丛书编写委员会

总　序

特色专业是指充分体现学校办学定位，在教育目标、师资队伍、课程体系、教学条件和培养质量等方面，具有较高的办学水平和鲜明的办学特色，并获得社会认同，具有较高社会声誉的专业。特色专业是经过长期建设形成的，是学校办学优势和办学特色的集中体现。2010 年 7 月，楚雄师范学院物理学（师范类）专业被批准为第六批国家特色专业建设点。这套教材就是楚雄师范学院物理与电子科学学院在建设国家特色物理学（师范类）专业过程中的部分成果展示。

在特色专业建设中，我们根据目前中学物理新课标及中学物理教学改革的趋势，构建了课程体系和新的教学内容，并整合了课程内容，突出了专业基本知识、基本技能以及教师职业核心能力的培养。通过实施“5+5”课程改革计划，即“力学、热学、电磁学、光学、原子物理等 5 门基础知识课程+5 个相应中学物理课程学习”，突出了专业基本知识的学习，熟悉了中学物理课程体系。在学生实践能力培养上，我们搭建了六个实践平台，即实验教学“8+2”模式平台、设计性实验平台、开放实验室平台、学科竞赛（如大学生电子设计大赛、物理教学技能大赛）平台、学生社团活动、大学生科研项目及参与学生教师科研项目平台，为培养学生的创新精神、实践能力打下了坚实的基础。本套教材是根据学生实际，从实验课程的构架情况以及对学生的要求出发，以够用、适用为准则，以培养应用型人才为导向编写的，希望通过指导学生的学习能使学生更好地掌握相关物理学内容。我们在编写过程中，得到了学校各级领导和同事的大力支持，同时也借鉴了一些国内同行的先进经验，在此一并表示衷心地感谢。

由于时间和水平有限，书中难免存在疏漏之处，恳请广大师生提出宝贵意见，以利于改进。

丛书编写委员会

二〇一四年三月

前　言

本书是由编者在楚雄师范专科学校和楚雄师范学院从事力学教学时的讲义改编而成。相对于其他教材来说，本书特别注意了学生的接受水平，在文字叙述方面力求通俗易懂，便于自学。我们深信，对于学习基础稍差的同学，只要认真阅读这本教学参考书，并在教师的帮助下，也能掌握力学的基础知识。由于课时限制，本书只讲述了普通物理力学最基本的内容。对于学有余力的同学，可以在学习中再参考其他力学教材。

本书在修订过程中，曾参考了其他力学教材中的一些好的教学方法，楚雄师范学院的同学和任课教师也提出了许多好的建议，在此深表感谢。

由于编者水平有限，错误在所难免，欢迎使用本书的老师和同学们批评指正。

编　者

2014 年 2 月

目　录

第一章　质点运动学

第一节　导数与微分

为了更好地描述质点的运动以及其他章节的内容，我们首先补充一些数学知识，即导数与微分。

一、函数　复合函数

在中学，我们已经学习过函数的概念。设有相互联系的两个变量 x 和 y，如果 x 在其变化范围 D 内任意取定一数值，y 都有确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，记为

$$y = f(x) \quad 或 \quad y = y(x)$$

D 称为函数 $f(x)$ 的定义域。

例如，$y = \frac{1}{2}gt^2$（g 是常数，t 表示时间变量）就可以表示成：

$$y = y(t)$$

的形式，它说明 y 是 t 的函数。

假若 y 是 z 的函数，即 $y = y(z)$；而 z 又是 x 的函数，即 $z = z(x)$，则 y 为 x 的复合函数，其中 z 称为中间变量，记为

$$y = y[z(x)]$$

例如，$y = 3z$，$z = \frac{1}{2}x^2$，则 y 为 x 的复合函数。

二、导　数

设函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有增量 Δx，与此相对应，函数 y 也有一增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

这一比值叫做函数 $y = f(x)$ 在 x_0 与 $x_0 + \Delta x$ 之间的平均变化率。

Δx 发生变化时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 也相应地发生变化。现在我们让 Δx 越变越小，逐渐趋于零，如果此时 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在极限，则称 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导，并把该极限称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记

作 $f'(x_0)$，也可写作 $y'|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$。

上式中的 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 可以看成一个数学符号，就是求导数的意思。对 y 求导数写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，对 z 求导数则写成 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。也就是说，

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=y'|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

可以看出，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数，就是函数在 x_0 附近的平均变化率当自变量增量趋于零时的极限，它反映了在点 $x=x_0$ 处函数 $f(x)$ 随自变量 x 而变化的增减趋势以及变化的快慢程度。

上面讲的仅是函数在 $x=x_0$ 这一点的导数，其实这样的点在某一区间都可能存在。若函数在某一区间内各点均可导，则在该区间每一点都有函数的导数与之对应，于是导数就成了自变量的函数，我们称之为导函数，记作 $f'(x)$，y' 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。这样一来，我们可以写出以下式子：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{1.1.1}$$

导函数常常简称为导数。此时读者应注意不要将导函数与导数值相混淆。$f'(x)$ 是导函数，而 $f'(x_0)$ 是导数值。

下面我们看一看导数的几何意义。如图 1.1.1 所示，曲线表示函数 $y=f(x)$ 的图像，PD 是任意一条割线，它所对应的自变量 x 的变化区间为 $[x_0, x_0+\Delta x]$，在此区间内函数的平均变化率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。在图中可以看出，$\tan\theta'=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。也就是说，函数的平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 在数值上等于相对应的割线的斜率。当 Δx 趋于零时，割线 PD 就趋于切线 PD'，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan\theta=K \text{（切线斜率）}$$

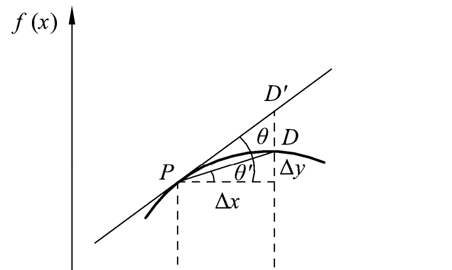

图 1.1.1

前面我们已经定义 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，这说明函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数就等于该点处曲线 $f(x)$ 的斜率。这就是导数的几何意义。

从图 1.1.1 还可以看出，在曲线的顶部最高点，其切线与 x 轴平行，$\theta=0$，$\tan\theta=0$，因而该点的导数值也为零。如果曲线是凹形的，则曲线的最低点的切线也与 x 轴平行，同样可知该点的导数值也为零。这样就给我们提供了一种判断函数 $f(x)$ 极值的方法：只要函数 $f(x)$ 在某点的导数值为零，函数 $f(x)$ 在该点就具有极大值或极小值。

三、导数的计算

导数的计算公式有十几个，这里为了力学教学需要仅介绍四个。其他公式同学们将在高等数学课中学习。

（1）$C'=0$（C 为常数）。（1.1.2）

（2）$(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为常数）。（1.1.3）

（3）$(\sin x)'=\cos x$。（1.1.4）

（4）$(\cos x)'=-\sin x$。（1.1.5）

例 1 已知函数 $y=x^3$，求 $x=2$ 时 y 的导数值。

解 $y'=3x^2$，故 $y'|_{x=2}=3\times2^2=12$。

例 2 求曲线 $y=\sin x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时的切线斜率。

解 因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

则该曲线在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时切线的斜率为零。

下面再介绍两条导数的基本运算法则。设 u, v 均为 x 的函数，则有：

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$。（1.1.6）

（2）$(uv)'=\mathrm{u}'v\pm uv'$；（1.1.7）

$(Cu)'=Cu'$（C 为常数）。（1.1.8）

其他基本运算法则，同学们会在高等数学课程中学到，此处从略。

有了导数这两条基本运算法则，再加上对复合函数的求导法则，我们就可以计算某些符合函数的导数。复合函数的求导法则是：

若 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

例 3 已知 $y=x^2\pm a^2$（a 为常数），求 y'。

解 $y'=2x\pm0=2x$。

例 4 已知 $y=\dfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}$，求 y'。

解 $y'=\dfrac{1}{3}(x^{\frac{2}{3}})'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot x^{(\frac{2}{3}-1)}=\dfrac{2}{9}x^{-\frac{1}{3}}$。

例 5 已知 $y=\sin x\cdot\cos x$，求 y'。

解 $y'=(\sin x)'\cdot\cos x+\sin x\cdot(\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$。

例 6　已知 $y = 3\cos\theta$，$\theta = 5t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$。

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -3\sin\theta\cdot 5 = -15\sin\theta = -15\sin 5t$。

四、微　分

1. 自变量的微分

自变量的微分就是自变量的任意一个无限小的增量 Δx。我们用 $\mathrm{d}x$ 表示自变量 x 的微分，则 $\mathrm{d}x = \Delta x$。

2. 函数的微分

一个函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 乘以自变量的微分 $\mathrm{d}x$，称为此函数的微分，用 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$ 表示，即

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x = y'\mathrm{d}x \tag{1.1.9}$$

在前面我们曾把导数写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的形式，当时是把它作为一个整体引入的，虽然它表面上具有分数的形式，但在运算时我们并未像分数一样把它拆成“分子”和“分母”两部分。在引入微分的概念之后，我们可以看出，导数是微分 $\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}x$ 之商，即 $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以导数也叫做微商。这样一来导数就可以看成一个分数，分子和分母分别是函数的微分与自变量的微分。

例 7　已知 $y = \cos x$，求 $\mathrm{d}y$。

解　$\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x = -\sin x\mathrm{d}x$。

例 8　已知 $y = 5x$，求 $\mathrm{d}y$。

解　$\mathrm{d}y = 5\mathrm{d}x$。

例 9　已知 $y = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\cdot\sin x$，求 $\mathrm{d}y$。

解　$y' = \dfrac{2}{3}(x^{\frac{2}{3}})'\cdot\sin x + \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\cdot\cos x = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\sin x + \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\cdot\cos x$

$= \dfrac{4}{9}x^{-\frac{1}{3}}\sin x + \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\cos x$。

$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \left(\dfrac{4}{9}x^{-\frac{1}{3}}\sin x + \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\cos x\right)\mathrm{d}x$。

例 10　某竖直上抛质点的运动规律为 $y = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$（$y$ 轴以地面为坐标原点，竖直向上为坐标轴正向），求质点能到达的最大高度。

解
$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 - \frac{1}{2}g\cdot 2t = v_0 - gt$$

令 $y' = v_0 - gt = 0$，可得 $t = \frac{v_0}{g}$，即当 $t = \frac{v_0}{g}$ 时，y 有极值，且由题意可知是极大值。所以将 $t = \frac{v_0}{g}$ 代入 y 的表达式，可得

$$y_{\max} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

这就是质点能到达的最大高度。

第二节　矢　量

一、矢量和标量

矢量——在空间有一定方向和数值，并遵守平行四边形的加法法则的量。

标量——只用数值就能完全确定的量。

例如，长度、质量、时间、密度、能量、温度等物理量是标量，而力、速度、位移、加速度、电场强度等则为矢量。

二、矢量的平行四边形法则

在中学我们已经学过力的平行四边形法则，实际上，所有的矢量都遵守这一法则。如图 1.2.1 所示，$\vec{a}, \vec{b}$ 两矢量相加，其矢量和为 $\vec{c}$，$\vec{c}$ 的大小和方向可由图中带箭头的对角线表示。

上述加法常常可以简化为三角形法则来做，如图 1.2.2 所示。

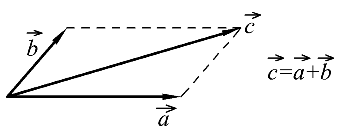

图 1.2.1

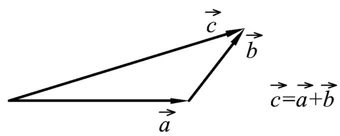

图 1.2.2

三角形法则可以进一步发展为多边形法则。例如，有 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ 四个矢量，要求这四个矢量的矢量和，只要将它们分别平移后首尾相接，再将第一个矢量的矢端与最后一个矢量的末端相连，就得到了合矢量。如图 1.2.3 所示。

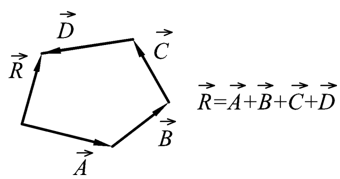

图 1.2.3

同理我们可以进行矢量的减法。因为

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

故减去一个矢量相当于加上一个方向相反的矢量。这样加法的法则也可以用来作减法。

矢量加法有两个性质：

对易律：$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ 。（1.2.1）

结合律：$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$ 。（1.2.2）

三、矢量的分解与矢量的坐标表示

一个矢量可以分解为两个矢量相加，也可以分解为多个矢量相加。可以在一个平面内分解，也可以不在同一平面内分解。

如图 1.2.4 所示，同一矢量 $\vec{A}$ 可以有三种不同的分解形式。

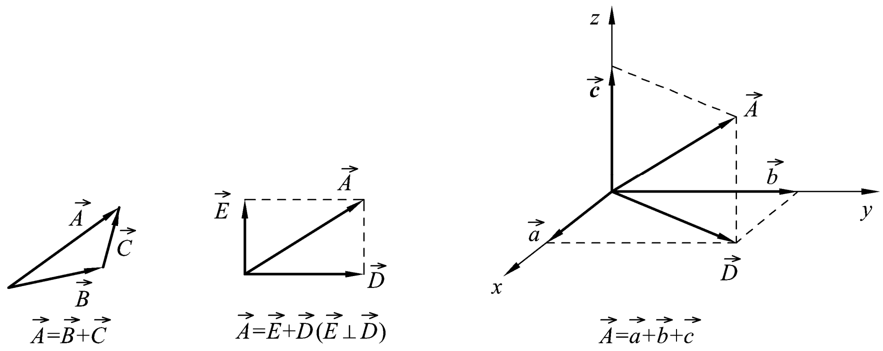

图 1.2.4

图 1.2.4（c）是将矢量 $\vec{A}$ 分别投影在三个坐标轴上。由图可看出，因为 $\vec{A}=\vec{D}+\vec{c}$ ，而 $\vec{D}=\vec{a}+\vec{b}$ ，所以

$$\vec{A}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

为了更好地表示一个矢量在直角坐标系中的分解情况，我们引入“单位矢量”概念。所谓“单位矢量”，是指这样的矢量：其大小为 1，其方向与坐标轴相同。在直角坐标系中，$\vec{i}$ ，$\vec{j}$,$\vec{k}$ 分别是 x 轴、y 轴、z 轴的三个单位矢量。这样一来，

$$\vec{a}=a\vec{i}$$

$$\vec{b}=b\vec{j}$$

$$\vec{c}=c\vec{k}$$

所以

$$\vec{A}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k} \qquad (1.2.3)$$

上述表达矢量的式子，称为矢量的坐标表示式。

如果 $\vec{A}$ 仅在一个平面内分解，如图 1.2.5 所示，则

$$\vec{A}=\vec{E}+\vec{D}=E\vec{i}+D\vec{j}$$

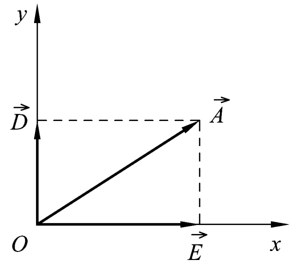

图 1.2.5

请同学们注意，矢量的书写与标量的书写是不同

的。凡矢量都有箭头，不打箭头就意味着是标量。在矢量的坐标表示中，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 三个矢量已写成 $a\vec{i},b\vec{j},c\vec{k}$ ，这时 a, b, c 是标量，而$|a|, |b|, |c|$则分别等于 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的大小，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的方向则由 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 以及正负号来表示。如果在一个等式中，左边写的是矢量（有箭头），而右边却写成标量（没有箭头），那么该等式就不成立，即这是一个错误的等式。在印刷体中，常常用黑体字表示矢量，这时候矢量并不打箭头，但我们心里应该明白：黑体字与一般字体是不同的，一个等式中也不可能出现左边是黑体字表示的矢量，右边却是一般字体表示的标量。在我们平时的书写中，不可能用黑体字表示矢量，只能用加箭头的办法表示，因此书写时要特别小心。如 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是三个单位矢量，总是要带着箭头，如果写成 i, j, k ，就错了。

矢量的坐标表示为矢量的运算带来了很大的方便。如两矢量相加，只要将对应的分量相加就行了。减法也一样。

例 1 已知两矢量 $\vec{A}_1 = 3\vec{i} + 7\vec{j}$ ，$\vec{A}_2 = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$ ，求合矢量以及 $\vec{A}_1 - \vec{A}_2$ 。

解 合矢量：$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = (3+4)\vec{i} + (7+5)\vec{j} + 6\vec{k} = 7\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ 。

$\vec{A}_1 - \vec{A}_2 = (3-4)\vec{i} + (7-5)\vec{j} + (0-6)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ 。

可以看出，某矢量 $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ 中的 a, b, c，实际上就是 $\vec{A}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影。$\vec{A}$ 的大小（或长度）也称为 $\vec{A}$ 的模，写成$|\vec{A}|$的形式，即

$$|\vec{A}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

对于平面矢量 $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ，则有

$$|\vec{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

四、矢量乘法

1. 矢量与标量相乘

标量 m 与矢量 $\vec{A}$ 的乘积为 $m\vec{A}$ 。

$m\vec{A}$ 是一个新矢量，它的大小是 $\vec{A}$ 的 m 倍。

如果 $m > 0$，则 $m\vec{A}$ 与 $\vec{A}$ 同向；

如果 $m < 0$，则 $m\vec{A}$ 与 $\vec{A}$ 反向；

如果 $m = 0$，则 $m\vec{A} = 0$ 。

矢量 $\vec{A}$ 除以标量 m 等于矢量 $\vec{A}$ 与 $\dfrac{1}{m}$ 相乘，即 $\dfrac{1}{m}\vec{A}$ 。

矢量之和与标量相乘满足分配律：

$$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B} \tag{1.2.4}$$

2. 两个矢量的点乘（标积）

两个矢量的点乘（又称“标积”）是两个矢量的大小相乘，再乘以它们之间夹角的余弦，其结果为一标量。

如：

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos(\vec{A}, \vec{B}) \tag{1.2.5}$$

注意：两矢量之间的夹角θ有两个，但矢量乘法总是采取较小的那个夹角（见图 1.2.6）。

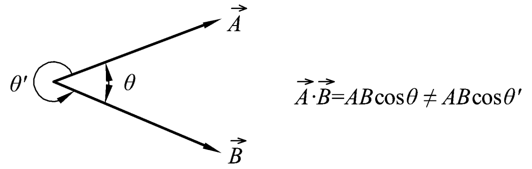

图 1.2.6

因为 $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos(\vec{A},\vec{B})$， $\vec{B}\cdot\vec{A}=AB\cos(\vec{B},\vec{A})$，而 $\cos(\vec{B},\vec{A})=\cos(\vec{A},\vec{B})$，所以

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A} \tag{1.2.6}$$

这说明两矢量的点乘满足交换律。

又因为

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=A\cdot A\cdot\cos(\vec{A},\vec{A})=A^2=|\vec{A}|^2 \tag{1.2.7}$$

这说明矢量自身点乘的结果是其模的平方。

若 $\vec{A}\perp\vec{B}$，则 $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos90°=0$；反之，只要 $\vec{A}\neq0$， $\vec{B}\neq0$，而 $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$，则必然 $\vec{A}\perp\vec{B}$。也就是说，两矢量点乘为零是判断两矢量相互垂直的充要条件。

有以上定义可以知道：

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

$$\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0$$

例 2 已知某质点在恒力 $\vec{F}$ 作用下，通过 $\vec{S}$ 的位移，$|\vec{F}|=5\,\text{N}$， $|\vec{S}|=3\,\text{m}$，求力 $\vec{F}$ 所作的功。（$\vec{F}$ 与 $\vec{S}$ 的夹角为 60°）

解 $A=\vec{F}\cdot\vec{S}=FS\cos\theta=5\times3\times\cos60°=15\times0.5=7.5\text{ J}$。

注意：此题中 $\vec{F},\vec{S}$ 都是矢量，而 A 是标量。

3. **两个矢量的叉乘（矢积）**

两矢量的叉乘（也称“矢积”）写成 $\vec{A}\times\vec{B}$，它等于另一个矢量 $\vec{C}$。$\vec{C}$ 的大小为

$$|\vec{C}|=AB\sin(\vec{A},\vec{B})=AB\sin\theta \tag{1.2.8}$$

$\vec{C}$ 的方向垂直于 $\vec{A},\vec{B}$ 所构成的平面，其指向遵守右手螺旋法则。如图 1.2.7 所示，伸出右手，当四指从 $\vec{A}$ 旋转到 $\vec{B}$ 的方向时，大拇指所指的方向就是 $\vec{C}$ 的方向。此处θ也是指 $\vec{A},\vec{B}$ 间较小的那个夹角。

很显然，$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$。因为按右手螺旋法则，$\vec{B}\times\vec{A}$ 的方向与 $\vec{A}\times\vec{B}$ 的方向恰好相反，但 $|\vec{B}\times\vec{A}|=|\vec{A}\times\vec{B}|$（大小相等），故

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \tag{1.2.9}$$

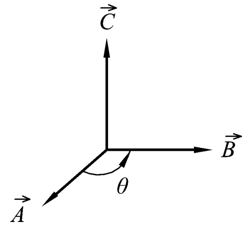

图 1.2.7

让我们以直角坐标系下三个单位矢量为例，看看它们之间相互

叉乘会有什么结果（见图 1.2.8）。

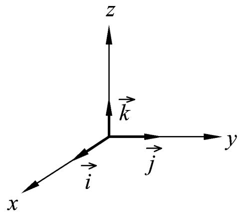

图 1.2.8

因为

$$|\vec{i}\times\vec{j}| = |\vec{i}||\vec{j}|\sin 90^\circ = 1$$

而 $\vec{i}\times\vec{j}$ 的方向恰与 $\vec{k}$ 的方向相同，故

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$$

同理可得

$$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j},\ \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$$

显然，矢量与它自己的矢积为零

$$\vec{A}\times\vec{A} = 0 \qquad (1.2.10)$$

这是因为

$$\vec{A}\times\vec{A}| = A\cdot A\sin 0^\circ = 0$$

由此也得到

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$$

现在学习了点乘和叉乘的符号“·”和“×”以后，是否会与原先学过的乘号相混淆呢？不会。当两个标量之间用“·”和“×”符号时，是相乘的意思，例如，$a\cdot b\cdot c$，3×5。而当两个矢量之间出现“·”和“×”符号时，就应理解为点乘和叉乘，例如，$\vec{A}\cdot\vec{B}$，$\vec{F}\times\vec{L}$。由于只有矢量与矢量之间才有点乘和叉乘的运算，所以在标量与矢量之间出现“·”，“×”符号时也只能理解为相乘的意思，如前面讲过的 $m\vec{A}$，与 $m\cdot\vec{A}$ 的意义是一样的。

4. 矢量坐标表示式的点乘和叉乘计算

矢量用坐标表示式时，其点乘和叉乘计算是比较方便的。

设有两矢量 $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$，$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$，则

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) \\ &= (A_x\vec{i})\cdot(B_x\vec{i}) + (A_x\vec{i})\cdot(B_y\vec{j}) + (A_x\vec{i})\cdot(B_z\vec{k}) + \\ &\quad (A_y\vec{j})\cdot(B_x\vec{i}) + (A_y\vec{j})\cdot(B_y\vec{j}) + (A_y\vec{j})\cdot(B_z\vec{k}) + \\ &\quad (A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i}) + (A_z\vec{k})\cdot(B_y\vec{j}) + (A_z\vec{k})\cdot(B_z\vec{k})\end{aligned}$$

因为 $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$，而 $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$，所以

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (1.2.11)$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})\times(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) \\ &= A_xB_x(\vec{i}\times\vec{i}) + A_xB_y(\vec{i}\times\vec{j}) + A_xB_z(\vec{i}\times\vec{k}) + \\ &\quad A_yB_x(\vec{j}\times\vec{i}) + A_yB_y(\vec{j}\times\vec{j}) + A_yB_z(\vec{j}\times\vec{k}) + \\ &\quad A_zB_x(\vec{k}\times\vec{i}) + A_zB_y(\vec{k}\times\vec{j}) + A_zB_z(\vec{k}\times\vec{k})\end{aligned}$$

因为 $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$，$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$，$\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$，$\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$，$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$，$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$，$\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$，所以

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\,\vec{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\,\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\,\vec{k}$$

为了便于记忆，可以写成行列式的形式：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.2.12}$$

例 3 已知三个矢量：$\vec{A}=3\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{B}=-\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$，$\vec{C}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$，试求 $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$.

解 因为

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-4\vec{i}-2\vec{k}+4\vec{j}+8\vec{k}-4\vec{i}+\vec{j}=-8\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k}$$

所以

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(3\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})\cdot(-8\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k})=-24+15-12=-21$$

例 4 在上例中，求 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角。

解 因为

$$|\vec{A}|=\sqrt{3^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{22},\quad |\vec{B}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{21}$$

则

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=-3-12-4=-19\quad 且\quad \vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta=\sqrt{22}\cdot\sqrt{21}\cdot\cos\theta$$

所以

$$\sqrt{22}\cdot\sqrt{21}\cdot\cos\theta=-19$$

所以 $\cos\theta\doteq-0.8845$，故 $\theta\doteq152.2°$。

五、矢量函数的导数（微商）

设某矢量 $\vec{A}$ 是时间 t 的函数，即 $\vec{A}=\vec{A}(t)$。当时间从 t 时刻变到 $(t+\Delta t)$ 时刻时，$\vec{A}(t)$ 就变为 $\vec{A}(t+\Delta t)$（见图 1.2.9）。在这段时间内，矢量 $\vec{A}$ 的平均变化率为 $\dfrac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}$。而矢量函数 $\vec{A}$ 对时间 t 的导数定义为：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} \tag{1.2.13}$$

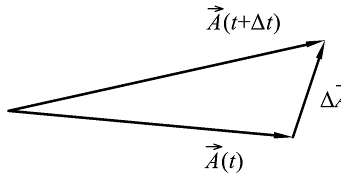

图 1.2.9

以上定义方法与标量函数是类似的。但同学们请注意，由于 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\vec{A}$ 的极限 $\mathrm{d}\vec{A}$ 的方向一般不同于 $\vec{A}$，故 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$ 与 $\vec{A}$ 的方向往往是不同的。

矢量函数的导数还可以写成直角坐标分量式。

因为 $\vec{A}(t)=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$ ，且 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 为恒矢量，所以

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}\text{（可以将恒矢量提到求导符号外）} \quad (1.2.14)$$

很显然，

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \quad (1.2.15)$$

矢量导数有一个重要特点。如图 1.2.10 所示，即使矢量的模不改变，仅方向改变，矢量的增量 $\Delta\vec{A}$ 也不为零，$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$ 也就不为零。

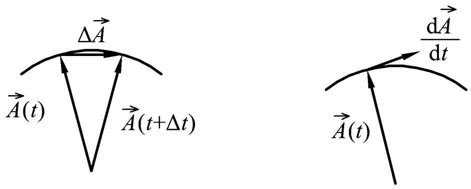

图 1.2.10

当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\vec{A}$ 趋于 $\vec{A}$ 的矢端的运动轨迹的切线方向，因而与 $\vec{A}(t)$ 垂直，故 $\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$ 也与 $\vec{A}(t)$ 垂直。即

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{A}=0 \quad (1.2.16)$$