

1 极限

1.1 数列极限

1. 用定义证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2-1} = 2$. (吉林大学 2010)

解题过程:

$n \geq 2$ 时,

$$\left| \frac{2n^2+1}{n^2-1} - 2 \right| = \left| \frac{3}{n^2-1} \right| \leq 3 \left| \frac{1}{n^2 - \frac{n^2}{2}} \right| \leq \frac{6}{n^2} < \frac{6}{n}.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 解不等式 $\frac{6}{n} < \varepsilon$, 得 $n > \frac{6}{\varepsilon}$. 只要取 $N = \left[\frac{6}{\varepsilon} \right] + 2$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{2n^2+1}{n^2-1} - 2 \right| < \frac{6}{n} < \varepsilon.$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2-1} = 2$.

2. 设 $a_n \geq 0 (n=1, 2, 3, \dots)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. (西北工大 2012, 昆明理工 2011, 北京大学 1997, 矿业大学 2005, 浙江工大 2011, 江苏大学 2014)

解题过程:

由保不等式性可得 $a \geq 0$.

若 $a = 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n < \varepsilon^2$, 从而

$$|\sqrt{a_n} - 0| < \varepsilon.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

若 $a > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$. 从而

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon.$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

3. 证明下列结论.

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (a 为有限数或 $\pm\infty$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = a$ (a 为有限数或 $\pm\infty$). (中科大

2013, 河海大学 2010, 重庆大学 2009, 计量学院 2009, 西安理工 2005, 安徽大学 2005, 湖北大学 2002, 地质大学 2002, 浙江师大 2005, 福州大学 2005, 上海师大 2004, 燕山大学 2011, 扬州大学 2011/2007. 特别 $a = 0$: 西

安电子科技 2008, 西北工大 2004, 东南大学, 华南师大 2005, 南航 2007, 河北工大 2002, 华侨大学 2008, 暨南大学 2007, 中山大学 2008, 郑州大学 2007)

$$(2) \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n + \sqrt{n}} = a. \text{ (云南大学 2010)}$$

$$(3) \text{ 证明: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1. \text{ (北京师大 2007, 河北大学 2009, 青岛大学 2011, 华北水电 2005)}$$

$$(4) \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n C_n^k x_n = a, \text{ 其中 } C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}. \text{ (中南大学 2005)}$$

$$(5) \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = b, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{a+b}{2}. \text{ (中科大 2012)}$$

$$(6) \text{ 已知数列 } \{a_n\} \text{ 非负且单调递减, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \text{ 证明: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = b. \text{ (武汉大学}$$

2011)

$$(7) \text{ 设 } \{a_n\} \text{ 为正实数列, } s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, r_n = \frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \text{ 均存在.}$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \geq 1$. (厦门大学 2012)

解题过程:

(1) 情形 1: a 为有限数.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + \cdots + (x_n - a)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} + \frac{|x_{N_1+1} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n} \\ &< \frac{A}{n} + \frac{n - N_1}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

其中 $A = |x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|$ 为非负数.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{n} = 0$, 故对上述的 $\varepsilon > 0, \exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $\frac{A}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$.

情形 2: $a = +\infty$.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 则 $\forall G > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $x_n > 2G$, 且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1} > 0$. 于是

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}}{n} + \frac{x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n} > \frac{x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n} > \frac{2G(n - N_1)}{n} = 2G - \frac{2N_1}{n}G.$$

取 $N = 2N_1$, 当 $n > N$ 时, $\frac{2N_1}{n}G < G$. 于是

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} > 2G - G = G.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$.

情形 3: $a = -\infty$.

证法与情形 2 类似(或令 $a_n = -x_n$ 转化为情形 2).

注 1: 这种“拆分方法”是证明某些极限问题的一个常用方法.

注 2: 本题也可用 Stolz 公式证明.

$$(2) \text{ 由(1)得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{n}{n + \sqrt{n}} \right) = a.$$

$$(3) \text{ 由(1)得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

(4) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 所以

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n C_n^k x_k - a \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^n} C_n^k (x_k - a) - \frac{a}{2^n} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^n} C_n^k |x_k - a| + \sum_{k=N_1+1}^n \frac{1}{2^n} C_n^k |x_k - a| + \frac{|a|}{2^n} \\ &\leq N_1 A \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{N_1} C_n^k + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{k=N_1+1}^n C_n^k + \frac{|a|}{2^n} \\ &= N_1 A \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{N_1} C_n^k \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=N_1+1}^n C_n^k \right) + \frac{|a|}{2^n} \\ &\leq N_1 A \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{N_1} C_n^k \right) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a|}{2^n}. \end{aligned}$$

其中 $A = |x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|$ 为非负数.

由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{N_1} C_n^k \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{C_n^1}{2^n} + \frac{C_n^2}{2^n} + \cdots + \frac{C_n^{N_1}}{2^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{2^n} + \cdots + \frac{1}{N_1!} \frac{n(n-1)\cdots(n-N_1)}{2^n} \right] = 0 \end{aligned}$$

及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{2^n} = 0$, 故对上述的 ε , $\exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{N_1} C_n^k < \frac{\varepsilon}{4N_1A}$, $\frac{|a|}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n C_n^k x_k - a \right| < \varepsilon$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n C_n^k x_k = a$.

(5) 记 $a_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1}) + (x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n})}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1})}{n} + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n})}{n} = \frac{1}{2}(a+b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1}) + (x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n-2})}{2n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} \frac{(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1})}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n-1} \frac{(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n-2})}{n-1} = \frac{1}{2}(a+b). \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{a+b}{2}$.

(6) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} - b \right| &= \left| \frac{a_1(b_n - b) + a_2(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_1 - b)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \right| \\ &\leq \frac{a_1 |b_n - b| + a_2 |b_{n-1} - b| + \cdots + a_{n-N_1} |b_{N_1+1} - b|}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \\ &\quad + \frac{a_{n-N_1+1} |b_{N_1} - b| + \cdots + a_n |b_1 - b|}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \\ &< \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-N_1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \frac{\varepsilon}{2} + A \frac{a_{n-N_1+1} + \cdots + a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + A \frac{N_1 a_{n-N_1+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-N_1+1}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + A \frac{N_1 a_{n-N_1+1}}{(n-N_1+1)a_{n-N_1+1}} = \frac{\varepsilon}{2} + A \frac{N_1}{n-N_1+1}, \end{aligned}$$

其中 $A = \max\{|b_1 - b|, |b_2 - b|, \dots, |b_{N_1} - b|\}$.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{AN_1}{n-N_1+1} = 0$, 故对上述的 $\varepsilon > 0, \exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $\frac{AN_1}{n-N_1+1} < \frac{\varepsilon}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} - b \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = b$.

(7) 由于 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}$, 所以

$$s_n r_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n} \geq 1.$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \geq 1$.

4. 证明下列结论或求极限.

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} = ab$. (安徽大学 2005, 中科院 2004,

电子科技 2002, 河北工大 2001, 山西大学 2005)

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 y_{2n} + x_3 y_{2n-2} + \cdots + x_{2n-1} y_2}{n}$. (安徽师大 2013)

解题过程:

(1) 令 $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$. 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots + |\beta_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n| = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, 所以 $\{\alpha_n\}$ 有界, 即 $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 有 $|\alpha_n| \leq M$. 于是

$$0 < \frac{|\alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n \beta_1|}{n} \leq M \frac{|\beta_n| + |\beta_{n-1}| + \cdots + |\beta_1|}{n}.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n \beta_1|}{n} = 0$. 于是

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a + \alpha_1)(b + \beta_n) + (a + \alpha_2)(b + \beta_{n-1}) + \cdots + (a + \alpha_n)(b + \beta_1)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(ab + a \frac{\beta_n + \beta_{n-1} + \cdots + \beta_1}{n} + b \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n \beta_1}{n} \right) = ab. \end{aligned}$$

(2) 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} = b$. 由(1)得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 y_{2n} + x_3 y_{2n-2} + \cdots + x_{2n-1} y_2}{n} = ab.$$

注: 本题的变换具有一般性, 常用这种变换将一般情况归结为特殊情况. 例如本例, 原来是“已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} = ab$ ”, 经变换后, 归结为“已知

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n \beta_1}{n} = 0$ ”.

5. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \cdots$). 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (几何平均值收敛公式). (重庆大学 2012, 北京工大 2003, 上海交大 2006, 华南理工 2001 ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$))

解题过程:

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则由极限的不等式性质得 $a \geq 0$.

(1) 若 $a > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n) = \ln a$. 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)} = e^{\ln a} = a.$$

(2) 若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = -\infty$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n) = -\infty$. 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)} = 0.$$

注: 当 $a = 0$ 时, 也可直接用定义证明.

6. 证明: 若 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, 并求下列极限.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(n+1)!}}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt[n]{n!}}$; (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^\alpha}$ ($\alpha > 0$); (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

(华南理工 2014, 广西师大 2003/2007, 天津工大 2005, 南开大学 2009, 扬州大学 2010, 青岛理工 2009, 四川大学 2007, 河北大学 2010, 地质大学 2002, 武汉大学 2011, 宁波大学 2006; $\alpha = 1$: 重庆大学 2013, 青岛理工 2012, 安徽师大 2007/2013)

解题过程:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{x_1} \cdot \sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

(1) 方法 1: 设 $x_n = \frac{n^n}{n!}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = e.$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = e$.

方法 2: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln x dx = -1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln \sqrt[n]{n!}}{n}} = e^{-1},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = e.$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{\ln n}{n} = e \cdot 0 = 0$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \begin{cases} e^{-1}, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha > 1, \\ \infty, & \alpha < 1. \end{cases}$

$$(4) \text{ 方法 1: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \cdot 0 = 0.$$

$$\text{方法 2: 令 } a_n = \frac{1}{n}, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

7. 设 $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$), 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (华南师大 2008, 首都师大 2005,

地质大学 2005, 桂林电子科技 2011/2008)

解题过程:

方法 1: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. 当 n 充分大时, 有 $a_n \leq q^n$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

方法 2: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, 由保号性, 对 $q < r < 1$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$. 于是当

$n > N$ 时, 有

$$0 < a_{n+1} < r a_n < r^2 a_{n-1} < \cdots < r^{n-N} a_{N+1}.$$

由两边夹定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

8. 证明下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

(上海大学 2003, 地质大学 2004, 东华大学 2002, 扬州大学 2005, 北京交大 2002, 东北师大 2003, 河北工大 2010, 上海理工 2005, 江苏大学 2007, 哈师大 2003/2008, 南京理工 2005/2012, 青岛大学 2012)

解题过程:

(1) 方法 1: 当 $a > 1$ 时, 令 $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n (h_n > 0)$, 则 $a = (1 + h_n)^n \geq 1 + n h_n = 1 + n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$. 于是

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n} < \frac{a}{n}.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

当 $a = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

当 $a < 1$ 时, 记 $b = \frac{1}{a}$, 则 $b > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = 1$.

方法 2: 记 $x_1 = a, x_n = 1, n = 2, 3, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

方法 3: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \sqrt[n]{a}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt[n]{a}}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a}{n}} = e^0 = 1$.

(2) 方法 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = 1$.

方法 2: 由于 $1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n}\cdots 1} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + (n-2)}{n}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + (n-2)}{n} = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

方法 3: 令 $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n (h_n > 0)$, 则 $n = (1 + h_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$, 即 $0 < h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

方法 4: 转证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = 1$. 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

9. 设 $a > 0, a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, 并求下列极限. (哈师大 2003)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4 + \frac{1}{2n}}$. (广西师大 2010)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+b}$. ($b=2$: 南京航空 2011; $b=1$: 山东大学, 计量学院 2009)

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}}$. (青岛大学 2014)

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k + k^n}$. ($k=2$: 山西师大 2008; $k=3$: 哈师大 2008)

解题过程:

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, 则当 n 充分大时, 有 $\frac{1}{2}a < a_n < \frac{3}{2}a$. 于是 $\sqrt[n]{\frac{1}{2}a} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3}{2}a}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

(1) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{2n}\right) = 4$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4 + \frac{1}{2n}} = 1$.

(2) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right) = 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{b}{n}} = 1$.

(3) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}} = 1$.

(4) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^k}{k^n} + 1\right) = 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k + k^n} = k \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^k}{k^n} + 1} = k$.

10. 求下列极限.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$, $a_k > 0, k=1, 2, \dots, m$. (重庆大学 2014, 东北师大 2004/2005, 浙江师大 2004, 苏州科技 2010, 电子科技 2001, 大连海事 2002, 山东师大 2010, 重庆师大 2005, 浙江工大 2012)

特例: ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$, 其中 $a, b > 0$. (南京大学 2009/2003 ($b=1$), 华东师大 2006, 暨南大学 2010, 苏州大学 2005, 扬州大学 2005, 南京理工 2001; $b=1$: 南京师大 2000, 四川师大 2013, 陕西师大 2005, 北京大学 1999/1998; $b=2006, a=2005$: 兰州大学 2006)

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, 其中 $a, b, c > 0$. (中科院 2000/2003, 辽宁大学 2004/2005, 扬州大学 2005, 湘潭大学 2009, 哈师大 2006 ($a=1, b=2, c=3$), 山东大学 2002 ($a=3, b=5, c=7$))

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}$. (湘潭大学 2011)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^2 n + 2 \cos^2 n}$. (华东师大 2005)

解题过程:

(1) 记 $A = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 则 $A \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{mA} \cdot A$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = 1$ 及两边夹定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = A.$$

由此得:

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = M = \max\{a, b\};$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max\{a, b, c\};$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n} = 5.$$

(2) 由于 $1 < \sqrt[n]{\sin^2 n + 2 \cos^2 n} = \sqrt[n]{1 + \cos^2 n} < \sqrt[n]{2}$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^2 n + 2 \cos^2 n} = 1$.

11. 求下列极限.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$. (华中师大 2003, 南航 2006, 南京师大 2006, 四川大学 2008, 武汉大学 2007)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}}$. (华中师大 05, 广西师大 2009, 河北工大 2007)

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$. (苏州大学 2012, 华中师大 04, 辽宁大学 2007, 青岛理工 2010, 安徽大学 2006,

华中科技 2008)

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \dots + \sin \frac{1}{n}}$. (华东理工 2007, 中科院 2004)

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2006}}}$. (吉林大学 2006)

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \dots + \cos^2 n}$. (华中科技 2014)

解题过程:

(1) 方法 1: 因 $(n!)^{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} \cdot \sqrt[n]{n}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$.

方法 2: 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln[(n!)^{\frac{1}{n^2}}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{2n+1} = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$.

方法 3: 因 $1 \leq (n!)^{\frac{1}{n^2}} \leq (n^n)^{\frac{1}{n^2}} \leq n^{\frac{1}{n}}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$.

(2) 方法 1: 令 $a_n = \frac{2n-1}{2n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

方法 2: 由 $\frac{1}{2n} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < 1$ 得

$$\frac{1}{\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{n}} \leq \sqrt[2]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}} < 1.$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{n}} = 1$ 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}} = 1$.

(3) 由于 $1 \leq \sqrt[2]{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[2]{1+1+\cdots+1} = \sqrt[2]{n}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{n} = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} = 1$.

(4) 由于 $\sqrt[2]{\sin 1} \leq \sqrt[2]{\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \cdots + \sin \frac{1}{n}} \leq \sqrt[2]{n} \sqrt[2]{\sin 1}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{\sin 1} = 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \cdots + \sin \frac{1}{n}} = 1.$$

(5) 由于 $1 \leq \sqrt[2]{1 + \frac{1}{2^{2006}} + \frac{1}{3^{2006}} + \cdots + \frac{1}{n^{2006}}} \leq \sqrt[2]{n}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{n} = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2006}}} = 1$.

(6) 由于

$$\sqrt[2]{\cos^2 1} \leq \sqrt[2]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leq \sqrt[2]{n}, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{\cos^2 1} = 1,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} = 1.$$

12. 证明下列命题.

(1) 设 $\{a_n\}$ 为有界正数列, $a = \sup\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n} = a$. (华东师大

2007, 西南交大 2008)

(2) 设 $\{a_n\}$ 是单调递减的非负数列, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k^n\right)^{\frac{1}{n}} = a_1$. (中科大 2006, 山东师大 2005)

(3) 设数列 $\{a_n\}$ 非负单调增加, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n)^{\frac{1}{n}} = a$. (厦门大学 2013,

南开大学 2003, 武汉大学 2012)

解题过程:

(1) 由确界定义, 对 $\forall n, a_n \leq a$; 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{N_1}$ 使得 $a_{N_1} > a - \varepsilon$. 于是当 $n \geq N_1$ 时,

$$a - \varepsilon < a_{N_1} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n a_k^n} \leq n^{\frac{1}{n}} a.$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} a = a$, 对于上述 $\varepsilon > 0, \exists N_2 > 0$, 当 $n \geq N_2$ 时, 有

$$n^{\frac{1}{n}} a < a + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n \geq N$ 时, 有

$$a - \varepsilon < \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n a_k^n} < a + \varepsilon.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n} = a$.

(2) 因 $0 \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1$, 故 $a_1 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq n^{\frac{1}{n}} a_1$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} a_1 = a_1$ 及两边夹定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} = a_1.$$

(3) 由 $a_n \leq a$ 得 $a_n \leq [a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n]^{\frac{1}{n}} \leq n^{\frac{1}{n}} a$. 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n]^{\frac{1}{n}} = a$.

13. 求下列极限.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right)$. (湘潭大学 2010, 华中师大 2001, 兰州大学 2005, 河

南师大 2010, 华南师大 2000, 重庆师大 2007)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+3} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2+2n-1} \right)$. (上海师大 2003)

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$. (昆明理工 2014, 沈阳工大 2014, 河海大学 2010/2002, 兰州

大学 2008, 辽宁大学 2003, 南京大学 2004, 湖北大学 2004, 上海师大 2006, 上海理工 2005, 中南大学 2007, 天津大学 2005, 温州大学 2009/2013, 河南师大 2008, 广西师大 2012, 河南大学 2001, 曲阜师大 2011, 山西师大 2010, 陕西师大 2008, 苏州大学 2008, 新疆大学 2009, 重庆师大 2004, 人民大学 2005)

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \right)$. (湖北大学 2001)

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right)$. (湘潭大学 2008/2013, 青岛理工 2010)

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right]$. (天津大学 2001, 深圳大学 2005, 广西大学 2005)

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$. (浙江大学 2010, 厦门大学 2011)

(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{n}{n^2+\frac{1}{n}} \right)$. (青岛大学 2009)

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+2n+k}$. (湖南大学 2007)

(10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{7n}}{2n^2+1} + \frac{\sqrt{7n}}{2n^2+2} + \cdots + \frac{\sqrt{7n}}{2n^2+n} \right)$. (电子科大 2014, 陕西师大 2012)

解题过程:

(1) 由于

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} \leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+n+n} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+n+1} = \frac{1}{2},$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \frac{1}{2}.$$

(2) 由于

$$\frac{1}{n^2+2n-1} \cdot \frac{1+(2n-1)}{2} n \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+3} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2+2n-1} \leq \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{1+(2n-1)}{2} n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+2n-1} \cdot \frac{1+2n-1}{2} n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{1+2n-1}{2} n \right) = 1,$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+3} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2+2n-1} \right) = 1.$$

(3) 由于

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

且
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1,$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

(4) 由于

$$\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2-n}},$$

且
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 1,$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \right) = 1.$$

(5) 由于

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{n}{n+1},$$

且
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right) = 1.$$

(6) 方法 1: 由于

$$0 \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{n \uparrow} = \frac{1}{n}, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right] = 0.$$

方法 2: 由级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛及柯西收敛准则得证.

(7) 由于

$$\frac{2n+2}{n+1} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{2n+2}{n}, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n+1} = 2,$$

由两边夹定理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$

(8) 记 $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{n}{n^2+\frac{1}{n}}$, 则 $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1} \leq x_n \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+\frac{1}{n}}$. 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{(1+n)n}{(n^2+1)} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)n}{n^2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{n}{n^2+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{2}.$$

(9) 由于

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+2n+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+2n+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+2n+1},$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+2n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3 + 3} = \frac{1}{3}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3 + 2} = \frac{1}{3},$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+2n+k} = \frac{1}{3}.$$

(10) 由于

$$\sqrt{7} \frac{n^2}{2n^2+n} \leq \frac{\sqrt{7}n}{2n^2+1} + \frac{\sqrt{7}n}{2n^2+2} + \cdots + \frac{\sqrt{7}n}{2n^2+n} \leq \sqrt{7} \frac{n^2}{2n^2+1},$$

且
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{7} \frac{n^2}{2n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{7} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2} \sqrt{7}.$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{7}n}{2n^2+1} + \frac{\sqrt{7}n}{2n^2+2} + \cdots + \frac{\sqrt{7}n}{2n^2+n} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{7}.$$

注: n 项和极限问题一般用夹逼定理、定积分及级数等方法解决.

14. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, 并求下列极限. (厦)

门大学 2007)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right). \text{(大连理工 2006, 浙江师大 2005, 南昌大学 2009, 西南大学$$

2009/2001, 中科大 2006, 南开大学 2007, 中科院 2005, 北京理工 2004, 东北师大 2002, 湘潭大学 2007, 曲阜师大 2006, 河海大学 2002/2005, 首都师大 2000, 深圳大学 2011, 沈阳工大 2009/2012, 浙江理工 2011, 南京农大 2009, 北京工大 2004, 山东师大 2008, 浙江工商 2014)

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}. \text{(四川大学 2011)}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, (p > 0). \text{(安徽大学 2012, 南京师大 2001, 西北工大 2002, 山东科技 2011, 四$$

川大学 2001, 浙江理工 2011, 兰州大学 2006, 广州大学 2011, 青岛理工 2007, 清华大学 2000, 上海大学 2003, 杭州师大 2008, 华东理工 2002, 武汉科技 2008, 西南交大 2006, 燕山大学 2007; $p=1$: 西南大学 2008/2005; $p=2$: 上海财大; $p=3$: 暨南大学 2013, 上海财大 2005, 山东大学 2000; $p=1/2$: 东南大学 2000, 广西师大 2008, 华东理工 2004, 吉林大学 2001, 南京财大 2007, 北京师大 2007, 河北大学 2009)

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^4+\cdots+n^4}{n^\alpha}. \text{(南京农大 2007)}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right). \text{(西北大学 2013, 河南师大 2014, 重庆大学 2006, 西南大学$$

2007, 北京理工 1995, 西北大学 2004, 聊城大学 2009/2010/2011, 曲阜师大 2005/2010, 河海大学 2003, 湖南农大 2011, 吉林大学 2007, 青岛大学 2005/2012, 陕西师大 2006/1998, 天津工大 2006, 郑州大学 2004, 中北大学 2005, 重庆师大 2003/2008)

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2}. \text{(武汉大学 2008)}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}. \text{(桂林电子科技 2013, 暨南大学 2010)}$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right]. \text{(桂林电子科技 2009, 东华大学 2005)}$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right). \text{(南京大学 2006, 中南大学 2010, 宁波大学 2010, 杭州$$

师大 2010, 重庆师大 2006)

$$(10) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right). \text{(中南大学 2013, 南开大学 2005)}$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sqrt{n^2-1^2} + \sqrt{n^2-2^2} + \cdots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}). \text{(苏州大学 2002, 首都师大 2002, 南京师大$$

2004, 广州大学 2008)

$$(12) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^3} \sqrt{n^2-k^2}. \text{(北京工大 2010, 北京理工 2001)}$$

$$(13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n-1}{n}} \right). \text{(杭州师大 2006, 山东科技 2009, 西北大学 2001, 重庆师$$

大 2005, 徐州师大 2008)

$$(14) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right). \quad (x = \pi : \text{中南大学 2009, 新疆大学 2005, 华中师大}$$

2004; $x = 1$: 北京理工 2007)

$$(15) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \sin \frac{k-1}{n} \pi}. \quad (\text{湖南师大 2006})$$

$$(16) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\cos \frac{k\pi}{n}}{2 + \sin \frac{k\pi}{n}}. \quad (\text{四川大学 2000, 计量学院 2010})$$

$$(17) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{\frac{k}{n}}. \quad (\text{吉林大学 2010})$$

$$(18) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + e^{\sqrt{\frac{1}{n}}} + e^{\sqrt{\frac{2}{n}}} + \cdots + e^{\sqrt{\frac{n-1}{n}}} + e \right). \quad (\text{中科院 2007})$$

$$(19) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n + n e^{\frac{2k}{n}}}. \quad (\text{广西师大 2010})$$

$$(20) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k\pi}{n}. \quad (\text{东北师大 2013})$$

$$(21) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + 2\sqrt{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + n\sqrt{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right]. \quad (\text{安徽师大 2010})$$

$$(22) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \frac{\sin n}{n} + \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right]. \quad (\text{云南大学 2013})$$

分析: 定积分为一特定和式的极限. 对具有特殊结构的 n 项和或积形式的极限, 可考虑用定积分法求解.

解题过程:

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 由定义得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

特别地: 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$. 由此得

$$(1) \text{ 方法 1: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

方法 2: 见题 40(2).