第一章　随机事件与概率

第一节　随机事件与样本空间

一、必然现象与随机现象

人们在实践活动中所遇到的现象，一般来说可分为两类：一类是**必然现象**，或称为**确定性现象**；另一类是**随机现象**，或称为**不确定性现象**.

必然现象是指在相同条件下重复试验，所得结果总是确定的现象．只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的．如：在标准大气压下，将水加热到 100 °C，水必然沸腾；用手向空中抛出的石子，必然下落；作等速直线运动的物体，如无外力作用，必然继续作等速直线运动，等等，这些现象都是必然现象.

随机现象是指在相同条件下重复试验，所得结果不一定相同的现象，即试验结果是不确定的现象．对这种现象来说，在每次试验之前哪一种结果发生，是无法预言的．如：新生婴儿，可能是男孩，也可能是女孩；向一目标进行射击，可能命中目标，也可能没有命中目标；从一批产品中，随机抽检一件产品，结果可能是合格品，也可能是次品；测量某个物理量，由于许多偶然因素的影响，各次测量结果不一定相同，等等，这些现象都是随机现象.

对随机现象，是否有规律可循呢？人们经过长期的反复实践，发现这类现象虽然就每次试验结果来说，具有不确定性，但大量重复试验，所得结果却呈现出某种规律性．如：掷一枚质量均匀的硬币，当投掷次数很大时，就会发现正面和反面出现的次数几乎各占$\frac{1}{2}$．历史上，蒲丰（Buffon）投掷过 4 040 次，得到 2 048 次正面；皮尔逊（K.Pearson）投掷过 24 000 次，得到 12 012 次正面.

对一个目标进行射击，当射击次数不多时，弹孔分布看不出有什么规律性；但当射击次数非常多时，就可发现弹孔的分布呈现一定的规律性：弹孔关于目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的弹孔越密，越远离目标的弹孔越稀.

从分子物理学观点来看，气体分子对器壁的压力是气体分子对器壁碰撞的结果．由于分子是时刻不停地、杂乱无章地运动着，速度和轨道都是随机的，因而对器壁的碰撞也是随机的．初看起来器壁所受的压力是不稳定的，可是实验证明，由于分子数目非常大，各分子运动所具有的随机性在集体中互相抵消、互相平衡，使得器壁所受的总压力呈现一种稳定性．分子数目越大，压力越稳定.

从上述各例可以看到，随机现象也包含着规律性，它可在相同条件下的大量重复试验或

观察中呈现出来．这种规律性称为**随机现象的统计规律性**．

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的一门数学学科．

二、随机事件与样本空间

对随机现象的研究，总是要进行观察、测量或做各种试验．例如，掷一硬币，观察哪面朝上；向一目标进行射击，观察是否命中；从一批产品中随机抽一产品，检查它是否合格等等．仔细分析这些试验，可以发现这些试验具有如下的共同特点：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验的所有可能结果不止一个，而且是事先已知的；

（3）每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但究竟出现哪一个结果，试验前不能确切预言．

如投掷硬币，试验是可以在相同条件下重复进行的，试验的可能结果有两个，即正面和反面；每次试验必出现其中之一，但投掷之前是不可能预言正面出现还是反面出现．

人们将满足上述三个条件的试验，称为**随机试验**，简称**试验**，以字母E表示．试验的每一个可能结果称为**样本点**，也称为**基本事件**，用ω表示．样本点的全体（或基本事件的全体构成的集合）称为**样本空间**，记为Ω．

在讨论一个随机试验时，首先要明确它的样本空间．对一个具体的试验来说，其样本空间可以由试验的具体内容确定，先看下面几个例子．

例 1　掷一枚均匀对称的硬币，观察正反面出现的情况．这是个随机试验，可能结果有两个：正（正面朝上），反（反面朝上）．故样本空间$\Omega=\{正,反\}$．

例 2　将上述硬币掷两次，观察正反面出现的情况．这也是一个随机试验，可能结果有四个：（正正），（正反），（反正），（反反）．括号中的字分别代表两次投掷的结果，故样本空间$\Omega=\{(正正),(正反),(反正),(反反)\}$．

例 3　记录某电话交换台在一段时间内接到的呼叫次数．这个试验的样本点（记录结果）是一非负整数，由于难以规定一个呼叫次数的上界，所以样本空间为$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$．

例 4　从一批灯泡中抽取一只灯泡，测试它的使用寿命．设t表示寿命，则样本空间$\Omega=\{t:t\geqslant 0\}$．

例 5　观察某地区一昼夜最低温度x和最高温度y．设这个地区的温度不会小于T_0也不会大于T_1，则样本空间$\Omega=\{(x,y):T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$．

随机现象的某些样本点组成的集合称为**随机事件**，简称**事件**，常用大写字母$A,B,C,\cdots$表示．有了样本空间的概念便可以用集合的语言来定义事件．下面先从一个例子来分析．

例 6　在例 2 中，若设事件$A=$“第一次出现正面”．在一次试验中，A发生当且仅当在这次试验中出现样本点$(正正),(正反)$中的一个．这样可以认为A是由$(正正),(正反)$组成的，而将A定义为它们组成的集合$A=\{(正正),(正反)\}$．又如事件$B=$“两次出现同一面”，B发生当且仅当现样本点$(正正),(反反)$中的一个出现，而将B定义为集合$B=\{(正正),(反反)\}$．类似地，事件$C=$“至少有一次出现正面”，可定义为集合$C=\{(正正),(正反),(反正)\}$．

一般地，人们将事件定义为样本点（基本事件）的某个集合，即样本空间的某个子集. 称事件 A 发生，当且仅当 A 中某一样本点出现.

样本空间 Ω 和空集 $\varnothing$ 作为 Ω 的子集也看作事件. 由于 Ω 包含所有的样本点，故在每次试验中，必有一个样本点 $\omega\in\Omega$ 发生，即在试验中，事件 Ω 必然发生，因此 Ω 是**必然事件**. 又因在 $\varnothing$ 中不包含任何一个样本点，故在任一次试验中，$\varnothing$ 永远不会发生，因此 $\varnothing$ 是**不可能事件**. 常用 $\Omega,\varnothing$ 分别表示必然事件与不可能事件.

必然事件与不可能事件可以说不是随机事件，但为了今后研究的方便，还是把它们作为随机事件的两个极端情形来处理.

再看几个事件的例子.

例 7　在例 3 中，如果设 $A=$ “呼叫次数不超过三次”，$B=$ “呼叫次数大于五次”，则 $A=\{0,1,2,3\},B=\{6,7,8,\cdots\}$.

例 8　在例 4 中，设 $A=$ “寿命小于五小时”，则 $A=\{t:0\leqslant t<5\}$.

习题 1.1

1．写出下列随机试验的样本空间:

（1）记录一个小班一次数学考试的平均分数（设以百分制记分）.

（2）生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数.

（3）对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记“正品”，不合格的记“次品”. 如连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果.

（4）在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

2．写出下列随机试验的样本空间:

（1）抛三枚硬币;

（2）抛三颗骰子;

（3）连续抛一枚硬币，直至出现正面为止;

（4）在某十字路口，一小时内通过的机动车辆数;

（5）某城市一天内的用电量.

3．写出下列随机试验的样本空间及表示下列事件的样本点集合.

（1）10 件产品中有 1 件是不合格品，从中任取 2 件得 1 件不合格品.

（2）一个口袋中有 2 个白球、3 个黑球、4 个红球，从中任取一球，①得白球，②得红球.

第二节　事件关系与运算

在实际问题中，往往要在同一个试验中同时研究几个事件以及它们之间的联系．详细分析事件之间的关系，不仅帮助人们更深入地认识事件的本质，而且可大大简化一些复杂的事件．

为直观起见，概率论中常用平面上的一个矩形域表示样本空间 Ω，矩形内的每一点表示样本点，并用一个圆或其他几何图形表示事件 A，如图 1.1 所示，这类图形称为**维恩**（Venn）图．

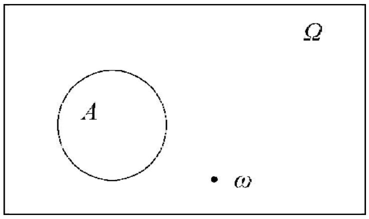

图 1.1　事件 A 的维恩（Venn）图

一、事件间的关系

下面的讨论总是假设在同一样本空间 Ω（即同一个随机现象）中进行．事件间的关系与集合间的关系一样主要有以下几种：

1．包含关系

若事件 A 中的每一个样本点都属于事件 B，则称事件 B **包含**事件 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$．

显然，这时事件 A 发生必然导致事件 B 发生，故 B 包含 A 也常定义为："若 A 发生必然导致 B 发生，则称 B 包含 A"．

例如，在上节例 6 中，由于 $A=\{(\text{正正}),(\text{正反})\}$，$C=\{(\text{正正}),(\text{正反}),(\text{反正})\}$，故有 $A\subset C$．

对任意事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$．

2．相等关系

如果事件 A 与事件 B 满足：属于 A 的样本点必属于 B，而且属于 B 的样本点必属于 A，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A=B$．

例 9　掷两颗骰子，以 A 记事件"两颗骰子的点数之和为奇数"，以 B 记事件"两颗骰子的点数为一奇一偶"．很容易证明：A 发生必然导致 B 发生，而且 B 发生必然导致 A 发生，所以 $A=B$．

3．互不相容

如果 A 与 B 没有相同的样本点，则称 A 与 B **互不相容**．用概率论的语言说：A 与 B 互不相容就是事件 A 与事件 B 不可能同时发生．

如在电视机寿命试验中，"寿命小于 1 万小时"与"寿命大于 5 万小时"是两个互不相容的事件，因为它们不可能同时发生．

二、事件运算

事件的运算与集合的运算相当，有并、交、差和余四种运算．

1．事件的并

事件 A 与 B 的**并**，记为 $A\cup B$．其含义为“由事件 A 与 B 中所有的样本点（相同的只计入一次）组成的新事件”．或用概率论的语言说，“事件 A 与 B 中至少有一个发生”．

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 $A=$“出现奇数点”$=\{1,3,5\}$，记事件 $B=$“出现的点数不超过 3”$=\{1,2,3\}$，则 A 与 B 的并为 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$．

2．事件的交

事件 A 与 B 的**交**，记为 $A\cap B$，或简记为 AB．其含义为“由事件 A 与 B 中相同的样本点组成的新事件”，或用概率论的语言说：“事件 A 与 B 同时发生”．

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 $A=$“出现奇数点”$=\{1,3,5\}$，记事件 $B=$“出现的点数不超过 3”$=\{1,2,3\}$，则 A 与 B 的交为 $AB=\{1,3\}$．

若事件 A 与 B 互不相容，则其交必为不可能事件，即 $AB=\varnothing$，反之亦然．这表明：$AB=\varnothing$ 就意味着 A 与 B 是互不相容事件．

事件的并与交运算可推广到有限个或可列个事件．譬如有事件 $A_1,A_2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为有限并，$\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 称为可列并；$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为有限交，$\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 称为可列交．

3．事件的差

事件 A 对 B 的**差**，记为 $A-B$．其含义为“由在事件 A 中而不在事件 B 中的样本点组成的新事件”，或用概率论的语言说：“事件 A 发生而事件 B 不发生”．

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 $A=$“出现奇数点”$=\{1,3,5\}$，记事件 $B=$“出现的点数不超过 3”$=\{1,2,3\}$，则 A 对 B 的差为 $A-B=\{5\}$．

4．对立事件

事件 A 的**对立事件**，记为 $\overline{A}$．其含义为“由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的新事件”，或用概率论的语言说：“A 不发生”，即 $\overline{A}=\Omega-A$．

注意：对立事件是相互的，即 A 的对立事件是 $\overline{A}$，而 $\overline{A}$ 的对立事件是 A，即 $\overline{\overline{A}}=A$．必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 互为对立事件，即 $\overline{\Omega}=\varnothing,\ \overline{\varnothing}=\Omega$．

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 $A=$“出现奇数点”$=\{1,3,5\}$ 的对立事件是 $\overline{A}=\{2,4,6\}$，事件 $B=$“出现的点数不超过 3”$=\{1,2,3\}$ 的对立事件是 $\overline{B}=\{4,5,6\}$．

A 与 B 互为对立事件的充要条件是：$A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$．

此性质也可作为对立事件的另一种定义，即如果事件 A 与 B 满足：$A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，则称 A 与 B 互为对立事件，记为 $\overline{A}=B,\ \overline{B}=A$．

例 10　设 A,B,C 是某个随机现象的三个事件，则

（1）事件“A 与 B 发生，C 不发生”可表示为：$AB\overline{C}$；

（2）事件“A,B,C 中至少有一个发生”可表示为：$A\cup B\cup C$；

（3）事件“A,B,C中至少有两个发生”可表示为：$AB\cup AC\cup BC$；

（4）事件“A,B,C中恰好有两个发生”可表示为：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup \overline{A}BC$；

（5）事件“A,B,C中同时发生”可表示为：ABC；

（6）事件“A,B,C都不发生”可表示为：$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

（7）事件“A,B,C不全发生”可表示为：$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

三、事件的运算性质

1．交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA \tag{1-1}$$

2．结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \tag{1-2}$$

$$(AB)C=A(BC) \tag{1-3}$$

3．分配律

$$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC \tag{1-4}$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C) \tag{1-5}$$

4．对偶律（德·摩根公式）

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \tag{1-6}$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \tag{1-7}$$

对偶原理在事件的运算中经常用到，它可以推广到更多个事件的情况，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i} \tag{1-8}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i} \tag{1-9}$$

用语言表述为：“事件并的对立事件等于对立事件的交，事件交的对立事件等于对立事件的并.”

例 11 在检查某种圆柱形零件时，要求它的长度和直径都必须合格．设A,B,C分别表示事件“直径合格”、“长度合格”、“产品合格”，则

（1）$C\subset A,C\subset B$；

（2）$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$分别表示“直径不合格”、“长度不合格”、“产品不合格”；

（3）$C=A\cap B$；

（4）$\overline{C}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

（5）$C=A-\overline{B}$.

习题 1.2

1．在抛三枚硬币的试验中写出下列事件的集合表示：

$A=$“至少出现一个正面”；　　$B=$“最多出现一个正面”；

$C=$“恰好出现一个正面”；　　$D=$“出现三面相同”.

2．在数学系的学生中任选一名学生，令事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示被选学生是三年级学生，事件 C 表示该生是运动员.

（1）叙述 $AB\overline{C}$ 的意义.　　（2）在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

（3）什么时候关系式 $C\subset B$ 是正确的?　　（4）什么时候 $\overline{A}=B$ 成立?

3. 一个工人生产了 n 个零件，以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是合格品（$1\leqslant i\leqslant n$）. 用 A_i 表示下列事件:

（1）没有一个零件是不合格品；　　（2）至少有一个零件是不合格品；

（3）仅仅只有一个零件是不合格品；　　（4）至少有两个零件是不合格品.

4．证明下列各式:

（1）$A\cup B=B\cup A$；　　（2）$A\cap B=B\cap A$；

（3）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；　　（4）$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（5）$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$；　　（6）$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

5．试问下列命题是否成立?

（1）$A-(B-C)=(A-B)\cup C$；　　（2）若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

（3）$(A\cup B)-B=A$；　　（4）$(A-B)\cup B=A$.

6．试用维恩图说明，当事件 A 与 B 互不相容时，能否得出结论：$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容.