$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\mu Z}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\mu Z}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{k_z}{k_h}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\mu Z}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{10}{k_h}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{Z}\phi\right) \quad (12)$$

其中 k_h 等于 k_x 的水平渗透率；

k_y 在水平面内各向同性，达西。

方程（12）左侧的偏微分方程表达式为

$$\frac{\partial}{\partial j}\left(\frac{p}{\mu Z}\frac{\partial p}{\partial j}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{\mu Z}\left[\frac{\partial^2 p^2}{\partial j^2}-\frac{\partial \ln(\mu Z)}{\partial p^2}\left(\frac{\partial p^2}{\partial j}\right)^2\right],(j=x,y,z) \quad (13)$$

方程（12）右侧的偏微分方程表达式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{Z}\phi\right)=\frac{p}{Z}\frac{\partial \phi}{\partial t}+\phi\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{Z}\right)=\frac{\phi C_f}{2Z}\frac{\partial p^2}{\partial t}+\frac{\phi}{2Z}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial p}\right)\frac{\partial p^2}{\partial t} \quad (14)$$

气体等温压缩系数是压力和压缩因子的函数：

$$C_g=\frac{1}{p}-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial p} \quad (15)$$

把方程（13）~（15）代入方程（12）得

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2}+\frac{k_z}{k_h}\frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2}-\frac{\partial \ln(\mu Z)}{\partial p^2}\left[\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p^2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p^2}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$=\frac{10\phi\mu C_t}{k_h}\frac{\partial p^2}{\partial t} \quad (16)$$

$$C_t = C_g + C_f \tag{17}$$

其中　C_g——气体压缩系数，MPa^{-1}；

C_t——综合压缩系数，MPa^{-1}。

方程（16）是一个气体在均质地层流动的扩散方程，包含了在笛卡儿坐标系中压力平方的二次导数项。方程（16）表明在多孔介质中的气体流动是一种非线性过程。通过与液体微分控制方程（方程 1）比较，方程（16）展示了一种更复杂的非线性特征。因为 $\partial \ln(\mu Z)/\partial p^2$ 项是一个压力的隐函数不是一个常数，所以求解这个扩散方程比较困难。通常拟压力（或者潜在的）函数（Ertekin 和 Sung，1989；King 和 Ertekin，1988；Nie 等，2012 年）用来描述气体流动的控制方程：

$$\psi = \int_{p_{\mathrm{sc}}}^{p} \frac{1}{\mu Z} \mathrm{d}p^2 \tag{18}$$

其中　Ψ——气体拟压力，MPa^2（$\mathrm{mPa{\cdot}s}^{-1}$）$^{-1}$；

p_{sc}——标准状况下压力，MPa。

拟压力对于坐标的导数可以表达为

$$\frac{\partial\psi}{\partial j}=\frac{2p}{\mu Z}\frac{\partial p}{\partial j},\qquad (j=x,y,z) \tag{19}$$

拟压力对于时间的导数可以表达为

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{2p}{\mu Z}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{20}$$

把方程（20）代入方程（12）的右侧得

$$\frac{10}{k_h}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{Z}\phi\right)=\frac{10}{k_h}\frac{p}{Z}\phi\left[C_f+\left(1-\frac{p}{Z}\frac{\partial Z}{\partial p}\right)\right]\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{10}{k_h}\frac{\phi\mu C_t}{2}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{21}$$

把方程（19）代入方程（12）的左侧得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\mu Z}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\mu Z}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{k_z}{k_h}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\mu Z}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{k_z}{k_h}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) \tag{22}$$

那么，扩散方程可以通过气体拟压力表达出来，由下式获得：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{k_z}{k_h}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{10\phi\mu C_t}{k_h}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{23}$$

方程（23）是一个没有二次导数项的扩散方程。根据方程（15）和（17），因为气体压缩系数是压力的隐函数，所以岩石和气体综合压缩系数也是压力的隐函数。除此之外，气体黏度也是压力的隐函

数。因此，方程（23）仍然是一个非线性方程。这个非线性方程用解析法求解非常困难，所以，将会应用数值方法求解。

3 非线性流动模型的描述

3.1 物理模型假设

（1）在饱和了单一流体（气、油、水）的均质且各向同性的储层中仅有直井以恒定速率生产,外部边界可能是无限、封闭或者定压。

（2）认为微可压缩岩石和流体（油和水）具有恒定不变的压缩系数，然而实际上气体的压缩系数随着压力的减小而变化。

（3）等温方程和达西流忽略了重力和毛细管力的影响。

（4）考虑了开井时井筒存储的影响，然而井筒中存储的流体开始流动时和当流体在地层中时没考虑。

（5）考虑了井筒附近的表皮效应，这附近储层可能受到钻井和完井作业的损害（在生产过程中，可能存在一个额外的压力降，用表皮系数作为一个额外压力降的表现）。

（6）当时间 $t=0$ 时，压力均匀分布在地层中，等于初始压力（p_i）。

3.2 数学模型

为了试井分析的便利性，使用了一系列应用工程单位建立了数学模型。

3.2.1 地层中的液体流动

3.2.1.1 数学模型的建立

径向圆柱系统中的控制微分方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+C_\rho\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2=\frac{\mu\phi C_t}{3.6k_h}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{24}$$

其中 C_ρ ——气体压缩系数，MPa^{-1}；

C_t ——岩石和液体的综合压缩系数；

k_h ——径向地层渗透率，达西；

p ——地层压力，MPa；

r ——从井筒中心算起的径向半径，m；

t ——井生产时间，h。

初始条件：

$$p\big|_{t=0} = p_i \qquad (25)$$

其中　P_i——初始地层压力，MPa。

井生产条件以有效半径为基础：

$$\frac{kh}{\mu}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\bigg|_{r=r_{\mathrm{wa}}} = 1.842\times10^{-3}qB + 0.04421C_{\mathrm{s}}\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{w}}}{\mathrm{d}t} \qquad (26)$$

其中　B——原油体积系数，无量纲；

C_{s}——井筒存储系数，$\mathrm{m^3MPa^{-1}}$；

p_{w}——井筒压力，MPa；

q——井口油井流量，$\mathrm{m^3/d}$；

r_{wa}——有效的井筒半径，m。

有效的井筒半径定义为（Agarwal 等，1970；Chaudhry，2004）：

$$r_{\mathrm{wa}} = r_{\mathrm{w}}\mathrm{e}^{-S} \qquad (27)$$

其中　r_{w}——真实的井筒半径，m；

S——表皮系数，无量纲。

外边界条件：

无限大地层：

$$\lim p\Big|_{r_e \to \infty} = p_i(\text{infinite}) \tag{28}$$

定压边界：

$$p\Big|_{r=r_e} = p_i(\text{constant pressure}) \tag{29}$$

封闭边界：

$$\frac{\partial p}{\partial r}\Big|_{r=r_e} = 0(\text{closed}) \tag{30}$$

其中　r_e——外边界半径，m。

为了求解数学模型，引入了下面的无因次定义：

无因次压力：

$$p_D = kh(p_i - p)/(1.842\times10^{-3} qB\mu)$$

表皮系数：

$$S = kh\Delta p_s/(1.842\times10^{-3} qB\mu)$$

其中　Δp_s——井筒附近额外的压力降。

以有效井筒半径为基础的无因次半径为

$$r_D = r/(r_w e^{-S})$$

外边界无因次半径：

$$r_{eD}=r_e/(r_w e^{-S})$$

无因次的井筒存储系数：

$$C_D=C_s/(6.2832\phi C_t h r_w^2)$$

无因次时间：

$$t_D=3.6kt/(\phi\mu C_t r_w^2)$$

非线性项无因次系数：

$$\beta=(1.842\times10^{-3}qB\mu C_\rho)/(kh)$$

无因次数学模型如下：

在径向圆柱系统中，控制微分方程等于：

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2}+\frac{1}{r_D}\frac{\partial p_D}{\partial r_D}-\beta\left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right)^2=\frac{1}{(C_D e^{2S})}\frac{\partial p_D}{\partial T_D} \tag{31}$$

$$T_D=t_D/C_D \tag{32}$$

初始条件：

$$p_D\big|_{T_D=0}=0 \tag{33}$$

油井生产条件：

$$\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{wD}}}{\mathrm{d}T_{\mathrm{D}}}-\left(\frac{\partial p_{\mathrm{D}}}{\partial r_{\mathrm{D}}}\right)\bigg|_{r_{\mathrm{D}}=1}=1 \tag{34}$$

其中　p_{wD}——无因次井筒压力。

外边界条件：

无限大地层：

$$\lim p_{\mathrm{D}}\Big|_{r_{\mathrm{eD}}\to\infty}=0(\text{infinite}) \tag{35}$$

定压边界：

$$p_{\mathrm{D}}\Big|_{r_{\mathrm{D}}=r_{\mathrm{eD}}}=0(\text{constant pressure}) \tag{36}$$

封闭边界：

$$\frac{\partial p_{\mathrm{D}}}{\partial r_{\mathrm{D}}}\bigg|_{r_{\mathrm{D}}=r_{\mathrm{eD}}}=0(\text{closed}) \tag{37}$$

3.2.1.2　无因次的线性化数学模型

方程（31）是一个非线性偏微分方程。为了求解这个无因次的数学模型，引入下面变量的修改（Nie 和 Ding，2010；Odeh 和 Babu，1998）：

$$p_{\mathrm{D}}=-\frac{1}{\beta}\ln(\xi+1) \tag{38}$$

那么

$$\frac{\partial p_{\mathrm{D}}}{\partial r_{\mathrm{D}}}=-\frac{1}{\beta}\frac{1}{(\xi+1)}\frac{\partial \xi}{\partial r_{\mathrm{D}}} \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 p_{\mathrm{D}}}{\partial r_{\mathrm{D}}^2}=\frac{1}{\beta}\frac{1}{(\xi+1)^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial r_{\mathrm{D}}}\right)^2-\frac{1}{\beta}\frac{1}{(\xi+1)}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r_{\mathrm{D}}^2}\right) \tag{40}$$

$$\left(\frac{\partial p_{\mathrm{D}}}{\partial r_{\mathrm{D}}}\right)^2=\frac{1}{\beta^2}\frac{1}{(\xi+1)^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial r_{\mathrm{D}}}\right)^2 \tag{41}$$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{D}}}{\partial T_{\mathrm{D}}}=-\frac{1}{\beta}\frac{1}{(\xi+1)}\frac{\partial \xi}{\partial T_{\mathrm{D}}} \tag{42}$$

把方程（38）~（42）代入方程（31），模型转换为

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r_{\mathrm{D}}^2}+\frac{1}{r_{\mathrm{D}}}\frac{\partial \xi}{\partial r_{\mathrm{D}}}=\frac{1}{(C_{\mathrm{D}}\mathrm{e}^{2S})}\frac{\partial \xi}{\partial T_{\mathrm{D}}} \tag{43}$$

$$\xi\Big|_{T_{\mathrm{D}}=0}=0 \tag{44}$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial r_{\mathrm{D}}}-\frac{\partial \xi}{\partial T_{\mathrm{D}}}-\beta\xi\right)\Big|_{r_{\mathrm{D}}=1}=\beta \tag{45}$$

$$\lim \xi\Big|_{r_{\mathrm{eD}}\to\infty}=0(\text{infinite}) \tag{46}$$

$$\xi\Big|_{r_{\mathrm{D}}=r_{\mathrm{eD}}}=0(\text{constant pressure}) \tag{47}$$

3.2.1.3　无因次数学模型的求解

在 T_{D} 基础上引入拉普拉斯变换：

$$L[\xi(r_{\mathrm{D}},T_{\mathrm{D}})]=\overline{\xi}(r_{\mathrm{D}},u)=\int_0^\infty \xi(r_{\mathrm{D}},T_{\mathrm{D}})\mathrm{e}^{-uT_{\mathrm{D}}}\mathrm{d}T_{\mathrm{D}} \tag{48}$$

在拉氏空间内，无因次数学模型为

$$\frac{\mathrm{d}^2\overline{\xi}}{\mathrm{d}r_{\mathrm{D}}^2}+\frac{1}{r_{\mathrm{D}}}\frac{\mathrm{d}\overline{\xi}}{\mathrm{d}r_{\mathrm{D}}}=\frac{u}{(C_{\mathrm{D}}\mathrm{e}^{2S})}\overline{\xi} \tag{49}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\xi}}{\mathrm{d}r_{\mathrm{D}}}\bigg|_{r_{\mathrm{D}}=1}-(u+\beta)\overline{\xi}_{\mathrm{w}}=\frac{\beta}{u} \tag{50}$$

$$\lim\overline{\xi}\Big|_{r_{\mathrm{eD}}\to\infty}=0(\text{infinite}) \tag{51}$$

$$\xi\Big|_{r_{\mathrm{D}}=r_{\mathrm{eD}}}=0(\text{constant pressure}) \tag{52}$$

$$\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial r_{\mathrm{D}}}\bigg|_{r_{\mathrm{D}}=r_{\mathrm{eD}}}=0(\text{closed}) \tag{53}$$

公式（50）的解为

$$\overline{\xi}=AI_0(r_{\mathrm{D}}\sqrt{\varsigma})+BK_0(r_{\mathrm{D}}\sqrt{\varsigma}) \tag{54}$$

$$\varsigma=u/(C_{\mathrm{D}}\mathrm{e}^{2S}) \tag{55}$$

将公式（54）代入公式（50）和公式（51）得

$$I_0(\sqrt{\varsigma})\cdot A+K_0(\sqrt{\varsigma})\cdot B-\overline{\xi}_{\mathrm{w}}=0 \tag{56}$$

$$\sqrt{\varsigma}I_1(\sqrt{\varsigma})\cdot A-\sqrt{\varsigma}K_1(\sqrt{\varsigma})\cdot B-(u+\beta)\overline{\xi}_{\mathrm{w}}=\beta/u \tag{57}$$

将公式（54）代入公式（51）~（53）得

$$\lim[I_0(r_{\mathrm{eD}}\sqrt{\varsigma})\cdot A+K_0(r_{\mathrm{eD}}\sqrt{\varsigma})\cdot B]\Big|_{r_{\mathrm{eD}}\to\infty}=0 \tag{58}$$

$$I_0(r_{\mathrm{eD}}\sqrt{\varsigma})\cdot A+K_0(r_{\mathrm{eD}}\sqrt{\varsigma})\cdot B=0 \tag{59}$$

$$I_1(r_{\mathrm{eD}}\sqrt{\varsigma})\cdot A-K_1(r_{\mathrm{eD}}\sqrt{\varsigma})\cdot B=0 \tag{60}$$

其中　A 和 B ——未定系数；

$I_0(\quad)$——修正的第一类贝塞尔函数，零阶；

$I_1(\quad)$——修正的第一类贝塞尔函数，一阶；

$K_0(\quad)$——修正的第二类贝塞尔函数，零阶；

$K_1(\quad)$——修正的第二类贝塞尔函数，一阶。

在方程（56）~（60）中，有三个未知数（A, B, $\bar{\xi}_w$）和三个方程，在拉氏空间里我们可以通过线性代数很容易获得模型的解（Nie 等，2011a，b），比如高斯消元法。

在真实空间里，ξ_w 和导数（$d\xi_w/dT_D$）可以通过 Stehfest 数值反演把 $\bar{\xi}_w$ 转换回 ξ_w 获得（Stehfest，1970），那么无因次井筒压力（p_{wD}）和导数（dp_{wD}/dT_D）可以通过把 ξ_w 代入方程（38）获得，从而可以获得 p_{wD} 和 $(p'_{wD}\cdot t_D/C_D)$ 和（t_D/C_D）的标准型双对数试井分析典型曲线。

3.2.2 在有限地层中的气体流动

3.2.2.1 数学模型的建立

在径向圆柱形系统中，控制微分方程为