高 等 数 学

（上）

主　编　王　凯　罗永超　杨　娟
副主编　李光辉　叶绪国

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上 / 王凯，罗永超，杨娟主编. —成都：西南交通大学出版社，2015.1
ISBN 978-7-5643-3527-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②罗… ③杨… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 251437 号

高等数学
（上）

王　凯
罗永超　　主编
杨　娟

责任编辑　张宝华
封面设计　墨创文化

印张　17.75　　字数　443千	出版 发行　西南交通大学出版社
成品尺寸　185 mm×260 mm	网址　http://www.xnjdcbs.com
版本　2015年1月第1版	地址　四川省成都市金牛区交大路146号
印次　2015年1月第1次	邮政编码　610031
印刷　四川嘉乐印务有限公司	发行部电话　028-87600564　028-87600533
书号：ISBN 978-7-5643-3527-4	定价：36.00元

课件咨询电话：028-87600533

凯里学院规划教材编委会

总　序

教材建设是高校教学内涵建设的一项重要工作，是体现教学内容和教学方法的知识载体，是提高人才培养质量的重要条件. 凯里学院2006年升本以来，十分重视教材建设工作，在教材选用上明确要求“本科教材必须使用国家规划教材、教育部推荐教材和面向21世纪课程教材”，从而保证了教材质量，为提高教学质量、规范教学管理奠定了良好基础. 但在使用过程中逐渐发现，这类适用于研究型本科院校使用的系列教材，多数内容较深、难度较大，不一定适合我校的学生使用，与应用型人才培养目标也不完全切合，从而制约了应用型人才的培养质量. 因此，探索和建设适合应用型人才培养体系的校本教材、特色教材成为我校教材建设的迫切任务. 自2008年起，学校开始了校本特色教材开发的探索与尝试，首批资助出版了11本原生态民族文化特色课程丛书，主要有《黔东南州情》、《苗侗文化概论》、《苗族法制史》、《苗族民间诗歌》、《黔东南民族民间体育》、《黔东南民族民间音乐概论》、《黔东南方言学导论》、《苗侗民间工艺美术》、《苗侗服饰及蜡染艺术》等. 该校本特色教材丛书的出版，弥补了我校在校本教材建设上的空白，为深入开展校本教材建设积累了经验，并对探索保护、传承、弘扬与开发利用原生态民族文化，推进民族民间文化进课堂做出了积极贡献，同时对我校教学、科研和人才培养也起到了积极的推动作用，并荣获贵州省高等教育教学成果一等奖.

当前，随着高等教育大众化、国际化的迅猛发展和地方本科院校转型发展的深入推进，越来越多的地方本科高校在明确应用型人才培养目标、办学特色、教学内容和课程体系的框架下，积极探索和建设适用于应用型人才培养的系列教材. 在此背景下，根据我校人才培养方案和“十二五”教材建设规划，结合服务地方社会经济发展、民族文化传承需要，我们又启动了第二批校本教材的立项研究工作，通过申报、论证、评审、立项等环节确定了教材建设的选题范围. 第二套校本教材建设项目分为基础课类、应用技术类、素

质课类、教材教法等四类，在凯里学院教材建设专家委员会的组织、指导和教材编著者们的辛勤编撰下，目前，15 本教材的编撰工作已基本完成，即将正式出版. 这套教材丛书既是近年来我校教学内容和课程体系改革的最新成果，反映了学校教学改革的基本方向，也是学校由“重视规模发展”转向“内涵式发展”的一项重大举措.

凯里学院校本规划教材丛书的编辑出版，集中体现了学校探索应用型人才培养的模式，也倾注了编著教师团队成员的大量心血，将有助于推动地方院校提高应用型人才培养质量. 然而，由于编写时间紧，加之编著者理论和实践能力水平有限，书中难免存在一些不足和错漏，我们期待在教材使用过程中获得批评意见、改进建议和专家指导，以使之日臻完善.

凯里学院规划教材编委会

2014 年 12 月

前　言

高等数学是理工科专业学生的必修课、基础理论课. 对理工科专业的学生来说，学好高等数学不仅仅意味着掌握了一门现代科学语言，学会了一种理性的思维模式以及分析、归纳、演绎的方法，更重要的是只有学好高等数学，才能完成后续的专业课学习，并为后续课程打下坚实的理论与实际操作的基础. 通过本课程的学习，学生能够掌握有关微积分、矢量代数、空间解析几何、无穷级数和常微分方程的基本知识. 同时本书增加了数学在经济学、物理学、计算机科学中的应用实例，弱化了一些纯数学的理论证明，力求让学生掌握必要的理论和常用的运算方法，并能应用这些知识解决一些实际问题.

通过本课程的学习，能够提高学生的数学理解能力、数学运算能力、逻辑推理能力和分析问题与解决问题的能力. 这一方面为后继课程学习奠定必要的数学基础. 另一方面也使学生能够正确地运用数学知识去解决物理学、化学、生物学、计算机科学、经济学中的实际问题，并将高等数学的知识和方法更好地应用到相关专业的学习中.

目前，国内高校的高等数学教材众多，且各具特色. 通过多年的教学实践发现，对于地方高校而言，不论使用什么教材，学生在学习效果上并不理想，常常感到“听起来难，学起来更难，用起来则难上加难”. 这也许就是多年来很多学子心中的不解之愁，也是数学教育和数学课程改革不可回避的问题.

为了解决这个问题，也为了更好地满足我国地方高校培养应用型人才的需求，真正体现“数学为本”的特点，我们经过多年的经验总结，几经修改后，终于完成了这本《高等数学》教材.

本教材具有以下特点：

（1）考虑到地方高校学习对象的状况及特点，以及贴近学生的需要，教材每一章的开头部分都引用了著名数学家与本章内容相关的哲理名言，因为高等数学的主要内容——微积分就是从辩证唯物主义的观点去看待事物的，很多数学家其实也是哲学家.

（2）教材每一章的结尾部分编写了相关的数学史内容. 学习相关数学史的内容不仅让学生系统掌握了数学的基本思想方法与相关数学问题的来源，而且让学生领会到数学家们为解决问题坚持不懈和刻苦钻研的精神，并将这种精神贯穿于高等数学的学习及事业的追求中.

（3）教材每章后面的习题都分为两部分：第一部分为客观题，第二部分为主观题. 编写顺序是按照题目的难易程度编排的. 而本教材习题的选择，不论是难易程度还是题目的数量，都符合地方高校理工科学生的培养计划，同时也为他们将来考取硕士研究生、国家公务员等夯实基础.

本书分为上、下两册，共分为 12 章. 其中上册包含函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数应用，不定积分，定积分，定积分的应用，空间解析几何与向量代数等内容；下册包含多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，微分方程，无穷

级数等内容. 为了方便教师拓展教学和学生扩大知识面，本书的部分例题和习题选自历年考研真题，同时也满足学生个性发展的需要.

在高等数学的学习过程中，应注意以下几点：

（1）各类知识都是在一定的历史过程中形成的，因此，要在历史发展的长河中，考察它的产生、发展、意义及未来. 这就是说要系统地学习. 因此建议学习者了解一点数学史和一些科学家在计算机和数学领域所做的贡献，以激励我们的数学学习.

（2）要从各个不同侧面来理解所学的知识，即用不同的观点——哲学的、物理的、直觉的、甚至常识的，来解释同一个问题；还要学会从正面、反面及各个不同侧面来观察同一个问题. 要学会运用联想、类比、归纳等方法，将所学的知识编织成一个知识网络，融会贯通，使之发挥巨大的威力.

（3）学习中注意抓住三个问题：基本概念、基本原理、典型范例. 要着重理解概念是如何通过对实际问题的分析和抽象得出的，基本原理是如何反映概念之间关系的，典型例题是如何体现其应用原理的. 若能坚持在各个环节：复习—学习新知识—练习—总结中贯彻上述原则，就不难学好这门课.

本教材是编者根据多年的教学实践经验和研究成果，结合“高等数学课程教学基本要求”及理工科专业的人才培养目标要求编写而成. 主要面向的是本科院校层次的理工科专业学生. 本书可作为高等院校、独立学院以及具有较高要求的成教学院等本科院校非数学专业的数学基础课教材.

本教材积累了多位老师多年来的教学经验与学术成果，但由于编者水平有限，不当之处在所难免，恳请广大教师和学生提出宝贵的意见，我们将进一步改进.

作　者

2014 年 7 月

目　　录

没有任何问题可以像无穷那样深深地触动人的情感；很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想；然而也没有任何其他概念能像无穷那样需要加以阐明.

——希尔伯特（Hilbert）

第一章　函数　极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键. 连续是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

第一节　集合与邻域

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着. 17 世纪初，数学家首先从对运动（如天文、航海问题等）的研究中引出了函数这个基本概念. 从此，函数概念在几乎所有的科学研究工作中占据着中心的位置.

本节介绍函数的概念、函数关系的构建与函数的特性.

一、集合的概念

集合是数学中一个原始的概念，它在现代数学中起着重要的作用. 所谓集合，就是指具有某种特定属性的事物的总体，或是某些确定对象的全体. 构成集合的每一事物或对象皆称为该集合的元素. 集合也简称为集.

下面看几个集合的例子.

例 1　某学校的全体在校学生.

例 2　方程 $x^2-3x-4=0$ 的所有实根.

例 3　全体偶数.

例 4　圆周 $x^2+y^2=4$ 上所有的点.

由有限个元素构成的集合称为有限集合，如例 1、例 2；由无限多个元素构成的集合称为无限集合，如例 3、例 4.

通常我们用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 等表示集合，用小写字母 $a, b, c, \cdots$ 等表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 中的元素，则记作 $a \in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a \overline{\in} A$，

读作 a 不属于 A.

一个集合一经给定，那么对于任何事物或对象都能够判定它是否属于这个给定的集合.

集合的表示方法一般有列举法和描述法.

（1）列举法．是指按任意顺序列出集合中的所有元素，并用括号{ }括起来.

例 5　由 a, b, c, d 四个元素组成的集合 A 可以表示为

$$A=\{a,b,c,d\} \quad \text{或} \quad A=\{b,c,d,a\}.$$

例 6　由方程 $x^2-3x-4=0$ 的根构成的集合 A 可以表示为

$$A=\{4,-1\}.$$

用列举法表示集合时，必须列出集合中的所有元素，不能遗漏和重复.

（2）描述法．是把集合中元素所具有的共同属性描述出来，用 $A=\{x\,|\,x\text{具有的共同属性}\}$ 表示.

例 7　设 A 为全体偶数的集合，可以表示为

$$A=\{x\,|\,x=2n, n\text{为整数}\}.$$

例 8　设 A 为圆周 $x^2+y^2=4$ 上的点的集合，可以表示为

$$A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4 \text{ 且 } x,y \text{ 为实数}\}.$$

例 9　设 A 为方程 $x^2+1=0$ 的实根构成的集合，由于在实数范围内方程无解，所以 A 中不可能有任何元素．这种不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$．所以

$$A=\{x\,|\,x^2+1=0\text{且}x\text{为实数}\}=\varnothing.$$

习惯上，全体自然数的集合记作 **N**，全体整数的集合记作 **Z**，全体有理数的集合记作 **Q**，全体实数的集合记作 **R**.

应该注意的是，空集$\varnothing$不能与仅含有元素“0”的集合$\{0\}$相混淆.

子集概念也是集合中常用的．如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素，即如果 $a\in A$，则 $a\in B$，那么 A 就是 B 的子集，记为

$$A\subset B \quad \text{或} \quad B\supset A,$$

读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

例 10　设 **N** 为全体自然数集，**Q** 为全体有理数集，**R** 为全体实数集，那么 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

例 11　设 $A=\{x\,|\,2\leqslant x<100\}$，$B=\{x\,|\,2\leqslant x\leqslant 50\}$，$C=\{x\,|\,x\leqslant 50\}$，显然，$B\subset A$ 且 $B\subset C$，但 A 不是 C 的子集，C 也不是 A 的子集.

特别，若两个集合 A 和 B 同时有 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

例 12　设 $A=\{x\,|\,x\text{为大于}1\text{小于}4\text{的整数}\}$，$B=\{x\,|\,x\text{为小于}5\text{的质数}\}$，$C=\{x\,|\,x^2-5x+6=0$ 的根$\}$，因为三个集合 A, B, C 中都只包含 2 和 3 这两个数，所以 $A=B=C$.

对于子集还有以下结论：

（1）$A\subset A$，即集合 A 是其自身的子集.

（2）$\varnothing\subset A$，即空集是任意集合的子集.

（3）若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$，即集合的包含关系具有传递性.

有时我们也用一个图形表示集合，在此不一一列举.

二、集合的运算

如同数的各种运算一样，集合之间也有其特定的运算，下面给出集合的并、交、补三种基本运算，并借助于图形直观描述集合之间的关系．这里，集合用一个平面区域表示，集合内的元素以区域内的点表示．如图 1-1 所示，集合 A 与 B 的关系是 $A \subset B$.

定义 1　由集合 A 与 B 中的所有元素构成的集合称为集合 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$，读作 A 与 B 之并，如图 1-2 阴影部分．也可表示为

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

显然，$A \subset A \cup B$，$B \subset A \cup B$，并且 $A \cup \varnothing = A$，$A \cup A = A$.

特别地，当 $A \subset B$ 时，$A \cup B = B$.

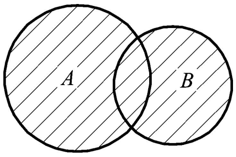


图 1-2

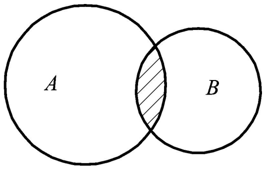


图 1-3

定义 2　由集合 A 与 B 的公共元素构成的集合称为 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$，读作 A 与 B 的交，如图 1-3 阴影部分．也可表示为

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

显然，$A \cap B \subset A$，$A \cap B \subset B$，并且 $A \cap \varnothing = \varnothing$，$A \cap A = A$.

特别地，当 $A \subset B$ 时，$A \cap B = A$.

例 13　设 $A = \{x \mid -1 < x < 2\}$，$B = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$，则

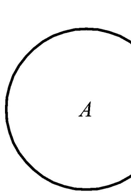
$$A \cup B = \{x \mid -1 < x \leqslant 3\}，A \cap B = \{x \mid 1 \leqslant x < 2\}.$$

例 14　设 A 为全体正整数集合，B 为全体负整数集合，C 为全体整数集合，则

$$A \cup B = \{x \mid x \text{ 为正整数或负整数}\}.$$

$$A \cap B = \varnothing.$$

$$A \cup C = C \quad \text{且} \quad B \cap C = B.$$



这里 $A \cap B = \varnothing$，称 A 与 B 是分离的，如图 1-4 所示.

定义 3　由属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的差，记作 $A - B$，如图 1-5 阴影部分．也可表示为

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

例 15　若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{2, 4, 6, 8\}$，则

$$A-B=\{1,3\}，B-A=\{6,8\}.$$

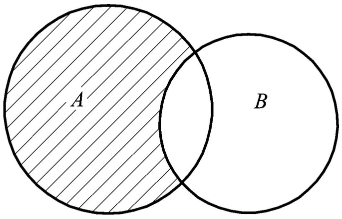


图 1-5

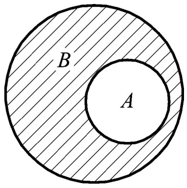


图 1-6

定义 4　若集合 A 为集合 B 的子集，则由属于 B 而不属于 A 的所有元素构成的集合称为集合 A 关于集合 B 的补集，记为 A_B^C，也常简记为 A^C，如图 1-6 阴影部分．也可表示为

$$A_B^C=\{x \mid x\in B \text{ 且 } x \bar{\in} A\}.$$

显然，$A\cup A_B^C=B$，$A\cap A_B^C=\varnothing$，$A_B^C\subset B$.

特别地，由于 $A\subset B$，则 $B-A=A_B^C$.

例 16　在例 14 的集合 A,B,C 中，由 $A\subset C$，$B\subset C$，则

$$A_C^C=B\cup\{0\}，\quad B_C^C=A\cup\{0\}，$$

并有

$$C-A=B\cup\{0\}，\quad C-B=A\cup\{0\}，$$

即

$$C-A=A_C^C，\quad C-B=B_C^C.$$

集合运算具有如下性质：

（1）交换律：① $A\cup B=B\cup A$；② $A\cap B=B\cap A$.

（2）结合律：① $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；② $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

（3）分配律：① $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；② $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

（4）对偶律：① $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$；② $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

下面证明结合律①和对偶律②，其他结论可以类似证明．

结合律①的证明：

如果 $x\in(A\cup B)\cup C$，则 $x\in A\cup B$ 或 $x\in C$，即 $x\in A$ 或 $x\in B$ 或 $x\in C$，因而 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$，所以 $x\in A\cup(B\cup C)$. 由此可得

$$(A\cup B)\cup C\subset A\cup(B\cup C).$$

同理可证

$$A\cup(B\cup C)\subset(A\cup B)\cup C.$$

所以

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

对偶律②的证明：

如果 $x\in(A\cap B)^C$，则 $x\bar{\in}A\cap B$，故 $x\bar{\in}A$ 或 $x\bar{\in}B$．当 $x\bar{\in}A$ 时，有 $x\in A^C$；当 $x\bar{\in}B$ 时，有 $x\in B^C$．因此总有 $x\in A^C\cup B^C$，则可得

$$(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C.$$

如果 $x\in A^C\cup B^C$，则 $x\in A^C$ 或 $x\in B^C$，即 $x\in A$ 与 $x\in B$ 至少有一个不成立．故 $x\bar{\in}A\cap B$，即 $x\in(A\cap B)^C$，所以

$$A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C .$$

综合以上证明，有 $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

例 17　设 A 表示某单位会英语的人的集合，B 表示会日语的人的集合，那么：

A^C 表示该单位不会英语的人的集合；

B^C 表示该单位不会日语的人的集合；

$A - B$ 表示该单位会英语而不会日语的人的集合；

$B - A$ 表示该单位会日语而不会英语的人的集合；

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ 表示英语和日语都不会的人的集合；

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ 表示不会英语或不会日语的人的集合.

三、实数与数轴

人们对于数的概念的认识是逐步深入的，从自然数、整数、有理数到无理数经历了漫长的历史.

自然数集 $\mathbf{N}$ 关于加法运算是封闭的，即若 $a \in \mathbf{N}$，$b \in \mathbf{N}$，则必有 $a + b \in \mathbf{N}$. 但在 $\mathbf{N}$ 中，减法运算却不是封闭的，这样就有了整数集 $\mathbf{Z}$. 在整数集 $\mathbf{Z}$ 中，加法、减法和乘法运算是封闭的，但对除法运算却不封闭，因而引出了有理数集 $\mathbf{Q}$. 对于有理数集

$$Q = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, (p, q) = 1 \right\},$$

四则运算总是封闭的. 有理数除了以分数形式表示，还可以表示为有限小数或无限循环小数形式. 随着科学技术的发展及数学研究的进一步深入，出现了诸如圆周率 π 的计算及开方运算，如 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 等，无理数因此应运而生.

有理数和无理数统称为实数. 所有的实数都可以在一条直线上形象地表示出来. 设有一条水平直线，在直线上取定一点 O 称为原点；规定一个正方向，习惯上规定由原点向右的方向为正方向；再规定一个长度称为单位长度. 这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴，如图 1-7 所示.

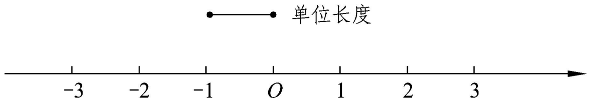


图 1-7

任何一个有理数 $\frac{p}{q}$，都可以在数轴上找到一个点与之对应，这个点叫做有理点. 它是有理数 $\frac{p}{q}$ 的几何表示，而有理数 $\frac{p}{q}$ 则为该有理点的坐标. 同时，对于任意两个有理数 a，b（$a < b$），a 与 b 之间至少可以找到一个有理数 c，使 $a < c < b$，例如 $c = \frac{a+b}{2}$；同样，在 a 与 c 之间也至少可以找到一个有理数 d，使 $a < d < c$；依此类推，可以看到，a 与 b 之间总可以找到无穷多个有理数，即有理数具有稠密性. 对应地，在数轴上任意两个有理点之间也有无

穷多个有理点存在，也就是说，有理点在数轴上是处处稠密的.

尽管有理点在数轴上处处稠密，但是否能够充满整个数轴呢？例如，以 1 个单位长度作为边长的正方形，其对角线长度为 $\sqrt{2}$ 个长度单位. 可以证明，$\sqrt{2}$ 是无理数. 在数轴上可以作出 $\sqrt{2}$ 个长度单位的线段 OB，如图 1-8 所示.

可见，数轴上确实还存在诸如此类的非有理点——无理点，例如，$\sqrt{2}+1$，$\sqrt{3}$，π，…等对应的点. 所有的无理点填补了有理点之外的“空隙”. 可以证明，实数充满了整个数轴而不再留有“空隙”，也就是说，实数不仅具有稠密性，也具有连续性. 这样，数轴上的点与实数之间建立起了一一对应的关系，每一个实数必是数轴上某点的坐标；反之，数轴上每一点的坐标必是一个实数. 所以，在今后的学习中，常将实数与其在数轴上的对应点不加区别地混用，如点 a 和实数 a 是相同的意思.

四、区间　邻域

区间是用得较多的一类数集，在数学中常用区间表示一个变量的变化范围.

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，见图 1-9（1），即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}.$$

a 和 b 为开区间的端点，且 $a\notin(a,b),\ b\notin(a,b)$.

数集 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，见图 1-9（2），即

$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间的端点，这里 $a\in[a,b],\ b\in[a,b]$.

类似地可以给出半开区间，见图 1-9（3），（4）.

$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\},\quad (a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}.$$

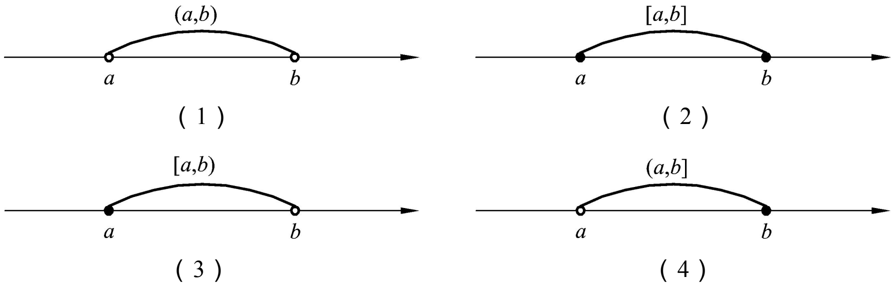


图 1-9

以上四种区间都称为有限区间，区间长度均为 $b-a$. 在数轴上，这些区间是长度有限的线段. 此外，还有五种所谓无穷区间，引入记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），可定义无穷区间如下：

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\},\ [a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\};$$

$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\},\ (-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\};$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}，即全体实数集合\mathbf{R}.$$

以后在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点以及是否为有限区间时，我们就简单地称之为区间.

邻域是一类较为特殊的区间，也是一个常用的概念.

设 x_0 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集

$$\{x\,\|x-x_0|<\delta\}$$

称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，点 x_0 叫做该邻域的中心，δ 为该邻域的半径.

由于 $|x-x_0|<\delta$，即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，所以

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}.$$

因此，$U(x_0,\delta)$ 就是开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 这个开区间以点 x_0 为中心，δ 为半径，其长度为 2δ，见图 1-10（1）.

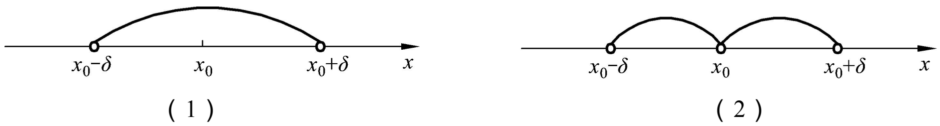


图 1-10

有时用到邻域时需要把邻域的中心点去掉，点 x_0 的 δ 邻域去掉中心点 x_0 后，称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\},$$

这里 $|x-x_0|>0$ 表示 $x\neq x_0$，见图 1-10（2）.

第二节　函　　数

一、函数的概念

在一个自然现象或某个研究过程中，往往同时存在几个变量在变化，而这几个变量通常不是孤立地变化，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 这里仅就两个变量之间的关系举几个例子.

例 1　半径为 R 的圆的面积为

$$A=\pi R^2.$$

这就是两个变量 A 与 R 之间的关系. 当半径 R 在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一个值时，由上式就可以确定圆的一个面积值 A.

例 2　一个物体以 v_0 为初速度作匀加速运动，加速度为 a，经过时间间隔 t 后，物体的速

度为

$$v = v_0 + at .$$

这里开始计时时，记 $t = 0$，此时速度值为 v_0，加速度 a 是常数，当时间 t 在区间 $[0, T]$ 内任取一个值时，就可以确定物体在这个时刻 t 的速度值 v.

例 3 在半径为 R 的圆中，作内接正 n 边形，由图 1-11 可得正 n 边形的周长 L_n 与边数 n 之间的关系为

$$L_n = 2nR\sin\frac{\pi}{n}.$$

图中，$\alpha_n = \dfrac{\pi}{n}$. 当 n 在 3, 4, 5,$\cdots$ 等自然数集中任取一个值时，由上式可得到对应周长的值 L_n.

在以上几个例子中，都给出了一对变量之间的一种关系，这种关系确定了一个对应规则，当其中一个变量在其变化范围内任取一个值时，另一个变量依照对应规则就有一个确定的值与之对应. 这两个变量之间的对应关系就是函数概念的实质.

定义 1 设 D 是一个非空实数集合，f 为一个对应规则，对每一个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x), x \in D .$$

x 称为自变量，y 称为因变量，集合 D 称为函数的定义域，可记为 $D(f)$.

对于 $x_0 \in D$，所对应的 y 的值记为 y_0 或 $f(x_0)$，称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值. 当 x 取遍 D 的一切值时，对应的所有函数值构成的集合

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

函数 $y = f(x)$ 中表示对应规则的记号 f 也常用其他字母，如 g, h, φ 或 F, G, Φ 等.

在实际问题中，函数的定义域是由问题的实际意义确定的. 在例 1 中，定义域为 $(0,+\infty)$；在例 2 中，定义域为 $[0, T]$；在例 3 中，定义域为大于等于 3 的自然数集 $\{n \mid n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geqslant 3\}$.

在数学中，对于抽象的函数表达式，我们约定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

例 4 函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$.

例 5 函数 $y = \lg(5x - 4)$ 的定义域应满足

$$5x - 4 > 0,$$

故定义域为 $\left(\dfrac{4}{5},+\infty\right)$.

例 6　函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ 的定义域应满足

$$x^2-x-2>0,$$

即

$$(x-2)(x+1)>0,$$

故定义域为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

例 7　函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域应满足

$$\left|\frac{x-1}{5}\right|\leqslant 1 \quad 且 \quad x^2<25,$$

即

$$-5\leqslant x-1\leqslant 5 \quad 且 \quad -5<x<5,$$

故定义域为$[-4,5)$.

在函数关系中，定义域、对应规则和值域是确定函数关系的三个要素，如果两个函数的对应规则和定义域、值域相同，则认为这两个函数是相同的，至于自变量和因变量用什么字母表示则无关紧要.

例 8　下列各对函数是否相同?

（1） $f(x)=x+1$， $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；　　　　（2） $f(x)=|x|$， $g(x)=\sqrt{x^2}$.

解　（1）不相同. $f(x)=x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$， $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，因此 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不相同，故不是相同的函数.

（2）相同. 因 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域相同，均为 $(-\infty,+\infty)$，而且对应规则、值域也相同，所以是相同的函数.

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，对于任取的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 在平面直角坐标系中，取自变量 x 在横轴上变化，因变量 y 在纵轴上变化，则平面点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

例 9　函数 $y=2x$ 的图形是一条直线，如图 1-12 所示.

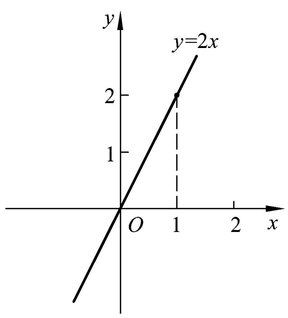


图 1-12

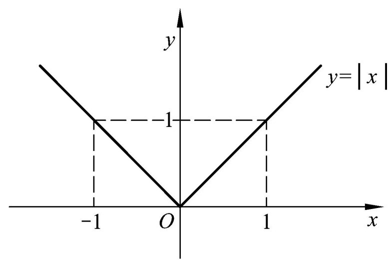


图 1-13

例 10　函数 $y=|x|$ 的图形如图 1-13 所示. 这里当 $x\geqslant 0$ 时, $y=x$；当 $x<0$ 时， $y=-x$.

例 11　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$，而值域为$\{-1,0,1\}$，并且$|x|=x\operatorname{sgn}x$，图形如图 1-14 所示.

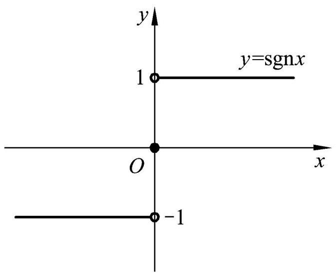


图 1-14

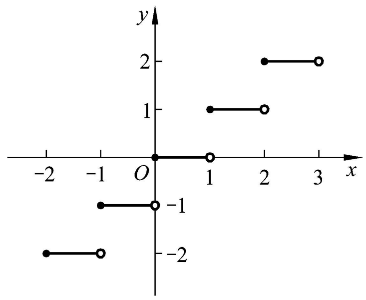


图 1-15

例 12　取整函数$y=[x]$，表示y取不超过x的最大整数．如

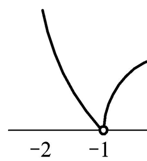
$$\left[\frac{1}{3}\right]=0，\ [\sqrt{2}]=1，\ [\pi]=3，\ [-1]=-1，\ [-3.5]=-4，$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为整数集合$\mathbf{Z}$，图形如图 1-15 所示.

例 13　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2,\end{cases}$$

其定义域D为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$，值域$W$为$(0,3]$，图形如图 1-16 所示.



当然，并非所有函数都可以用几何图形表示出来．如：

例 14　狄利克雷（Dirichlet）函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

显然，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{0,1\}$．这个函数不能用几何图形表示出来.

注意：我们这里所说的函数概念与中学函数概念不同，中学所说的函数强调对应的唯一性，这里取消了“唯一性”的限制.

如果自变量在定义域内任取一个值时，对应的函数值总只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数．以后凡是没有特别说明时，函数都指单值函数.

下面举一个多值函数的例子.

例 15　在直角坐标系中，半径为R的圆心在原点的圆的方程是$x^2+y^2=R^2$．这个方程在闭区间$[-R,R]$上确定一个以x为自变量、y为因变量的函数．当x取$-R$或R时，对应的函数值只

有一个 $y=0$，但当 x 在开区间 $(-R,R)$ 内取值时，其对应的函数值总有两个：$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$，所以由方程 $x^2+y^2=R^2$ 确定了一个多值函数．如果附加一定的条件，就可以将多值函数化为单值函数，这样得到的单值函数称为这个多值函数的一个单值分支．例如，由方程 $x^2+y^2=R^2$ 给出的对应规则中，附加“$y\geqslant 0$”的条件，就可以得到一个单值分支 $y=\sqrt{R^2-x^2}$；附加“$y\leqslant 0$”的条件，就可以得到另一个单值分支 $y=-\sqrt{R^2-x^2}$．

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在一个常数 $M>0$，使得对于一切 $x\in X$，其对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界．如果不存在这样的 M，也就是说，对任何正数 M，无论 M 的值有多大，总可以找到 X 中的点 x_1，使

$$|f(x_1)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界．

函数 $y=\sin x$ 无论 x 取任何实数，总有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$ 或为大于 1 的任何常数，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的．又如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是有界的，因为对一切 $x\in[1,+\infty)$，总有 $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$．但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的常数 M，使得对所有 $x\in(0,1)$，有不等式 $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立．事实上，对于任意取定的正数 M，不妨设 $M>1$，则 $\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$，当取 $x_1=\dfrac{1}{2M}$ 时，$|f(x_1)|=\left|\dfrac{1}{x_1}\right|=2M>M$．因此，可以进一步看到，同一个函数在不同区间上的有界性可能不同．

当一个函数是有界函数时，它的图形是介于两条水平直线 $y=M$ 及 $y=N$ ($M<N$) 之间的曲线．

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若对任意两点 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；而当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的．

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数．当函数单调增加时，它的图形是随 x 的增加而上升的曲线；当函数单调减少时，它的图形是随着 x 的增大而下降的曲线．

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，所以在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数 $y=x^2$ 不是单调函数，见图 1-17．又例如，函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的函数，见图 1-18．

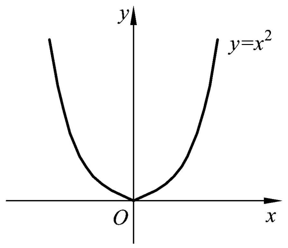


图 1-17

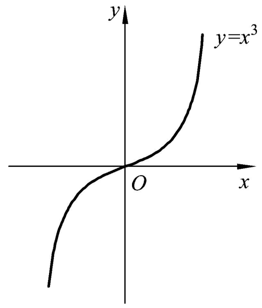


图 1-18

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一个 $x\in D$ ，总有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一个 $x\in D$ ，总有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数．

偶函数的图形关于 y 轴对称．因为若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$ ，那么对应于 x 及 $-x$ 的两个点 $A(x,f(x))$ 及 $A'(-x,f(x))$ 都在函数的图形上，并关于 y 轴对称，如图 1-19(1)所示．

奇函数的图形关于原点对称．因为若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$ ，那么对应于 x 及 $-x$ 的两个点 $A(x,f(x))$ 及 $A'(-x,-f(x))$ 都在函数的图形上，并关于原点对称，如图 1-19(2)所示．

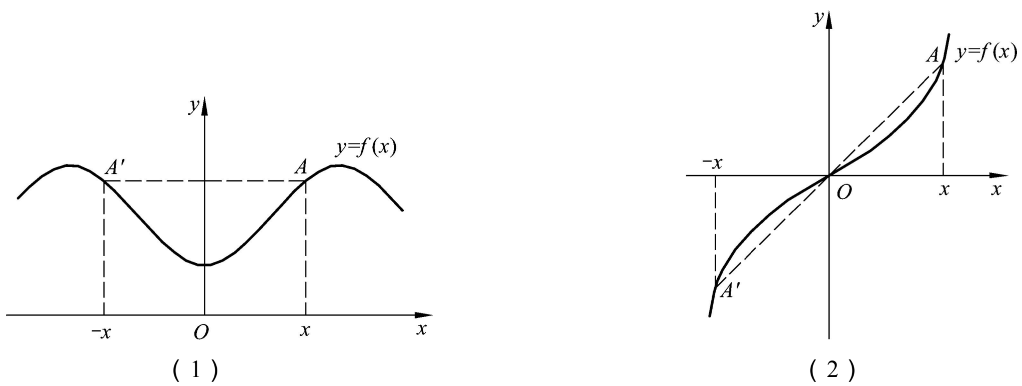


图 1-19

函数 $y=x^2+1$ ，$y=\cos x$ ，$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ ，$y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 等皆为偶函数；而函数 $y=\sqrt[3]{x}$ ，$y=x^2\sin x$ ，

$y=\dfrac{x}{1+x^2}$，$y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 等皆为奇函数．函数 $y=\sin x+\cos x$ 及 $y=x+x^2$ 既非奇函数，也非偶函数．

特别地，函数 $y=0$ 既是奇函数，也是偶函数.

4．函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的一个周期．通常，我们所说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\sin\omega t$ 是以 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 为周期的函数.

一个周期为 l 的周期函数，在每个长度为 l 的区间上函数图形有相同的形状.

并不是每个周期函数都有最小正周期，狄利克雷函数就属于这种情形.

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

若 x 为有理数，对任一有理数 γ，$x+\gamma$ 也是有理数，因而 $D(x+\gamma)=D(x)=1$；若 x 为无理数，对上述有理数 γ，$x+\gamma$ 也是无理数，所以 $D(x+\gamma)=D(x)=0$．这样，任何有理数 γ 均是 $D(x)$ 的周期，但在有理数集中没有最小的正有理数，也就是说，函数 $D(x)$ 没有最小正周期.

三、复合函数和反函数

1．复合函数

先看一个例子．设 $y=\sqrt{u}$，而 $u=1-x^2$，以 $1-x^2$ 代替第一式中的 u，得 $y=\sqrt{1-x^2}$，这时函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 就是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数.

一般地，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 W_2，并且 $W_2\subset D_1$，那么对每个 $x\in D_2$，有确定的函数值 $u\in W_2$ 与之对应．由于 $W_2\subset D_1$，因此这个值 u 也属于函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_1，故又有确定的值 y 与值 u 对应．这样，对每个数值 $x\in D_2$，通过 u 有确定的数值 y 与之对应，从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

而 u 称为中间变量.

例如，函数 $y=\sin^2 x$ 就可看作由 $y=u^2$ 及 $u=\sin x$ 复合而成的，这个函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，这也正是函数 $u=\sin x$ 的定义域；又例如，$y=\sqrt{x^2}$ 可看作由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=x^2$ 复合而成的函数，这个函数实际就是 $y=|x|$，这时 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域与 $u=x^2$ 的定义域相同，都是 $(-\infty,+\infty)$．

必须注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的．例如，$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$．因为对于 $u=2+x^2$，无论 x 取什么实数，总有 $u\geqslant 2$，因而不能使 $y=\arcsin u$ 有意义，所以这两个函数不能复合成一个复合函数．而在前面已经见到的函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，复合前的函数 $u=1-x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 W_2 为 $(-\infty,1]$，这显然不完全符合函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 D_1 的要求，也就是说，定义中的条件 $W_2\subset D_1$ 不成立．但由于 $W_2\cap D_1\neq\varnothing$，所以适当限制 x 的取值范围后，函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 也能复合成一个复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，即在 $u=1-x^2$ 中，x 的取值范围必须限制为$[-1,1]$．

复合函数也可由两个以上的函数经过复合构成．例如，$y=\ln\sqrt{2+x^2}$，就是由 $y=\ln u$，$u=\sqrt{v}$ 和 $v=2+x^2$ 三个函数复合而成的，其中 u 和 v 都是中间变量．

2．反函数

在同一个变化过程中，存在着函数关系的两个变量之间，究竟哪一个是自变量哪一个是因变量的问题，但这并不是绝对的，要视问题的具体要求而定．例如，在某商品销售工作中，已知其价格为 a，若想从商品的销量 x 来确定销售总收入 y，那么 x 是自变量，y 是因变量，其函数关系为

$$y=ax\text{；}$$

反过来，若想由商品销售总收入 y 来确定其销量 x，则又有

$$x=\frac{y}{a}.$$

我们称后一函数是前一函数的反函数，或者说它们互为反函数．

一般地，设 $y=f(x)$ 为给定的一个函数，如果对其值域 W 中的任一值 y，都可以通过关系 $y=f(x)$ 在其定义域 D 中确定一个 x 值与之对应，则可得到一个定义在 W 上的以 y 为自变量、x 为因变量的函数，这个函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y),$$

其定义域为 W，值域为 D．相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为原函数．

由定义可以证明，若函数 $y=f(x)$ 是单值单调的函数，那么就能保证其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也是单值单调的函数．这是因为，若 $y=f(x)$ 是单调函数，则任取其定义域 D 上两个不同的值 $x_1\neq x_2$ 时，必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$．所以在其值域 W 上任取一个数值 y_0 时，D 上不可能有两个不同的数值 x_1 及 x_2 使 $f(x_1)=f(x_2)=y_0$，但若 $y=f(x)$ 仅为单值函数，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 就不一定为单值的．例如，函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，在 $[0,+\infty)$ 上任取一值 y，只要 $y\neq 0$，则适合关系 $x^2=y$ 的数值 x 就有两个，即 $x=\sqrt{y}$ 或 $x=-\sqrt{y}$，所以 $y=x^2$ 的反函数是多值函数．又因为 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，所以，如果把 x 限制在 $[0,+\infty)$ 上，则 $y=x^2$ 的反函数是单值且单调增加函数 $x=\sqrt{y}$，它称为函数 $y=x^2$ 的反函数的一个单值分支．类似可知，另一个分支是 $x=-\sqrt{y}$．

要注意的是，$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 表示变量 x 和 y 之间的同一关系，因而它们的图形显然应是同一曲线．而函数的实质是对应关系，只要对应关系不变，自变量和因变量用什么字

母是无关紧要的．在 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 中，表示对应关系的符号 f^{-1} 没有改变，这就表示它们是同一函数．因此如果函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=f^{-1}(y)$，那么 $y=f^{-1}(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数，这时，$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关系也就相当于把 x 轴和 y 轴互换，或者说把 $x=f^{-1}(y)$ 的曲线以直线 $y=x$ 为对称轴翻转 $180°$，所得到的曲线就是 $y=f^{-1}(x)$ 的图形，它与曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $y=x$ 是对称的，见图 1-20．

四、基本初等函数

基本初等函数是指下列五类函数：

（1）幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 为常数）．

（2）指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq1$）．

（3）对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）．

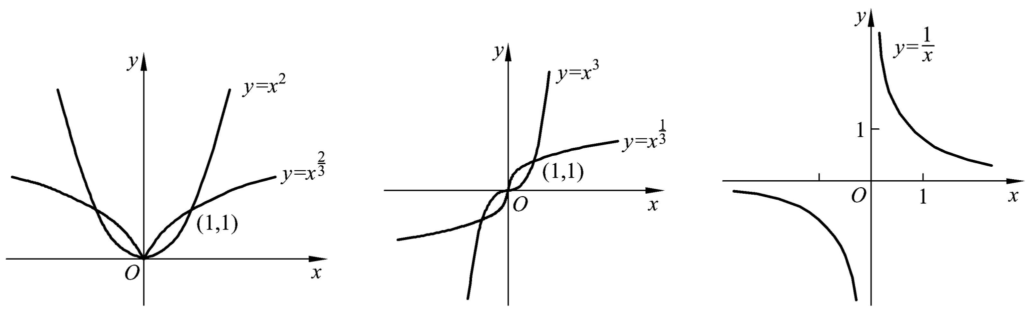
（4）三角函数：$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x,\ y=\sec x,\ y=\csc x$．

（5）反三角函数：$y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\arctan x,\ y=\operatorname{arc}\cot x$．

1．幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为常数）

幂函数的定义域要看 α 的取值而定．例如，当 $\alpha=2$ 时，$y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；而当 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 即 $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$；又当 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 时，$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 即 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$．但不论 α 取什么值，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 内总有意义．

常见幂函数 $y=x^2, y=x^{\frac{2}{3}}, y=x^3, y=\sqrt[3]{x}$ 及 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图形见图 1-21（1）、（2）、（3）．



（1）　（2）　（3）

图 1-21

2．指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq1$）

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，不论 a 取何值，总有 $a^0=1$，所以函数曲线总在 x 轴上方且经过点(0,1)．

当 $a>1$ 时，a^x 单调增加；当 $0<a<1$ 时，a^x 单调减少．

由 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$，所以 $y=a^x$ 的图形与 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的图形关于 y 轴对称，如图 1-22 所示．

在科技工作中，常用无理数 e＝2.7182818…为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$．

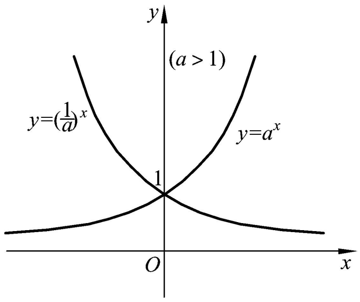


图 1-22

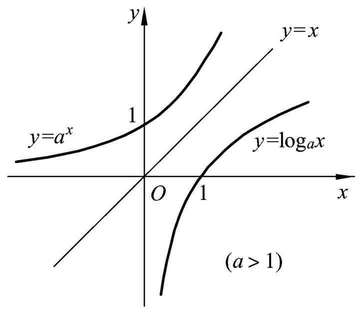


图 1-23

3．对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）

对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，其定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，所以 $y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴的右方且经过点(1, 0)．对数函数的图形可以从它所对应的指数函数的图形按反函数作图的一般规则作出，即关于直线 $y=x$ 作对称于曲线 $y=a^x$ 的图形就得函数 $y=\log_a x$ 的图形，如图 1-23 所示．

当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 单调减少．

在工程问题中常常使用以常数 e 为底的对数函数 $y=\log_{\mathrm{e}} x$，叫做自然对数函数，简记为 $y=\ln x$．

4．三角函数

常用的三角函数有 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$．

正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，均以 2π 为周期，值域都是闭区间$[-1,1]$．它们都是有界函数．正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数，见图 1-24 及图 1-25．

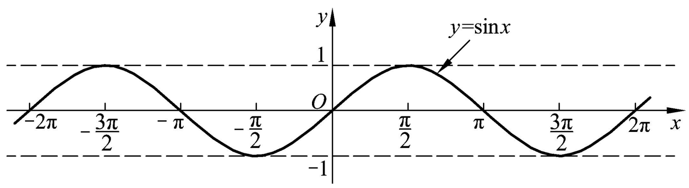


图 1-24

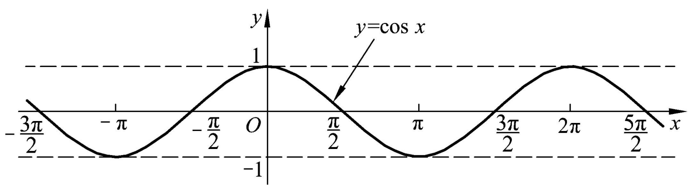


图 1-25

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，周期为 π 且为奇函数，见图 1-26.

余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq n\pi, n\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，周期为 π 且为奇函数，见图 1-27.

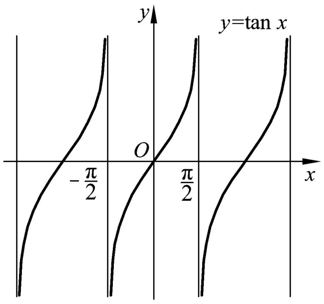


图 1-26

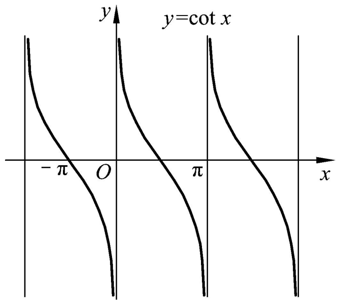


图 1-27

此外，正割函数 $y=\sec x$ 及余割函数 $y=\csc x$ 分别为余弦函数和正弦函数的倒函数，即

$$\sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \csc x=\frac{1}{\sin x},$$

所以它们都是以 2π 为周期的函数，并且在开区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内都是无界函数，总有 $\sec x\geqslant 1$ 及 $\csc x\geqslant 1$.

5. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数，常用的反三角函数有：

反正弦函数：$y=\arcsin x$；

反余弦函数：$y=\arccos x$；

反正切函数：$y=\arctan x$；

反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$.

以上函数的图形见图 1-28（1）、（2）、（3）、（4）. 反三角函数的图形分别与其对应的三角函数的图形对称于直线 $y=x$. 由于三角函数是周期函数，对于值域内的每个值 y，定义域总有无穷多个值 x 与之对应，所以反三角函数都是多值函数，我们可以取这些函数的一个单值分支，称为主值，记作：

$y=\arcsin x$, $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；

$y=\arccos x$, $y\in[0,\pi]$；

$y=\arctan x$, $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；

$y = \operatorname{arc}\cot x$, $y \in (0, \pi)$.

图 1-28 中的实线部分为各反三角函数主值的图形.

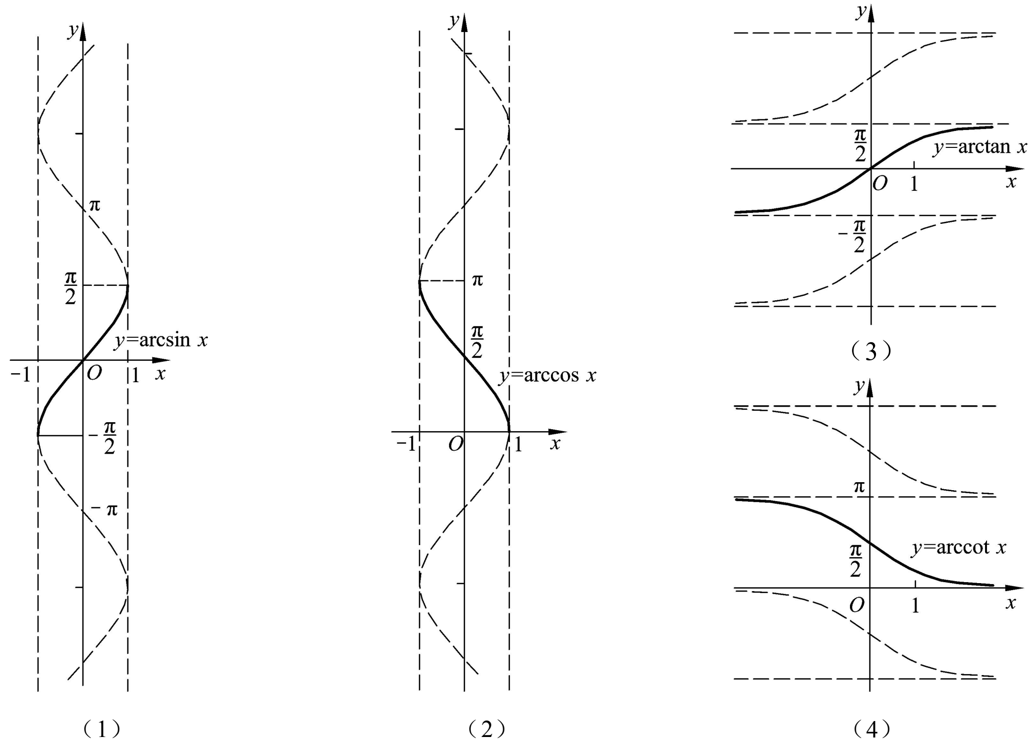


图 1-28

这样，单值函数 $y = \arcsin x$ 及 $y = \arccos x$ 的定义域都是闭区间[−1, 1]，值域分别是闭区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 及 $[0, \pi]$. 在[−1, 1]上， $y = \arcsin x$ 是单调增加的， $y = \arccos x$ 是单调减少的.

单值函数 $y = \arctan x$ 及 $y = \operatorname{arc}\cot x$ 的定义域都是区间 $(-\infty, +\infty)$ ，值域分别是开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 及 $(0, \pi)$. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内， $y = \arctan x$ 是单调增加的， $y = \operatorname{arc}\cot x$ 是单调减少的.

最后给出初等函数的定义：由以上五种基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次的函数复合而构成的可以用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如， $y = \sqrt{1 - x^2}$ ， $y = \sin^2 x$ ， $y = \sqrt{\cot \dfrac{x}{2}}$ 都是初等函数，而诸如

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ \sin x, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

这种分段函数往往不是初等函数.

第三节　数列的极限

极限思想是由于求某些实际问题的精确解答而产生的. 例如，我国古代数学家刘徽（公元 3 世纪）利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术（参看光盘演示），就是极限思想在几何学上的应用. 又如，春秋战国时期的哲学家庄子（公元 4 世纪）在《庄子·天下篇》一书中对“截丈问题”（参看光盘演示）有一段名言：“一尺之棰, 日截其半, 万世不竭”，其中也隐含了深刻的极限思想.

极限是研究变量的变化趋势的基本工具. 高等数学中许多基本概念，例如连续、导数、定积分、无穷级数等都是建立在极限基础上的. 极限方法又是研究函数的一种最基本方法. 本节首先给出数列极限的定义.

1. 数　列

以自然数作为下标编号并按顺序排列的一列实数

$$x_1，x_2，\cdots，x_n，\cdots \tag{1}$$

称为实数列，简称为数列或序列，记作 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或简写作 $\{x_n\}$. 称数列（1）中每个数为数列的项，第一项称为首项，x_n 称为通项，有时也用通项 x_n 表示数列 $\{x_n\}$.

若对每个 $n\in\mathbf{N}^+$ ($\mathbf{N}^+$ 为正整数集)，定义 $f(n)=x_n$，则数列（1）由函数 f 的函数值构成，因此也可以把数列看作集合 $\mathbf{N}^+$ 上的一个函数. 类似于函数的单调性与有界性，可以定义数列的单调性与有界性.

以下是几个常用的数列：

调和数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$： $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots\ (n\in\mathbf{N}^+)$；

等比数列 $\{ar^{n-1}\}$： $a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ \cdots\ (a\neq 0,\ n\in\mathbf{N}^+)$；

常数列 $\{c\}$： $c,\ c,\ c,\ \cdots,\ c,\ \cdots$；

摆动数列 $\{(-1)^{n-1}\}$： $1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots\ (n\in\mathbf{N}^+)$.

2. 数列的极限

对一些简单的数列，如 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 及 $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$，不难发现，当 n 无限增大（记作“ $n\to\infty$ ”）时，数列的通项 x_n 无限趋近于某个常数 a （如 $\dfrac{1}{n}$ 无限趋近于0, $\dfrac{n+1}{n}$ 无限趋近于1 ），此时称 x_n 的极限为 a. 然而对一些较为复杂的数列，如 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 及 $\{n^{\frac{1}{n}}\}$，便不易看出通项 x_n 是否无限趋近于某个常数 a. 解决这类问题首先要弄清 x_n 无限趋近于 a 的确切意义. 比如 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，随着 n 的增大，$\dfrac{1}{n}$ 越来越靠近实数 0，因为点 $\dfrac{1}{n}$ 与点 0 的距离越来越近，那么能否说数列 $\dfrac{1}{n}$ 无限趋近于 0 呢？又如 $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$，随着 n 的增大，$\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 在 $a=0$ 的两侧交替出现，那么能否说 $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

无限趋近于 0 呢？

为了回答这些问题，我们以数列：

$$2,\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots$$

为例进行分析．在这个数列中，

$$x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

我们知道，两个数 a 与 b 之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值 $|b-a|$ 来度量（在数轴上 $|b-a|$ 表示点 a 与点 b 之间的距离），$|b-a|$ 越小，a 与 b 就越接近．

就上述数列来说，因为

$$|x_n-1|=\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n},$$

由此可见，当 n 越来越大时，$\frac{1}{n}$ 就越来越小，从而 x_n 就越接近于 1，因为只要 n 足够大，$|x_n-1|$ 即 $\frac{1}{n}$ 可以小于任意给定的正数．所以说，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 1．

例如，给定 $\frac{1}{100}$，欲使 $\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$，只要 $n>100$，即从第 101 项起，都能使不等式

$$|x_n-1|<\frac{1}{100}$$

成立．

同样的，如果给定 $\frac{1}{10000}$，则从第 10001 项起，都能使不等式

$$|x_n-1|<\frac{1}{10000}$$

成立．

一般地，不论给定的正数 ε 多么小，总存在着一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

都成立．这就是数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 当 $n\to\infty$ 时无限接近于 1 这件事的实质．这样的一个数 1，叫做数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限．

一般地，有如下数列极限的定义．

定义　设 $\{x_n\}$ 是一数列，a 是一常数，若对任给正数 ε，总存在自然数 N，使得不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon \tag{2}$$

对所有大于 N 的 n 都成立，则说当 $n\to\infty$ 时，x_n 无限趋近于 a，或简称为 x_n 趋近于 a 或收敛于 a，称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a\ (n\to\infty).$$

这时我们称数列 $\{x_n\}$ 为收敛数列，否则称它为发散数列．

定义中要求不等式（2）对某个自然数 N 之后的所有 n 都成立，而对 N 之前的 x_n 如何则不作要求，因此改动 $\{x_n\}$ 的有限项不影响其收敛性及极限，或者说，两个数列若在某项后全相同，则它们的敛散性与极限也一样．一般来说，定义中的 N 与 ε 有关但并不唯一，只要找到一个便可以了．

下面给出“数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a”的一个几何解释：将常数 a 及数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 在数轴上用它们的对应点表示出来，再在数轴上作点 a 的 ε 邻域即开间区 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$（如图 1-29）．因不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 与不等式 $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ 等价，于是，数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的几何描述为：

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 等价于：对任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，x_n 便全部落入开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 中，而只有有限个（至多只有 N 个）在这开区间之外．

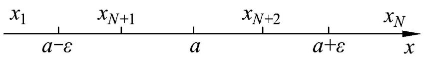


图 1-29

下面举例介绍由定义来考察数列的极限．

例 1　证明常数列 $\{C\}$ 以 C 为极限．

证明　令 $x_n = C\ (n\in\mathbf{N})$，任给 $\varepsilon > 0$，可取 $N=1$，当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$$

恒成立．所以

$$\lim_{n\to\infty} C = C.$$

例 2　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$．

证明　任给 $\varepsilon > 0$，欲使不等式

$$|x_n - a| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

即不等式

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

在某个 N 之后恒成立，只需取 N 为大于 $\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的自然数即可．例如，取 $N = 1 + \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$（$\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 为 $\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的整数部分），则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n - a| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

故由定义知
$$\frac{n+1}{n}\to 1\ (n\to\infty).$$

例 3　设$|q|<1$，证明等比数列 1, q, q^2, $\cdots$, q^{n-1}, $\cdots$的极限是零.

证明　任意给定$\varepsilon>0$，因为
$$|x_n-a|=|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1},$$
要使
$$|x_n-a|<\varepsilon,$$
只要
$$|q|^{n-1}<\varepsilon.$$
取自然对数得
$$(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon.$$
因为$|q|<1$，则$\ln|q|<0$，故$n>1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$. 取$N=\left[1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当$n>N$时，就有
$$|q^{n-1}-0|<\varepsilon,$$
即
$$\lim_{n\to\infty}q^{n-1}=0.$$

第四节　函数的极限

数列可看作自变量为正整数n的函数：$x_n=f(n)$，数列$\{x_n\}$的极限为a，即：当自变量n取正整数且无限增大（$n\to\infty$）时，对应的函数值$f(n)$无限接近于数a. 若将数列极限概念中自变量n和函数值$f(n)$的特殊性撇开，可以由此引出函数极限的一般概念：在自变量x的某个变化过程中，如果对应的函数值$f(x)$无限接近于某个确定的数A，则称A为x在该变化过程中函数$f(x)$的极限. 显然，极限A是与自变量x的变化过程紧密相关，自变量的变化过程不同，函数的极限就有不同的表现形式. 本节分下列两种情况来讨论：

（1）自变量趋于无穷大时函数的极限；

（2）自变量趋于有限值时函数的极限.

一、函数极限的描述性定义

1. $x\to\infty$时函数的极限

如果在$x\to\infty$的过程中，对应的函数值$f(x)$无限接近于确定的数值A，那么A叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限. 精确地说，就是：

定义 1　设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义，如果存在常数A，对于任意给定的正数ε（不论它多么小），总存在着正数X，使得当x满足不等式$|x|>X$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式
$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$
那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A\ (当\ x\to\infty\ ).$$

如果 $x>0$ 且无限增大（记作 $x\to+\infty$），那么只要把上面定义中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$，就可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的定义．同样，如果 $x<0$ 而 $|x|$ 无限增大（记作 $x\to-\infty$），那么只要把 $|x|>X$ 改为 $x<-X$，便得 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义．

从几何上来说，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的意义是：作直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$，则总有一个正数 X 存在，使得当 $x<-X$ 或 $x>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图形位于这两直线之间（见图 1-30）．

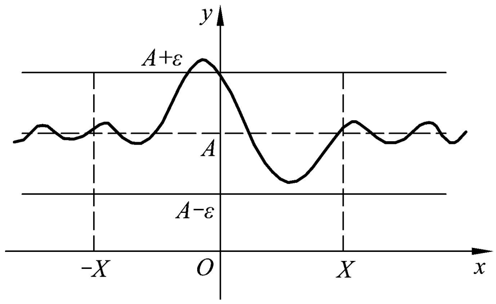


图 1-30

根据定义不难得到

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A\ .$$

例 1　证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$．

证明　对任意给定的正数 ε，欲使不等式

$$\left|\frac{1}{x^2}-0\right|=\frac{1}{x^2}<\varepsilon$$

成立，相当于

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}<x$$

成立，故只要取 $X=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，则当 $x>X$ 时，

$$\left|\frac{1}{x^2}-0\right|<\varepsilon\ ,$$

亦即

$$\frac{1}{x^2}\to 0\ (\ x\to+\infty\ ).$$

2．$x\to x_0$ 时函数的极限

先看下面的例子：

讨论当 $x\to 1$ 时，函数 $y=2+(x-1)^2$ 的变化趋势.

先根据函数 $y=2+(x-1)^2$ 列表(表 1-1)，并作图（图 1-31），来看当 $x\to 1$ 时，y 的变化趋势.

表 1-1

x	0.5	1.5	0.9	1.1	0.99	1.01	…
$2+(x-1)^2$	2.25		2.01		2.0001		…

结合图、表可以看出：当自变量 $x\to 1$ 时，函数 $2+(x-1)^2$ 趋向于 2；x 越接近于 1，y 就越接近于 2，当 x 无限接近于 1 时，y 就无限接近于 2．即：当 $x\to 1$ 时，$y=2+(x-1)^2\to 2$.

由上例，对当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限可定义如下：

定义 2　当自变量 x 无限接近于 x_0 时（x 可以不等于 x_0），函数 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或\quad 当\ x\to x_0\ 时，\ f(x)\to A .$$

在上面的定义中，我们假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内是有定义的，并且我们考虑的是当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的变化趋势，因此不在乎 $f(x)$ 在 x_0 是否有定义．于是，当 $x\to 1$ 时，函数 $y=2+(x-1)^2$ 的极限是 2，可记为

$$\lim_{x\to 1}[2+(x-1)^2]=2 .$$

例 2　在单位圆上考察 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$ 的值.

解　作单位圆，并取$\angle AOB=x$ 弧度（如图 1-32），则

$$\sin x＝BA，\quad \cos x=OB .$$

当 $x\to 0$ 时，BA 无限接近于 0，OB 无限接近于 1，所以

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0，\quad \lim_{x\to 0}\cos x=1 .$$

二、函数极限的定义

在上面，对于函数极限，我们用了如下一些描述性的语言：“x 趋于 a”，“$f(x)$ 趋于某个数 A”等，这些说法确实有助于直观地理解极限的含义，但作为定义是不精确的.

下面给出极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的精确定义.

定义 3　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon ,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A\,(\text{当 } x \to x_0).$$

我们指出，定义中 $0 < |x - x_0|$ 表示 $x \neq x_0$，所以 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 有没有极限，与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义并无关系.

函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限为 A 的几何解释如下：任意给定一正数 ε，作平行于 x 轴的两条直线

$$y = A + \varepsilon \quad \text{和} \quad y = A - \varepsilon,$$

介于这两条直线之间是一带形区域，根据定义，对于给定的 ε，存在点 x_0 的一个 δ 邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，当 $y = f(x)$ 的图形上的点的横坐标 x 在邻域($x_0 - \delta, x_0 + \delta$)内，但 $x \neq x_0$ 时，这些点的纵坐标 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

或
$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

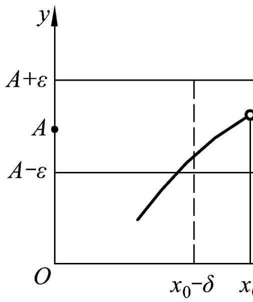


图 1-3

亦即这些点落在上面所做的带形区域内（图 1-33）.

例 3　利用定义证明 $\lim\limits_{x \to 2}(3x + 9) = 15$.

证明　设 $f(x) = 3x + 9$，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，要使

$$|f(x) - 15| = |(3x + 9) - 15| = 3|x - 2| < \varepsilon,$$

只要取
$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

就可以了．因此，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$，当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时

$$|f(x) - 15| < \varepsilon$$

恒成立，所以
$$\lim_{x \to 2}(3x + 9) = 15 .$$

例 4　利用定义证明 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

证明　对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，要使

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

只要
$$|x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon .$$

取 $\delta = \varepsilon$，则当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时，就有

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

即
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 .$$

例 5 利用定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

证明 设 $f(x)=x$，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-x_0| = |x-x_0| < \varepsilon,$$

只要取 $\delta=\varepsilon$ 就可以了．因此，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|f(x)-x_0|<\varepsilon$$

恒成立，所以
$$\lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

例 6 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ 1, & x>0, \end{cases}$ 研究 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, 故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在．

1．单侧极限

前面讲了 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限，在那里 x 是以任意方式趋近于 x_0 的．但是，有时我们还需要知道 x 仅从 x_0 的左侧（$x<x_0$）或仅从 x_0 的右侧（$x>x_0$）趋于 x_0 时，$f(x)$ 的变化趋势．因此，需要引进左极限与右极限的概念．

定义 4 如果当 x 从 x_0 的左侧（$x<x_0$）趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限，即对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 δ，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称 A 为 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限．记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^-) = A.$$

如果当 x 从 x_0 的右侧（$x>x_0$）趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限，即对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 δ，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称 A 为 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限．记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^+) = A.$$

左极限和右极限统称为单侧极限．根据左、右极限的定义，显然可得下列定理．

定理 1 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 存在的充分必要条件是：

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

例 7 讨论极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 是否存在？

解　记 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，因 $x>0$ 时 $f(x)\equiv 1$，故

$$f(0^+)=1;$$

而当 $x<0$ 时 $f(x)\equiv -1$，故

$$f(0^-)=-1.$$

因此 $f(0^+)\neq f(0^-)$，故由定理 1 知所讨论的极限不存在．

例 8　证明：当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 的极限不存在．

证明　仿例 7 可证当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的左极限是

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$

而右极限是

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1.$$

因为左、右极限不相等，所以当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在．

2．极限的性质

这一节主要讨论极限的性质．首先讨论收敛数列的性质．

定理 2（极限的唯一性）　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一．

证明　用反证法．假设同时有 $x_n\to a$ 及 $x_n\to b$ 且 $a<b$，取 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$．因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，故存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\frac{b-a}{2} \qquad (1)$$

成立；同理，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，故存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，不等式

$$|x_n-b|<\frac{b-a}{2} \qquad (2)$$

成立．取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，（1）式及（2）式同时成立．但由（1）式有 $x_n<\dfrac{a+b}{2}$，由（2）式有 $x_n>\dfrac{a+b}{2}$，这是不可能的，所以定理 2 成立．

一个收敛数列一般含有无穷多个数，而它的极限只是一个数，我们单凭这一个数就能精确地估计出几乎全体项的大小．收敛数列的下面这些性质大都基于这一事实．

定理 3（收敛数列的有界性）　若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 为有界数列，即存在正数 M，使得对一切正整数 n 有

$$|a_n|\leqslant M.$$

证明　设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，取 $\varepsilon=1$，存在正整数 N，对一切 $n>N$ 有

$$|a_n - a| < 1,$$

即
$$a-1 < a_n < a+1.$$

记 $M = \max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a-1|,|a+1|\}$，则对一切正整数 n 都有

$$|a_n| \leqslant M.$$

注意　有界性只是数列收敛的必要条件而非充分条件．例如，数列 $\{(-1)^n\}$ 有界，但它并不收敛．

定理 4（收敛数列的保号性）　如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）．

证明　仅就 $a>0$ 的情形证明．由数列极限的定义，对 $\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0$，存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n - a| < \frac{a}{2}.$$

从而
$$x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

推论　如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geqslant 0$（或 $x_n \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，那么 $a \geqslant 0$（或 $a \leqslant 0$）．

证明　设数列 $\{x_n\}$ 从第 N_1 项起，即当 $n>N_1$ 时有 $x_n \geqslant 0$．现在用反证法证明．若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a < 0$，则由定理 4 知，存在正整数 $N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，有 $x_n<0$．取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，按假定有 $x_n \geqslant 0$，按定理 4 有 $x_n<0$，矛盾，所以必有 $a \geqslant 0$．

数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \leqslant 0$ 的情形，可以类似地证明．

与收敛数列的性质相比较，可得函数极限的一些相应的性质．它们都可以根据函数极限的定义，运用类似于证明收敛数列性质的方法加以证明．由于函数极限的定义按自变量的变化过程不同有各种形式，下面仅以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 这种形式为代表给出关于函数极限性质的一些定理．至于其他形式的极限的性质，只要相应地做一些修改即可得出．

定理 5（函数极限的唯一性）　若极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，则极限值唯一．

定理 6（函数极限的局部有界性）　若极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)| \leqslant M.$$

定理 7（函数极限的局部保号性）　若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > 0$（或 <0），则存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$f(x) > 0 \text{（或 } f(x) < 0\text{）}.$$

推论　若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，而且 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）．

第五节　极限的运算法则

本节要建立极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则. 在下面的讨论中，记号“ lim ”下面没有表明自变量的变化过程，是指对 $x \to x_0$ 和 $x \to \infty$ 以及单侧极限均成立. 但在论证时，只证明了 $x \to x_0$ 的情形.

定理 1　在某一变化过程中，如果变量 x 与变量 y 分别以 A 与 B 为极限，则变量 $x \pm y$ 以 $A \pm B$ 为极限，即有

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y .$$

证明　因为 $\lim x = A$ ， $\lim y = B$ ，所以，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总有那么一个时刻，在那个时刻以后，恒有

$$| x - A | < \frac{\varepsilon}{2} ;$$

也总有那么一个时刻，在那个时刻以后，恒有

$$| y - B | < \frac{\varepsilon}{2} .$$

显然，在上述两个时刻中较晚的那个时刻以后，上面的两个不等式都成立. 因此，在那个较晚的时刻以后，恒有

$$| (x \pm y) - (A \pm B) | \leqslant | x - A | + | y - B | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

这就证明了 $x \pm y$ 以 $A \pm B$ 为极限，即有

$$\lim(x \pm y) = A \pm B = \lim x \pm \lim y .$$

定理 2　在某个变化过程中，如果变量 x 与变量 y 分别以 A 与 B 为极限，则变量 xy 以 AB 为极限，即有

$$\lim xy = \lim x \cdot \lim y .$$

（证明从略）.

推论 1　常数因子可以提到极限符号外面，即

$$\lim Cy = C \lim y .$$

推论 2　如果 n 是正整数，则

$$\lim x^n = (\lim x)^n \quad 且 \quad \lim x^{\frac{1}{n}} = (\lim x)^{\frac{1}{n}} .$$

定理 3　在某一变化过程中，如果变量 x 与变量 y 分别以 A 与 B 为极限，且 $B \neq 0$ ，则变量 $\frac{x}{y}$ 以 $\frac{A}{B}$ 为极限，即有

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y} \quad (\lim y \neq 0) .$$

（证明从略）.

利用极限四则运算规则可简化极限计算.

例 1　计算以下极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2+2n+3}$；　　（2） $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+1)$；　　（3） $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-1}{x^2-1}$.

解　（1） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2+2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)}$

$$= \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = 2 .$$

（2） $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+1) = \lim\limits_{x\to 2}3x^2 - \lim\limits_{x\to 2}2x + \lim\limits_{x\to 2}1 = 3\lim\limits_{x\to 2}x^2 - 2\lim\limits_{x\to 2}x + 1$

$$= 3(\lim_{x\to 2}x)^2 - 4 + 1 = 12 - 4 + 1 = 9 .$$

（3）因为 $x\to 1$ 时，分母 $x^2-1\to 0$，故不能直接应用商规则．注意到 $x\to 1$ 时 $x\neq 1$，故可以先约去分子与分母中的非零因子 $x-1$，再使用商规则求极限：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)} = \frac{3}{2} .$$

为了表明以上每步所使用的规则，上述步骤写得比较详细，一旦熟练后便可省略一些简单的步骤.

例 2　计算以下极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$；　　（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$；

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^3-2x+1}{2x^3+x+1}$；　　（4） $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解（1）原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

（2）原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1$.

（3）不可直接应用商规则，因为当 $x\to+\infty$ 时分子分母的极限均不存在，可先用 x^3 分别除分式的分子和分母，再用商规则求极限：

$$原式 = \lim_{x\to+\infty}\frac{7-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)} = \frac{7}{2} .$$

（4）不可直接应用和规则，因 $x\to1$ 时 $\dfrac{1}{1-x}$ 及 $\dfrac{3}{1-x^3}$ 的极限均不存在，应当先合并，化简后再求极限：

$$原式=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1.$$

例 3　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$（$n$ 为自然数）.

解　记 $f(x)=\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$，其中所含根式不易处理，可作代换 $t=\sqrt[n]{1+x}$，即 $x=t^n-1$，再进行化简（此时 $x\to0$ 对应于 $t\to1$）.

$$原式=\lim_{t\to1}\frac{t-1}{t^n-1}=\lim_{t\to1}\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}=\frac{1}{n}.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x-1}-1}\right)$.

解　作代换 $t=\dfrac{1}{x-1}$，则 $x\to1^+$ 对应于 $t\to+\infty$，故有

$$原式=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1})=\lim_{t\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}=0.$$

例 5　已知 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ \dfrac{x^2+3x-1}{x^3+1}, & x\geqslant0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

解　因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x-1)=-1,\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+3x-1}{x^3+1}=-1,$$

所以

$$\lim_{x\to0}f(x)=-1.$$

同理

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-1}{x^3+1}=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty.$$

第六节　极限存在准则　两个重要极限

一、判别极限存在的两个准则

依据数列极限定义只能检验常数 a 是否为数列 x_n 的极限，但若 a 预先不知道，或不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 较复杂而解不出 n，则不易判断数列的收敛性，为此介绍下面两个判别数列收敛性的准则，称为数列极限存在准则.

准则Ⅰ（夹逼准则）如果数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$及$\{x_n\}$满足下列条件：

（1）$a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$，

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

证明　因$a_n \to l, b_n \to l$，所以根据数列极限的定义，对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数N_1，当$n>N_1$时，有

$$|a_n - l| < \varepsilon;$$

又存在正整数N_2，当$n>N_2$时，有

$$|b_n - l| < \varepsilon.$$

现在取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$时，有

$$|a_n - l| < \varepsilon，\ |b_n - l| < \varepsilon$$

同时成立，即

$$l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon，\ l-\varepsilon < b_n < l+\varepsilon$$

同时成立．又因x_n介于a_n和b_n之间，所以当$n>N$时，有

$$l-\varepsilon < a_n \leqslant x_n \leqslant b_n < l+\varepsilon,$$

即

$$|x_n - l| < \varepsilon$$

成立，这就证明了

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

例 1　证明$x_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$收敛，并求其极限.

证明　将分母进行放大及缩小得

$$\frac{n^2}{n^2+n} = \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} < x_n < \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

由于$n\to\infty$时，

$$\frac{n^2}{n^2+n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1,\quad \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to 1,$$

故由夹逼准则得$\{x_n\}$收敛且极限为 1.

例 2　利用$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=3$.

证明　由不等式

$$3 = \sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{2^n+3^n} < \sqrt[n]{3^n+3^n} = 3\sqrt[n]{2}$$

及
$$3\sqrt[n]{2} \to 3\ (n \to \infty),$$

由夹逼准则得
$$\sqrt[n]{2^n+3^n} \to 3\,(n \to \infty).$$

准则 II（单调有界收敛准则）有界的单调数列必有极限.

此准则的证明超出大纲要求，在此略去．在应用中要注意有界性、单调性缺一不可.

例 3　设 $a_n = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}(n=1,2,\cdots)$，其中实数 $\alpha \geqslant 2$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明　显然，$\{a_n\}$ 是递增的，下证 $\{a_n\}$ 有上界．事实上
$$\begin{aligned} a_n &\leqslant 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leqslant 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= 2-\frac{1}{n} < 2 \quad (n=1,2,\cdots). \end{aligned}$$
于是由单调有界定理，$\{a_n\}$ 收敛.

准则 I 亦可推广到函数极限，它可以用来计算一些重要的函数极限.

函数的夹逼准则　设在 x_0 的某去心邻域上有 $g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_2(x) = l$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

夹逼准则是就 $x \to x_0$ 叙述的，同样，此准则亦适用于 x 的其他变化过程.

二、两个重要极限

在极限运算中，常常用到下面两个重要极限.

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

证明　首先注意到，函数 $\frac{\sin x}{x}$ 对于一切 $x \neq 0$ 都有定义.

在图 1-34 所示的单位圆中，设圆心角 $\angle AOB = x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，点 A 处的切线与 OB 的延长线相交于 D，又 $BC \perp OA$，则
$$\sin x = CB,\quad x=\overset{\frown}{AB},\quad \tan x = AD.$$
因为

$\triangle AOB$ 的面积 < 圆扇形 AOB 的面积 < $\triangle AOD$ 的面积，

所以
$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

即
$$\sin x < x < \tan x\,.$$
不等号各边都除以 $\sin x$，就有
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}\,,$$
或
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$
因为当 x 用 $-x$ 代替时，$\cos x$ 与 $\frac{\sin x}{x}$ 都不变，所以上面的不等式对于开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 内的一切 x 也是成立的.

为了应用夹逼准则，下面来证 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

事实上，当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时，
$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}\,,$$
即
$$0 < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}\,.$$
当 $x\to 0$ 时，$\frac{x^2}{2}\to 0$，由夹逼准则有
$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0\,,$$
所以
$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1\,.$$
由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$，$\lim\limits_{x\to 0}1 = 1$，由夹逼准则，即得
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

例 4　求以下极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$；　（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$；　（5）$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x}$；　（6）$\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x-1}{x^2\sin\frac{2}{x}}$.

解　（1）原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}}{\cos x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = \dfrac{1}{1} = 1$.

（2）原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \overset{t=\frac{x}{2}}{=\!=} \dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.

（3）原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{3x}\cdot\dfrac{4x}{\sin4x}\cdot\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{4}\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{4x}}=\dfrac{3}{4}$.

（4）原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}$

$$=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot1=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

（5）令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ ，则 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时， $t\to0$ ．则

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi-2t)}{\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin2t}{\sin t}=2\cdot\lim_{t\to0}\frac{\sin2t}{2t}\cdot\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=2.$$

（6）原式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{\frac{2}{x}}{\sin\frac{2}{x}}\right]\xlongequal{令t=\frac{1}{x}}\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to0}\left[(2-t)\dfrac{2t}{\sin2t}\right]=1$.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

证明 设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ，我们来证数列 $\{x_n\}$ 单调增加并且有界．按牛顿二项公式，有

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

类似地，

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+$$
$$\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$
$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

比较 x_n，x_{n+1} 的展开式，可以看到除前面两项外，x_n 的每一项都小于 x_{n+1} 的对应项，并且 x_{n+1} 还多了最后一项，其值大于 0，因此

$$x_n<x_{n+1}.$$

这就说明数列$\{x_n\}$是单调增加的.

这个数列同时还是有界的．因为$0<1-\dfrac{n-1}{n}\leqslant 1$，如果$x_n$的展开式中各项括号内的数用较大的数 1 代替，得

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$=1+\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

这就说明数列$\{x_n\}$是有界的，根据极限存在准则 II，这个数列$\{x_n\}$的极限存在.

通常用拉丁字母 e 表示该数列的极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\,.$$

它是一个无理数，取其前 13 位数字是$\mathrm{e}\approx 2.718281828459$.

以 e 为底的对数称为自然对数，通常记

$$\ln x=\log_{\mathrm{e}} x\,.$$

可以证明，当x取实数而趋于$+\infty$或$-\infty$时，函数$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$的极限都存在且都等于 e，因此

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\,.$$

例 5　计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+2}$；　（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$；　（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^{x}$；　（6）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\csc^2 x}$.

解（1）原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\times 2}\xlongequal{t=2x}\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^2\xlongequal{u=\frac{1}{t}}\left[\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u\right]^2=\mathrm{e}^2$.

（2）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$.

（3）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{x+2-2}\xlongequal{t=x+2}\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{-2}\right]=\mathrm{e}$.

（4）原式$=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)^2=\mathrm{e}^2$.

（5）原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+2}\right)^{x}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{2}-1}\right)^{2}$

$$\xlongequal{t=\frac{x+2}{2}}\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t-1}\right)^{2}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}\right)^{2}=\mathrm{e}^{2}.$$

（6）原式 $=\lim\limits_{x\to0}(1+\cos^{2}x-1)^{\frac{-1}{\cos^{2}x-1}}\xlongequal{t=\cos^{2}x-1}\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\mathrm{e}^{-1}$.