}$  是  $u_0$  的双线性插值. 因此, 利用  $L_0(u_{I0} - u_{0I}) = -L_0(u_{0I})$ , 有

$$|u_{I0}|_{2,K} \leq C|u_0|_{2,K}. \quad (3.66)$$

再利用引理 3.2, 可得

$$\|u_I - u_{I0} - \varepsilon u_{I1} + \varepsilon \theta_{I\varepsilon}\|_{1,K} \leq C\varepsilon \|u_{I0}\|_{2,K} \leq C\varepsilon |u_0|_{2,K}. \quad (3.67)$$

把上式在  $K^h$  上求和并利用式 (3.65), 即可证明式 (3.64).

现在考虑  $u$  的展开式

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 - \varepsilon \theta_\varepsilon,$$

由引理 3.2 和式 (3.65) 可得

$$\|u - u_0 - \varepsilon u_1 + \varepsilon \theta_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq C\varepsilon \|f\|_{0,\Omega}. \quad (3.68)$$

因此, 利用  $u, u_I$  展开式, 式 (3.64), 式 (3.68) 和三角不等式, 可得

$$\|u - u_{I\varepsilon}\|_{1,\Omega} \leq \|u_0 - u_{I0}\|_{1,\Omega} + \|\varepsilon u_1 - \varepsilon u_{I1}\|_{1,\Omega} + \|\varepsilon \theta_\varepsilon - \varepsilon \theta_{I\varepsilon}\|_{1,\Omega} + C\varepsilon \|f\|_{0,\Omega}. \quad (3.69)$$

因此我们需要估计式 (3.69) 右端前三项. 利用式 (3.45)、(3.62) 和 (3.65), 可得

$$\|u_0 - u_{I0}\|_{1,\Omega} \leq Ch\|f\|_{0,\Omega}, \quad (3.70)$$

注意到  $\chi_j(y) \in C^{1,\alpha}(\bar{Y})$ ,  $\|\chi_j(y)\|_{L^\infty(Y)} \leq C$ , 可得

$$\|\varepsilon u_1 - \varepsilon u_{I1}\|_{0,\Omega} \leq C\varepsilon h\|f\|_{0,\Omega}.$$

下面, 根据  $\|\nabla \chi_j(y)\|_{1,K} \leq C/\varepsilon$ , 因此存在  $C_1, C_2$  满足



$$\begin{aligned} \|\varepsilon u_1 - \varepsilon u_{I1}\|_{1,\Omega} &\leq C\varepsilon(|u_0 - u_{I0}|_{1,K} \sum_{j=1}^d |\nabla \chi_j|_{1,K} + \\ &|u_0 - u_{I0}|_{2,K} \sum_{j=1}^d |\chi_j|_{L^\infty(K)}) \\ &\leq C_1 |u_0 - u_{I0}|_{1,K} + C_2 \varepsilon |u_0 - u_{I0}|_{2,K}. \end{aligned}$$

因此把上式在  $K^h$  上求和并利用式 (3.65) 和式 (3.70), 即可证明

$$\|\varepsilon u_1 - \varepsilon u_{I1}\|_{1,\Omega} \leq (C_1 h + C_2 \varepsilon) \|f\|_{0,\Omega}. \quad (3.71)$$

对于  $\|\varepsilon \theta_\varepsilon - \varepsilon \theta_{I\varepsilon}\|_{1,\Omega}$  的估计, 需要用到下面两个估计. 首先利用标准的估计, 可得

$$\|\varepsilon \theta_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq C\varepsilon \|u_1\|_{1/2,\partial\Omega}.$$

利用  $\|\cdot\|_{1/2,\partial\Omega}$  的定义, 可得  $\|u_1\|_{1/2,\partial\Omega} \leq C\varepsilon^{-1/2}$ , 因此

$$\|\varepsilon \theta_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (3.72)$$

类似的, 对于  $\theta_{I\varepsilon}$  在每一个  $K \in K^h$  可以证明

$$\|\varepsilon \nabla \theta_{I\varepsilon}\|_{0,K} \leq C\varepsilon \|u_{I1}\|_{1/2,\partial K}, \quad (3.73)$$

由方程 (3.61), 可得

$$\|u_{I1}\|_{1/2,\partial K} \leq Ch^{1/2}, \quad \|u_{I1}\|_{1,\partial K} \leq Ch^{1/2} \varepsilon^{-1}.$$

因此, 对不等式 (3.73) 在  $K \in K^h$  求和, 我们得到

$$\|\varepsilon \nabla \theta_{I\varepsilon}\|_{0,\Omega} \leq h^{1/2} (C_1 \varepsilon + C_2 \varepsilon^{1/2}), \quad (3.74)$$

因此, 式 (3.60) 可以从式 (3.69) ~ (3.74) 得到.

## 2) $L^2$ 范数估计

可以利用 Aubin-Nitsche 技巧来估计  $L^2$  范数. 利用式 (3.59) 和式 (3.60), 可得

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C_1 h^2 \|f\|_{0,\Omega} + C_2 (\varepsilon/h)^{1/2}. \quad (3.75)$$

注意到这个收敛阶没有改变, 仍然含有  $(\varepsilon/h)^{1/2}$ , 因此在式 (3.75) 中没有改进, 这个结果也不是最优的. 下面我们通过另一种估计方式来改进估计.

设  $u_0^h \in V_0^h$  是式 (3.33) 的有限元解, 又因为  $\mu^i$  是线性的, 利用定理 3.4 可得

$$\|u_0 - u_0^h\|_{0,\Omega} \leq C_1 h^2 \|f\|_{0,\Omega}. \quad (3.76)$$

进一步, 利用式 (3.39), (3.76) 和三角不等式可得

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{0,\Omega} &\leq \|u - u_0\|_{0,\Omega} + \|u_0 - u_0^h\|_{0,\Omega} + \|u_h - u_0^h\|_{0,\Omega} \\ &\leq C_1 \varepsilon \|u_0\|_{2,\Omega} + C_2 h^2 \|f\|_{0,\Omega} + \|u_h - u_0^h\|_{0,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

因此,  $L^2$  范数的估计就只剩下 (3.77) 中右端项的最后一项  $\|u_h - u_0^h\|_{0,\Omega}$ .

进一步, 对于  $\forall K \in K^h$ , 考虑

$$\begin{aligned} \|u_h - u_0^h\|_{0,K} &= \left\| \sum_{i=1}^d (u_h(x_j) \phi^j - u_0^h(x_j) \phi_0^j) \right\|_{0,K} \\ &= \left\| \sum_{i=1}^d ((u_h(x_j) - u_0^h(x_j)) \phi^j + u_0^h(x_j) (\phi^j - \phi_0^j)) \right\|_{0,K} \\ &\leq \sum_{i=1}^d |u_h(x_j) - u_0^h(x_j)| \|\phi^j\|_{0,K} + \left\| \sum_{i=1}^d u_0^h(x_j) (\phi^j - \phi_0^j) \right\|_{0,K}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

下面我们将证明上式的第二项是  $O(\varepsilon)$  的. 记  $\tilde{u} = \sum_{i=1}^d u_0^h(x_j) \phi^j$ , 则  $L_\varepsilon \tilde{u} = 0$ .

因此  $\tilde{u}$  具有多尺度展开式. 利用引理 3.2 可得

$$\|\tilde{u}(x) - \tilde{u}_0(x) - \varepsilon(\tilde{u}_1 - \tilde{\theta}_\varepsilon)\|_{0,K} \leq C \varepsilon |\tilde{u}_0(x)|_{2,K},$$

这里  $\tilde{u}_0 = \sum_{i=1}^d u_0^h(x_j) \phi_0^j$ ,  $\tilde{u}_1 = -\chi_j \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_j}$  和  $\tilde{\theta}_\varepsilon$  是校正子, 定义类似于  $\theta_{j,\varepsilon}$ . 我们得到

$$\|\tilde{u}(x) - \tilde{u}_0(x)\|_{0,\Omega} \leq \varepsilon (C |\tilde{u}_0(x)|_{2,\Omega} + \|\tilde{u}_1\|_{0,\Omega} + \|\tilde{\theta}_\varepsilon\|_{0,\Omega}), \quad (3.79)$$

这里  $|\tilde{u}_0(x)|_{2,\Omega}$  定义如下

$$|\tilde{u}_0(x)|_{2,\Omega}^2 = \sum_{K \in K^h} |\tilde{u}_0(x)|_{2,K}^2.$$

因为  $u_0^h(x)$  是在网格上的一个光滑函数解, 因此式 (3.79) 的右端是有界的且其界为  $C\varepsilon$ , 这里的常数  $C$  是与  $\varepsilon$  和  $h$  无关的常数.

利用式 (3.78) 和式 (3.79), 根据  $\|\phi_k^i\|_{0,K} \leq Ch$ , 可以得到

$$\|u_h - u_0^h\|_{0,\Omega} \leq C \left( \sum_{i \in N} (u_h(x_i) - u_0^h(x_i))^2 h^2 \right)^{1/2} + C \varepsilon,$$

这里  $N$  是网格节点的序号集合. 因此  $\|u_h - u_0^h\|_{0,\Omega}$  是  $O(h^2 + \varepsilon)$  加上  $u_h(x_i) - u_0^h(x_i)$  的离散  $L^2$  范数.

可以证明其主要的收敛阶为  $O(\varepsilon/h)$ . 因此, 根据式 (3.78) 和式 (3.79) 可以得到

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C_1 h^2 \|f\|_{0,\Omega} + C_2 \varepsilon + C_3 \frac{\varepsilon}{h}, \varepsilon < h. \quad (3.80)$$