高等院校应用型人才培养规划教材——数学类

线性代数

王三福　王丙参　何建伟　编

西南交通大学出版社

·成　都·

内容简介

本书针对高等院校非数学专业教学大纲与《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》对线性代数的要求，采用学生易于接受的方式，科学、系统地介绍了线性代数的理论及其应用. 编写的主要思想是：在满足教学基本要求的前提下，适当降低理论推导的难度，注重解决问题的矩阵方法，突出 MATLAB 实现. 全书共 5 章，主要讲解行列式、矩阵及其运算、线性方程组与向量、矩阵的特征值与特征向量、二次型. 为适应信息化社会，我们在附录中给出了 MATLAB 简明教程与线性代数实验以供读者参考.

本书可作为理工类、经济类、管理类各专业的本科生教材，也可作为相关专业的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 王三福，王丙参，何建伟编. —成都：西南交通大学出版社，2016.8

高等院校应用型人才培养规划教材. 数学类

ISBN 978-7-5643-4832-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… ②王… ③何…Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 171870 号

高等院校应用型人才培养规划教材 —数学类

线性代数

王三福 王丙参 何建伟 编

责任编辑 张宝华
特邀编辑 刘文佳
封面设计 何东琳设计工作室

印张 12 **字数** 300千
成品尺寸 185 mm×260 mm
版本 2016 年 8 月第 1 版
印次 2016 年 8 月第 1 次
印刷 成都市书林印刷厂

出版 发行 西南交通大学出版社
网址 http://www.xnjdcbs.com
地址 四川省成都市二环路北一段111号 西南交通大学创新大厦21楼
邮政编码 610031
发行部电话 028-87600564 028-87600533

书号：ISBN 978-7-5643-4832-8
定价：29.80元

课件咨询电话：028-87600533

前　言

大学数学是自然科学的基本语言，是用来探索现实世界物质运动机理的主要手段. 目前，很多社会科学领域也引入了数学，比如经济、管理等专业，甚至文科专业也开设“文科高等数学”课程，以提升大学生的必备数学素养. 大学数学是一门科学语言，现在已经变为高校各专业的通识教育. 对于非数学专业的大学生而言，大学数学教育的意义不仅仅在于它是一种学习专业的工具，同时也能培养学生的理性思维品格和思辨能力，启迪学生的智慧，开发学生的创造力，其价值远非专业技术教育所能相提并论的.

随着高校的扩招，我国高等教育快速实现了从精英教育到大众化教育的过渡. 同时也给我国高等教育带来了一系列的变换、问题和挑战. 进入大众化教育以后，首当其冲受到影响的就是大学数学. 对于一般本科院校而言，学生基础薄弱，加上传统大学数学教材重理论，轻实践，高雅，枯燥，使得学生难以接受，导致学生厌学，后继专业课难以开展等. 另外，为了培养应用型人才，课程内容设置开始淡化理论推导，突出实践，大学数学课的课时也越来越少，比如线性代数、概率统计都压缩为 36 课时，高等数学则变为一学期，只开设 72 课时. 另外，随着社会的发展，计算机越来越普及，所以我们只有借助数学软件的强大功能才能站得更高，走得更远. 针对这种现象，我们尝试组织编写了系列大学数学公共课教材：

高等数学简明教程　（72～90 课时）；
线性代数　　　　　（36～54 课时）；
概率统计简明教程　（36～54 课时）.

为了突出特色，本套教材将以最少的课时讲解与专业有关的数学知识，以理工科通用数学软件 MATLAB 为基础增加计算机实现，辅助教学，同时，还要保证理论完整，逻辑严谨，妙趣横生，主要适用于普通高等院校课时较少的大学数学公共课. 值得一提的是，我们在教材中穿插了历史上有杰出贡献的数学家的故事，从他们身上既可以领略数学家坚韧不拔地追求真理的人格魅力和科学精神，也可以体会形形色色的人生，从而给自己以启迪. 一套教材构不成一门课，只有教师和学生在一起才能构成一门课，而教材只是支持这门课的信息资源，因此教师只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，充分发挥老师的指导作用，引导学生主动学习，让学生真正思考，才能把内容讲活，才能让学生终身受益. 为此，老师要以“没有教不会的学生，只有不会教的老师”的高标准来严格要求自己，然而作为学生，绝不可以拿着这个理由作为挡箭牌，被动接受知识，要充分发挥主观能动性，要有“就是没有老师教，我照样考 100 分”的精神.

“线性代数”作为高等学校本科数学基础中的重要的必修课程，是中学代数的继续和提高，是进一步学习相关专业课的必备基础. 基础课毕竟不是专业课，本着“服务专业，兼顾数学体系”的原则，本书不攀比难度，做到难度适当，深入浅出，举一反三，融会贯通. 在编写过程中，我们博采百家之长，注重基本理论、概念、方法的叙述，坚持抽象概念形象化的原则，关注应用能力、解题能力的培养，读者只需有高等数学基础即可读懂本书. 由于在每年

考研中，数 1、数 2、数 3 的线性代数内容占到了 20% 左右，所以我们也参考了最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，力求教材的体系、内容既符合数学学科本科生的特点，又兼顾报考研究生的学生需求，书中很多题目直接采用了历年考研真题. 例题可以加深读者对理论的理解，为此，我们配备了大量例题和习题，难度各异，以满足不同学生的需求. 注意，本书介绍的例题和习题是按照读者了解行列式、矩阵等的运算规则，阐明思路，介绍方法来编写的，所以都非常简单. 然而，在源于实际问题的数学模型中，情况就完全不同了，这时，仅用笔和纸的手工运算无疑太费时费力，而且几乎不可能实现，因此，把这些烦琐的计算用计算机和数学软件来完成已成为首选. 国外近几年通用的线性代数教材都附有数学软件，借助数学软件 MATLAB 辅助教学也是本书特色之一.

全书共 5 章，分别为行列式、矩阵及其运算、线性方程组与向量、矩阵的特征值与特征向量、二次型. 书末附录是主体内容外的选学部分. 附录 1、2 分别给出 MATLAB 简明教程与线性代数实验以供读者参考并加深对正文的理解；附录 3、4 供读者课外阅读，以了解代数学发展历史，感受代数学家的个人魅力，探讨学习方法.

本书可作为理工类、经济类、管理类各专业的本科生教材，也可作为相关专业的参考用书. 线性代数，一般每学期总学时为 36～54 学时，包括习题课. 建议按第 1 到第 5 章的顺序分配学时如下：

（1） $6+8+12+6+4=36$ 学时；

（2） $10+12+14+8+6=50$ 学时，线性代数实验 4 学时.

以上建议仅供参考，任课老师可根据实际需要合理安排各章学时并选择教学重点. 如果课时非常少，书中带*号的内容可供读者自学. 当今社会，计算机非常普及，有条件的院校，可安排一定的上机课辅助教学，体会 MATLAB 的神奇. 当然，学生也可利用个人电脑自学线性代数实验.

本书由天水师范学院数学与统计学院王三福、王丙参、何建伟共同编写，第 1 章及附录 2、3、4 由王丙参编写，第 2、3、5 章、附录 1 及参考答案由王三福编写，第 4 章由何建伟编写. 我们经常在一起讨论、切磋写法，再经过反复讨论和修改后定稿. 本书在编写过程中，得到了学院领导的大力支持，代数教研室的同事认真审阅了书稿，提出了宝贵的修改意见；得到了西南交通大学出版社有关各方和同仁的大力支持，特在此一并致以诚挚的谢意！

虽然我们希望编写出一本质量较高、适合当前教学实际需要的教材，但由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳切希望读者批评、指正，使本教材得以完善.

编　者

2016 年 3 月

1　行列式

行列式是线性代数中的一个基本概念，也是讨论许多问题的一个基本工具. 本章通过线性方程组引入二阶、三阶行列式的定义，进而归纳出n阶行列式的定义，并讨论其性质和计算方法，最后介绍行列式在解特殊线性方程组中的应用，即克莱姆（Cramer）法则.

1.1　行列式定义

作为行列式定义的准备，需要引入一些概念，我们首先讨论数域、排列与对换.

1.1.1　数域、排列与对换

在研究某些问题时，常常需要限定所研究对象的取值范围. 例如，求方程$x^2+1=0$的根，在实数范围内无解，但在复数范围内有解，解为$\pm\mathrm{i}$. 又如，在整数范围内，除法不是普遍可做的，因为商不一定是整数，但在有理数范围内，只要除数不为零，除法总是可做的. 另一方面，这些范围不同的实数、复数有着许多共同的运算（指加法、减法、乘法和除法）性质. 为了在讨论中能把具有这些共同运算性质的数集统一处理，我们引入一个一般概念.

定义 1.1.1　设P是至少由两个不同复数组成的集合，若P中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍为P中的数（简称四则运算封闭），则P就是一个**数域**.

显然，全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合都是数域，分别用字母$\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$来表示，且有$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. 注意，全体整数的集合$\mathbf{Z}$不是数域，这是因为$2,3\in\mathbf{Z}$，且$3\neq 0$，但$\dfrac{2}{3}\notin\mathbf{Z}$，这表明$\mathbf{Z}$对除法不封闭.

定义 1.1.2　由$1,2,\cdots,n$（$n>1$）组成的一个n元有序数组称为一个n**级排列**，简称**排列**，记作$i_1i_2\cdots i_n$.

例如，1234，2431 都是 4 级排列，45231 是一个 5 级排列. 2 级排列共有 2 个，它们分别是 12 和 21；3 级排列共有 6 个，它们分别是

$$123，132，213，231，312，321.$$

n级排列的总数是$\mathrm{P}_n=n!$，是偶数. 推导如下：

从n个元素中任取一个放在第一个位置上，有n种取法；

从剩下的$n-1$个元素中任取一个放在第二个位置上，有$n-1$种取法；

这样继续下去，直到最后剩下的一个元素放在第n个位置上，只有 1 种取法. 于是

$$\mathrm{P}_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!\,.$$

显然，在n级排列中，除标准排列$12\cdots n$是按自然顺序（即由小到大的顺序）排列的以

外，其余的 n 级排列都或多或少地破坏了自然顺序，例如，在 3 级排列 312 中，3 比 1 和 2 都大，但 3 排在 1 和 2 的前面.

通常，标准排列 $12\cdots n$ 也称为**自然排列**.

在一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

设 $i_1i_2\cdots i_n$ 为一个 n 级排列，可以按照下列两种方法求 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

（1）先求出排在 1 前面的数码的个数，不妨设为 t_1，则有 t_1 个数码与 1 构成逆序； 然后求出排在 2 的前面且比 2 大的数码的个数，不妨设为 t_2，则有 t_2 个数码与 2 构成逆序；如此继续下去，最后求出排在 $n-1$ 的前面且比 $n-1$ 大的数码的个数，不妨设为 t_{n-1},则有 t_{n-1} 个数码与 $n-1$ 构成逆序，则

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=\sum_{k=1}^{n-1}t_k\ .$$

（2）由于 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 n 个自然数的一个排列，考虑元素 i_k， $k=1,2,\cdots,n$，如果比 i_k 大的且排在 i_k 前面的元素有 t_k 个，就说 i_k 这个元素的逆序数是 t_k. 全体元素的逆序数总和

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+\cdots+t_n=\sum_{k=1}^{n}t_k\triangleq t\ .$$

显然，从计算机编程的角度考虑，方法（2）更容易实现.

例 1.1.1 求 $\tau(346521)$.

解 （1）由于在 6 级排列 346521 中，与 1 构成逆序的数码个数 $t_1=5$，与 2 构成逆序的数码个数 $t_2=4$，与 3 构成逆序的数码个数 $t_3=0$，与 4 构成逆序的数码个数 $t_4=0$，与 5 构成逆序的数码个数 $t_5=1$，因此，

$$\tau(346521)=\sum_{i=1}^{5}t_i=5+4+0+0+1=10\ .$$

（2） $\tau(346521)=\sum_{i=1}^{6}t_i=0+0+0+1+4+5=10$.

对方法（2），MATLAB 实现如下：

```
x=[3 4 6 5 2 1];t=0;y=[];
n=length(x);                  % 数据 x 的长度
for i=1:1:n
    y(i)=length(find(x([1:i])>x(i)));
end
y                             % y(i)是 x(i)的逆序数
t=sum(y)                      % t 表示排列 x 的逆序数
```

运行结果如下：

```
y =
     0     0     0     1     4     5
t =
```

例 1.1.2 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

解 由于在 n 级排列 $n(n-1)\cdots 21$ 中与 k ($k=1,2,\cdots,n$)构成逆序的数码个数 $t_k=n-k$ ，因此有：

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=\sum_{k=1}^{n-1}t_k=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

例 1.1.3 求 3 级排列中所有的排列的逆序数.

解 由逆序定义可知

$$\tau(123)=0+0=0\text{ ，}\quad \tau(132)=0+1=1\text{ ，}$$
$$\tau(213)=1+0=1\text{ ，}\quad \tau(231)=2+0=2\text{ ，}$$
$$\tau(312)=1+1=2\text{ ，}\quad \tau(321)=2+1=3\text{ .}$$

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

由例 1.1.3 知，在 3 级排列中，有三个偶排列，即 123，231，312；有三个奇排列，即 132，213，321.

定义 1.1.3 在一个排列中，如果把某两个数码的位置互换，而其余的数码不动，就得到一个新的排列. 这样一个变换称为一个**对换**. 相邻数码的对换称为**相邻对换**.

比如，3 级排列 231 是偶排列，经过 1，2 两数码的对换，就可得到排列 132，此排列是奇排列；3 级排列 321 是奇排列，经过 1，3 两数码的对换，就可得到排列 123，此排列是偶排列.

定理 1.1.1 对换改变排列的奇偶性.

证明[*] 先证相邻对换的情形.

不妨设排列为 $a_1a_2\cdots a_labb_1b_2\cdots b_m$ ，对换 a 与 b ，可得到新排列

$$a_1a_2\cdots a_lbab_1b_2\cdots b_m\,.$$

很显然，对换 a 与 b ，并不改变数码 $a_1,a_2,\cdots,a_l;b_1,b_2,\cdots,b_m$ 的逆序数，而只改变了 a 与 b 的逆序数：当 $a<b$ 时，经对换后，a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变； 当 $a>b$ 时，经对换后， a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1，即有

$$\tau(a_1a_2\cdots a_lbab_1b_2\cdots b_m)=\tau(a_1a_2\cdots a_lbab_1b_2\cdots b_m)\pm 1\text{ ，}$$

由此可得，排列 $a_1a_2\cdots a_labb_1b_2\cdots b_m$ 与 $a_1a_2\cdots a_lbab_1b_2\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

不妨设排列为 $a_1a_2\cdots a_lab_1b_2\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ ，对其作 m 次相邻对换，变成

$$a_1a_2\cdots a_labb_1b_2\cdots b_mc_1\cdots c_n\text{ ，}$$

再对此排列作 $m+1$ 次相邻对换可得新排列

$$a_1a_2\cdots a_lbb_1b_2\cdots b_mac_1\cdots c_n\text{ ，}$$

即从排列 $a_1a_2\cdots a_lab_1b_2\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1a_2\cdots a_lbb_1b_2\cdots b_mac_1\cdots c_n$ 经过了 $2m+1$ 次相邻数码

的对换，因此，由相邻对换改变排列的奇偶性可得这两个排列的奇偶性不同.

由定理 1.1.1 知排列奇偶性的变化与对换次数有关，即若对换次数为偶数，则排列的奇偶性不变；若对换次数为奇数，则排列的奇偶性改变. 由此可得下列推论.

推论 1 奇排列变成偶排列的对换次数为奇数；而奇排列变成奇排列的对换次数为偶数.

推论 2 在全部 n 级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 设在全部 n 级排列中，奇、偶排列的个数分别为 p 和 q，若对 p 个奇排列施行一次相同的对换，则由定理 1.1.1 知，得到 p 个不同的偶排列，由于偶排列的总个数为 q，因此有 $p \leqslant q$.

同理可得，$q \leqslant p$，从而 $p = q = \frac{n!}{2}$

1.1.2 行列式概念

我们先从解二元和三元线性方程组引入二阶和三阶行列式的概念及其计算法则.

用消元法解二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}. \tag{1.1.1}$$

用加减消元法可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1.1)有唯一解，即

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

这里，称代数式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为**二阶行列式**，用符号表示为

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

其中，数 a_{ij} 称为行列式的**元素**，横排的称为**行**，竖排的称为**列**. a_{ij} 的两个下标表示该元素在行列式中的位置，第一个下标 i 称为**行标**，表示该元素所在的行，第二个下标 j 称为**列标**，表示该元素所在的列，常称 a_{ij} 为行列式的 (i, j) 元素. 而称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为二元线性方程组（1.1.1）的**系数行列式**.

由二阶行列式的定义，（1.1.2）式可用二阶行列式叙述为:

当方程组（1.1.1）的系数行列式 $D \neq 0$ 时，该方程组有唯一解，即

$$x_1=\frac{D_1}{D}，\quad x_1=\frac{D_2}{D}.$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

注意，这里的分母 D 是方程组（1.1.1）的系数所确定的二阶行列式（系数行列式），x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

类似地，对三元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}，\tag{1.1.3}$$

称代数式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

为**三阶行列式**，也称为**三级行列式**，用符号表示为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

显然，我们可以验证：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

这个结论很重要，即**行列式按行展开公式**，它的一般形式会在后面给出.

当方程组（1.1.3）的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，该方程组有唯一解，即

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}，$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

行列式中从左上角到右下角的对角线称**为主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为**副对角线**. 三阶行列式的展开式可用对角线法得到. 三阶行列式的**对角线法则**，如图 1.1.1

所示.

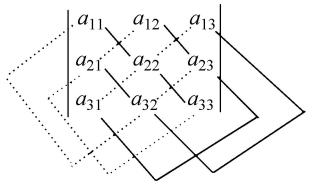

图 1.1.1

其中三条实线看作平行于主对角线的连线，三条虚线看作平行于副对角线的连线，每一条实线上的三个元素的乘积带正号，每一条虚线上的三个元素的乘积带负号，所得六项的代数和就是三级行列式的展开式.

例 1.1.4 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解 由行列式的定义可知

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} &= 1\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 4\times\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1\times[2\times(-2)-1\times 4]-2\times[(-2)\times(-2)-1\times(-3)]-4\times[(-2)\times 4-2\times(-3)] \\ &= -8-14+8=-14 . \end{aligned}$$

MATLAB 实现如下：

```
D=[1 2 -4;-2 2 1;-3 4 -2];
det(D)                                  % 行列式 D 的值
```

运行结果如下：

```
ans =
   -14
```

例 1.1.5 利用对角线法则计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

解 由对角线法则，得

$$D=acb+bac+bac-c^3-b^3-a^3=3abc-a^3-b^3-c^3 .$$

从二阶和三阶行列式的定义可以看出，二阶和三阶行列式有以下特点:

（1）二阶行列式和三阶行列式分别是 $2!$ 和 $3!$ 项的代数和；

（2）每一项分别是取自不同行不同列的 2 个和 3 个元素的乘积；

（3）每一项都带有符号，且一半带有正号，一半带有负号. 当行标构成的排列是标准排列时，这一项的符号是由其列标构成的排列的奇偶性决定的，即当列标构成的排列是奇排列时，这一项带有负号；而当列标构成的排列是偶排列时，这一项带有正号.

总之，二阶和三阶行列式可分别表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3} ,$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2}$ 和 $\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 分别表示对所有 2 级和 3 级排列求和.

下面把二阶和三阶行列式推广到 n 阶行列式.

定义 1.1.4 称 $n!$ 项的代数和

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

为 n **阶行列式**，也称为 n **级行列式**，简记为 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i, j) 元素. 用符号表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} ,$$

这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $12 \cdots n$ 的一个排列， $a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$ 是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，且 $a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$ 按下列规则带有符号: 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时，带有正号；当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时，带有负号.

当 $n = 1$ 时，一阶行列式就是数 $|a_{11}| = a_{11}$. 注意，不要与绝对值记号相混淆.

一般地，在定义 1.1.4 中， n 阶行列式中的项可写成 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$，利用排列的性质，不难证明 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$. 于是 n 阶行列式的等价定义为：

定义 1.1.5*
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} ,$$

这里 $\sum\limits_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

定义 1.1.6*
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} ,$$

这里 $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

显然，定义 1.1.4 和定义 1.1.6 可以看作定义 1.1.5 的特殊情形.

例 1.1.6 设 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{4j}a_{54}a_{6k}$ 为 6 阶行列式中带正号的项，求 i,j,k 的值.

解 在项 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{4j}a_{54}a_{6k}$ 中，行标构成的排列为标准排列，列标构成的排列为 $i35j4k$，且 i,j,k 的可能取值有下面六种情况

$$i=1,j=2,k=6;\quad i=1,j=6,k=2;\quad i=2,j=1,k=6;$$
$$i=2,j=6,k=1;\quad i=6,j=1,k=2;\quad i=6,j=2,k=1.$$

又因为项 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{4j}a_{54}a_{6k}$ 在 6 级行列式中带正号，且

$$\tau(135246)=3,\tau(235641)=7,\tau(635142)=11,$$
$$\tau(135642)=6,\tau(235146)=4,\tau(635241)=12,$$

所以 i,j,k 的取值为

$$i=1,j=6,k=2;\quad i=2,j=1,k=6;\quad i=6,j=2,k=1.$$

例 1.1.7 在四阶行列式 D 中，

（1）项 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 前面应取的正负号是什么？

（2）乘积 $a_{31}a_{21}a_{42}a_{23}$ 是否是行列式 D 中的项？

解 （1）适当交换所给项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列，得到

$$a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}=a_{12}a_{24}a_{31}a_{43},$$

这时，相应列标排列逆序数 $\tau(2413)=3$ 是奇数，因而项 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 前面应取负号.

（2）在乘积 $a_{31}a_{21}a_{42}a_{23}$ 中，元素 a_{21} 和 a_{23} 的行标都是 2，说明这两个元素皆来自第 2 行，所以乘积 $a_{31}a_{21}a_{42}a_{23}$ 不是行列式 D 中的项.

例 1.1.8 证明下面两个等式：

（1）**右上（左下）三角形行列式**（主对角线下面（上面）的元素全为零的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii};$$

（2）**左上（右下）三角形行列式**（副对角线下面（上面）的元素全为零的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

分析 （1）中的行列式中，主对角线下面（上面）的元素全为零，而（2）中的行列式中，副对角线下面（上面）的元素全为零，因此，在它们的展开式中有一些项为零，只需求出不为零的项即可.

证明 （1）由于当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，因此，此行列式中可能不为 0 的元素为

$$a_{p_j j}, p_j \leqslant j,\ j=1,2,\cdots,n\ .$$

而在所有 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中满足条件 $p_j \leqslant j(j=1,2,\cdots,n)$ 的排列只有一个标准排列 $12\cdots n$，从而此行列式展开式中不为零的项只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，此项的符号为正. 由此得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

类似地，可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

（2）由于在此行列式中，第 n 行的元素除 a_{n1} 外，其余的都为零，因此，在此行列式的展开式中，只需考虑 $j_n=1$ 的项.

而在第 $n-1$ 行中，除 $a_{n-1,1},a_{n-1,2}$ 外，其余的元素都为零，因此，$j_{n-1}=1$ 或 $j_{n-1}=2$. 又因为 $j_n=1$，所以，$j_{n-1}=2$. 依次这样下去，在此行列式的展开式中，除 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 外，其余的项全为零，又 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 的符号 $(-1)^{t(n(n-1)\cdots 21)}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}\ .$$

类似地，可得

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}\ .$$

特别地，

主对角形行列式(主对角线以外的元素全为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

副对角形行列式（副对角线以外的元素全为零的行列式）

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} .$$

三角形行列式为常用的特殊行列式，其计算方便，应用广泛.

1.2　行列式的性质

尽管在行列式的定义中给出了计算行列式的具体方法，但其计算量是很大的，对于一般的高阶（$n \geqslant 4$）行列式，直接利用定义计算会很困难或几乎不可能. 例如，计算一个 20 阶行列式，需作 $19\times 20!$ 次乘法，用每秒运算亿万次的计算机，也需要计算一千年才行. 虽然 MATLAB 软件很容易求出数值型行列式的值，但若行列式的元素都是字母时，用 MATLAB 软件求解也可能很不方便. 因此，非常有必要研究行列式的性质，揭示 n 阶行列式的运算规律，进而简化其计算，而且这对行列式的理论研究也很重要. 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**，即将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式就是转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证明*　记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D^{T} 的 (i,j) 元为 b_{ij}，则 $b_{ij}=a_{ji}$，$i,j=1,2,\cdots,n$. 按定义

$$D^{\mathrm{T}} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} = D .$$

由此性质可知，行列式中的行和列具有同等的地位，即行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然.

性质 2　互换行列式的两行（列），行列式变号.

证明*　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 对换 i,j 两行得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，于是

$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\ , \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数. 设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，故

$$D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D\ .$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列，交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式的值等于零.

证明　把相同的两行互换，可得 $D=-D$，故 $D=0$.

例 1.2.1　$$D=\begin{vmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}=\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1\ ,$$

将第 1 行与第 2 行互换后得

$$D=\begin{vmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}=-\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=-1\ .$$

性质 3　行列式的某一行（列）的所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以行列式.

第 i 行（或列）乘以 k，记作 $r_i\times k$（或 $c_i\times k$）.

推论　行列式任意一行（列）的公因子可以提到行列式外面.

第 i 行（或列）提出公因子 k，记作 $r_i\div k$（或 $c_i\div k$）.

例 1.2.2　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}$.

解　显然，我们有

$$D^{\mathrm T}=\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}=-D\ .$$

又因为 $D^{\mathrm T}=D$，所以 $D=0$.

由性质 2、性质 3 的推论立即可得：

性质 4　如果行列式中有两行（列）元素成比例，则行列式的值等于零.

性质 5 如果行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，行列式关于该列（行）可分解为两个行列式，则原行列式的值等于两个行列式的值之和.

比如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 4、性质 5 立即可得：

性质 6 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列（行）对应的元素上去，行列式不变.

例如，以数 k 乘以第 j 行（或列）加到第 i 行（或列）上，记作 r_i+kr_j （或 c_i+kc_j ）.

利用行列式的性质可以简化行列式的计算，特别是利用 r_i+kr_j （或 c_i+kc_j ）可以把行列式中许多元素化为 0. 在计算行列式时，一个常用的方法就是利用 r_i+kr_j 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式值.

例 1.2.3 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=10$，求三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

解 由行列式的性质可知：

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=\!=\!=} (-1)^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^2\times 10 = 10 .$$

例 1.2.4 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，求三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 4a_{11} & 4a_{12} & 4a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{23}-3a_{33} \end{vmatrix}.$$

解 由行列式的性质可知：

$$\begin{vmatrix} 4a_{11} & 4a_{12} & 4a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{23}-3a_{33} \end{vmatrix} \overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 4a_{11} & 4a_{12} & 4a_{13} \\ 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{23}-3a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1\div 4}{=\!=\!=} -4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{23}-3a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+3r_3} -4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \div 2} -4\times 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -8 .$$

例 1.2.5　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解　由行列式的性质可知：

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \div 6} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1, r_3-r_1, r_4-r_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\times 1\times 2\times 2\times 2 = 48 .$$

例 1.2.6　计算行列式：$\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a+b & 3a+b & 3a+b & 3a+b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} = (3a+b)(b-a)^3 .$$

例 1.2.7　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & \mathbf{0} & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 $D=D_1D_2$.

证明 对 D_1 作运算 $r_i+\lambda r_j$ ，把 D_1 化为下三角行列式，设为

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_{11} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdot\cdots\cdot p_{kk},$$

对 D_2 作运算 $c_i+\lambda c_j$ ，把 D_1 化为下三角行列式，设为

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdot\cdots\cdot q_{nn}.$$

于是，对 D 的前 k 行作运算 $r_i+\lambda r_j$ ，再对后 n 列作运算 $c_i+\lambda c_j$ ，把 D 化为下三角行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=p_{11}\cdot\cdots\cdot p_{kk}\cdot q_{11}\cdot\cdots\cdot q_{nn}=D_1D_2 .$$

1.3 行列式按行（列）展开

计算行列式的思路之二就是将所计算的行列式通过恒等变换转化为低阶的行列式，其依据就是行列式按行（列）展开. 为此，先引入余子式和代数余子式的概念.

定义 1.3.1 在 n 阶行列式 D 中，若划掉元素 a_{ij} （$1\leqslant i,j\leqslant n$）所在的第 i 行第 j 列，则称剩余的元素构成的 $n-1$ 阶行列式为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}；并称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

n 阶行列式共有 n^2 个元素，每一个元素都有其代数余子式，因此共有 n^2 个代数余子式.

例 1.3.1 已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 8 & -3 \\ 5 & 6 & 9 & 4 \end{vmatrix}$，写出元素 $a_{23}=2$ 的余子式 M_{23} 与代数余子式 A_{23}.

解 在所给四阶行列式 D 中，划掉元素 $a_{23}=2$ 所在的第 2 行与第 3 列，剩余元素所构成的三阶行列式为元素 $a_{23}=2$ 的余子式，于是有

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 7 & -3 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix},\quad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 7 & -3 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

定理 1.3.1 一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 (i,j) 元 a_{ij} 外都为零，那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即

$$D=a_{ij}A_{ij}.$$

证明* 先证 $(i,j)=(1,1)$ 的情形. 此时，由例 1.2.7（当 $k=1$ 的特殊情形）可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}A_{11}.$$

再证一般情形，此时有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为了利用前面的结果，把 D 的行列作如下调换：把 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行、第 $i-2$ 行、……、第 1 行对调，这样，数 a_{ij} 就调为 $(1,j)$ 元，调换的次数为 $i-1$.再把第 j 列依次与第 $j-1$ 列、第 $j-2$ 列、……、第 1 列对调，这样，数 a_{ij} 就调为 $(1,1)$ 元，调换的次数为 $j-1$ 次. 于是，所得行列式

$$D_1=(-1)^{i-1+j-1}D=(-1)^{i+j}D,$$

而 D_1 中的 $(1,1)$ 元为 a_{ij}，第 1 行其余元素都为 0，且 $(1,1)$ 的余子式就是 D 中 (i,j) 元的余子式 M_{ij}.

利用前面的结果，我们有

$$D_1=a_{ij}M_{ij},$$

$$D=(-1)^{i+j}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

定理 1.3.2 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in}，\quad i = 1,2,\cdots,n，$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj}，\quad j = 1,2,\cdots,n.$$

证明*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

根据定理 1.3.1，即得

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in}，\quad i = 1,2,\cdots,n.$$

类似地，若按列证明，可得

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj}，\quad j = 1,2,\cdots,n.$$

这个定理叫作**行列式按行（列）展开法则**. 利用这一法则并结合行列式的性质可以简化行列式的计算.

另外，根据行列式性质及定理 1.3.2 容易得到：

推论 行列式中任一行（列）元素与其他行（列）对应元素的代数余子式乘积之和一定等于零.

综合上面结论，可得下列重要公式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}，\quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}，$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$.

在具体计算行列式时，注意到零元素与其代数余子式乘积等于零，这一项可以不必考虑，于是应该按零元素比较多的一行（列）展开，以减少计算量.

例 1.3.2　计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \\ 8 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

解　由于第 2 列只有一个非零元素，故先按第 2 列展开

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \\ 8 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\times A_{12} + 0\times A_{22} + (-1)\times A_{32} + 0\times A_{42}$$

$$= (-1)\times(-1)^{3+2} M_{32} = (-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 8 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 8 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第 3 列展开}} 0\times A_{13} + 2\times A_{23} + 0\times A_{32} = 2\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2\times(-3) = -6 .$$

一般地，若行列式中零元素较少时，可以先应用行列式的性质将行列式某一行（列）的元素尽可能多的化为零，然后按这一行（列）展开，化为计算低一阶的行列式，如此继续下去，直到化为三角行列式或二阶行列式，求解最终结果. 当然，在具体操作时，没有固定格式，要因地制宜.

例 1.3.3　计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

解　由于第 1 列已经有两个零，故我们将第 1 行的 -2 倍加到第 3 行上去.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第 1 列展开}} 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 - 2r_3} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第 3 列展开}} 1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 13 .$$

例 1.3.4*　证明范德蒙德（Vandermonde）行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i - x_j) . \tag{1.3.1}$$

证明 用数学归纳法. 因为

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j),$$

所以，当 $n=2$ 时，（1.3.1）式成立.

现在假设（1.3.1）式对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，下证（1.3.1）式对 n 阶范德蒙德行列式成立.

设法把 D_n 降阶：从第 n 行开始，后行减去前行的 x_1 倍，有

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}.$$

按第 1 列展开，并把每列公因子 (x_i-x_1) 提出，就有

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

上式右端行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，按归纳法假设，它等于所有 (x_i-x_j) 因子的乘积，其中 $n\geqslant i>j\geqslant 2$. 故

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 2}(x_i-x_j)=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

定理 1.3.2 给出了 n 阶行列式按一行（列）展开的方法，该方法可以推广到按某 k 行（列）展开，为此先给出如下定义.

定义 1.3.2 在 n 阶行列式 D 中，任意选定 k 行 k 列（$1\leqslant k\leqslant n$），位于这些行和列交叉点处的 k^2 个元素，按原来排列组成相对保持不变的一个 k 阶行列式 M，称为**行列式 D 的一个 k 阶子式**.

在 D 中划去 k 行、k 列后，余下的元素按原来排列组成相对保持不变的一个 $n-k$ 阶行列式 N，称为 **k 阶子式 M 的余子式**.

如果 k 阶子式 M 在 D 中所在的行与列的行标和列标分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 和 $j_1,j_2,\cdots,j_k$，则 M 的余子式 N 前添加符号

$$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$$

后，所得到的 $n-k$ 阶行列式，称为 **k 阶子式 M 的代数余子式**，记作 A，即

$$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}N.$$

定理 1.3.3（拉普拉斯定理） 在行列式 D 中任意取定 k 行，$1\leqslant k\leqslant n$，则行列式 D 等

于由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式 $M_1,M_2,\cdots,M_t$ 与其对应的代数余子式 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 的乘积之和，即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t\text{，}\quad t=\mathrm{C}_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

证明略.

显然，定理 1.3.2 是拉普拉斯定理取一阶子式的特殊情形. 拉普拉斯定理主要应用于高阶行列式的某些行和列中零元素较多的行列式的计算.

例 1.3.5 用拉普拉斯定理计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{vmatrix}.$$

解 因为在行列式中按第三、第四行展开的全部二阶子式为

$$M_1=\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}=0\text{，}\quad M_2=\begin{vmatrix}0&0\\0&3\end{vmatrix}=0\text{，}\quad M_3=\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}=0\text{，}$$

$$M_4=\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}=6\text{，}\quad M_3=\begin{vmatrix}2&0\\0&0\end{vmatrix}=0\text{，}\quad M_6=\begin{vmatrix}0&0\\3&0\end{vmatrix}=0.$$

所以，由拉普拉斯定理可得

$$D=M_4A_4.$$

而 M_4 的代数余子式

$$A_4=(-1)^{(3+4)+(2+3)}\begin{vmatrix}1&4\\5&8\end{vmatrix}=-12\text{，}$$

所以 $D=M_4A_4=6\times(-12)=-72$.

1.4 克莱姆法则

行列式的一个重要应用就是解线性方程组. 含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程的方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\text{，}\tag{1.4.1}$$

与二、三元线性方程组相类似，它的解可以用 n 阶行列式表示，即有

定理 1.4.1（克莱姆（Cramer）法则） 如果线性方程组（1.4.1）的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么，方程组（1.4.1）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中，$D_j, j=1,2,\cdots,n$ 是把系数行列式 D 中第 j 列元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明* 首先证明解的存在性. 事实上，将 $x_j=\dfrac{D_j}{D}, j=1,2,\cdots,n$ 代入第 i 个方程的左端，再将 D_j 按第 j 列展开：

$$D_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}.$$

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}\right)=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ij}b_kA_{kj}\right)$$

$$=\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n}\left(b_k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}\right)=\frac{1}{D}b_iD=b_i,$$

即 $x_j=\dfrac{D_j}{D}, j=1,2,\cdots,n$ 是方程组（1.4.1）的解.

再证明解的唯一性.

设 $x_j=c_j, j=1,2,\cdots,n$ 是方程组（1.4.1）的任意一解，则

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1 \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nn}c_n=b_n \end{cases},$$

以 D 的第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$ 依次乘以上各等式，相加得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj}\right)c_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\right)c_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj}\right)c_n=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj},$$

从而

$$Dc_j=D_j.$$

由于 $D\neq 0$，因此

$$c_j=\frac{D_j}{D},\ j=1,2,\cdots,n\ ,$$

即方程的解是唯一的.

注意，如果读者对双重连加不太理解，可一项一项列出，然后寻找规律即可.

在应用克莱姆法则解线性方程组时，若有唯一解，则需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，计算量还是很大的，我们会在后面给出解线性方程组的更一般方法.

例 1.4.1 解线性方程组：

$$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\x_1-3x_2-6x_4=9\\2x_2-x_3+2x_4=-5\\x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}.$$

解 计算系数行列式：

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-2r_2,r_4-r_2}\begin{vmatrix}0&7&-5&13\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\0&7&-7&12\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第1列展开}}-\begin{vmatrix}7&-5&13\\2&-1&2\\7&-7&12\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+2c_2,c_3+2c_2}-\begin{vmatrix}-3&-5&3\\0&-1&0\\-7&-7&-2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 行展开}}\begin{vmatrix}-3&3\\-7&-2\end{vmatrix}=27\ ,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81\ ,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108\ ,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27\ ,\quad D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27\ ,$$

于是得 $x_1=3,x_2=-4,x_3=-1,x_4=1$.

MATLAB 实现为：

```
clear                %消除内存变量
D=[2 1 -5 1;1 -3 0 -6;0 2 -1 2;1 4 -7 6];b=[8 9 -5 0]';
n=length(b);
if det(D)~=0 disp('存在唯一解');
  else disp('无解或多解');
end
for i=1:1:n
    DI=D;DI(:,i)=b;x(i)=det(DI)/det(D);
```

end

x

运行结果为：

存在唯一解

x =

3　　-4　　-1　　1

例 1.4.2　已知线性方程组：

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3-x_4=3 \\ 3x_1-7x_2+6x_3+x_4=5 \\ -x_1+x_2-10x_3+5x_4=-7 \\ 4x_1-11x_2-2x_3+8x_4=0 \end{cases},$$

（1）判断有无唯一解；

（2）若有唯一解，则求唯一解.

解　（1）计算系数行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & -7 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & -10 & 5 \\ 4 & -11 & -2 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-3r_1,r_3+r_1,r_4-4r_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 4 \\ 0 & -3 & -18 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2=r_3} 0,$$

所以此线性方程组无唯一解.

注意：很多人一遇见“若有唯一解，则求唯一解”，就认为唯一解肯定存在，我们只需要求出即可. 其实不然，例 1.4.2 的唯一解就是不存在. 至于是有无穷多解，还是无解；若存在无穷多解，则如何求出它的一般表达式，都将在后面章节中得到解决.

可以证明克莱姆法则的逆否定理也是成立的，即有下面的定理：

定理 1.4.2　如果线性方程组（1.4.1）无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

线性方程组（1.4.1）右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时，线性方程组（1.4.1）叫作**非齐次线性方程组**；当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时，线性方程组（1.4.1）叫作**齐次线性方程组**，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{1.4.2}$$

对于齐次线性方程组（1.4.2）， $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是它的解，这个解称为它的**零解**. 如果一组不全为零的数是方程组（1.4.2）的解，则称其为齐次线性方程组（1.4.2）的**非零解**. 齐次线性方程组（1.4.2）一定有零解，但不一定有非零解.

对于齐次线性方程组（1.4.2），由克莱姆法则可知，如果系数行列式 $D\neq0$，则有唯一解，意味着仅有零解，无非零解；那么，在什么条件下，它一定有非零解呢？

定理 1.4.3　对于齐次线性方程组（1.4.2），

（1）如果系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组（1.4.2）没有非零解；

（2）如果齐次线性方程组（1.4.2）有非零解，则它的系数行列式 $D = 0$.

例 1.4.2 已知齐次线性方程组：

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

有非零解，求系数 k 的值.

解 计算系数行列式：

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 + r_2 + r_3} \begin{vmatrix} k+2 & k+2 & k+2 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \div (k+2)} (k+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 - r_1, r_3 - r_1} (k+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+2)(k-1)^2 .$$

由于此齐次线性方程组有非零解，因而系数行列式 $D = 0$，即

$$(k+2)(k-1)^2 = 0 ,$$

所以系数 $k = -2$ 或 $k = 1$.

例 1.4.3 若线性方程组：

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，求 λ 的值.

解 系数行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\lambda^2 ,$$

由于方程组有非零解，则 $D = 0$，于是 $\lambda = 3$，或 $\lambda = 0$.

克莱姆法则在线性方程组理论上是一个很完善的结果，它不仅给出了 n 元线性方程组有唯一解的条件，而且还给出了解与线性方程组的系数和常数项组成行列式的关系，这在理论研究上具有十分重要的作用. 但是，在后面，我们会发现在线性方程组未知量的个数与方程个数不等时，克莱姆法则会失效.

习题 1

1. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数.

（1）1234；　　（2）4132；

（2）$13\cdots(2n-1)\,24\cdots(2n)$；　　（4）$13\cdots(2n-1)\ (2n)(2n-2)\cdots 2$；

2. 计算下列二阶行列式.

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix} \tan\theta & \sin\theta \\ 1 & \cos\theta \end{vmatrix}$；

3. 计算下列三阶行列式.

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}$；

（5）$\begin{vmatrix} 1998 & 1999 & 2000 \\ 2001 & 2002 & 2003 \\ 2004 & 2005 & 2006 \end{vmatrix}$；　　（6）$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$；

（7）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　　（8）$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；

4. 证明 $D=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=0$.

5. 已知四阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix}=1$，则 a 是什么？

6. 计算四阶行列式.

（1）$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$；

（2）$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$；

（3）$D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$；

（4）$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$；

7. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

8. 已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 & 3 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & -2 & k \end{vmatrix}=0$，在实数范围内，元素 k 是多少？

9. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

10. 计算下列各行列式.

（1）$D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中对角线上的元素都是 a，未写出的元素都是 0；

（2）$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$；

（3）$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$；

（4）$D_n=\det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=|i-j|$.

11. 用克莱姆法则解下列方程组：

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2+x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \end{cases}$；

（2）$\begin{cases} 5x_1+6x_2=1 \\ x_1+5x_2+6x_3=0 \\ x_2+5x_3+6x_4=0 \\ x_3+5x_4=1 \end{cases}$；

（3）$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-3x_2+3x_3+2x_4=5 \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=3 \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=4 \end{cases}$；

（4）$\begin{cases} x_1-3x_3-6x_4=9 \\ 2x_1-5x_2+x_3+x_4=8 \\ -x_2+2x_3+2x_4=-5 \\ x_1-7x_2+4x_3+6x_4=4 \end{cases}$

12. 求λ取何值时，齐次线性方程组：

$$\begin{cases} (5-\lambda)x+2y+2z=0 \\ 2x+(6-\lambda)y=0 \\ 2x+(4-\lambda)z=0 \end{cases}$$

有非零解.

13. 若齐次线性方程组：

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$$

有非零解，求常数λ的值.

全国研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授的智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料，其中每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势. 因此，对照《数学考试大纲》，分析、研究这些试题不仅可以展示出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点和命题的思路与规律，而且通过反复练习，可以明确学习方向，从容学习，事半功倍.

本书习题部分给出了历年考研真题以供读者参考. 注意，由于考研题综合性强，难免会用到部分后面的知识点，故希望读者认真思考，若实在不会，可以放一放. 最后，建议读者把本书中的全部试题做几遍，直到对所有题目一见到就能熟练地、正确地解答出来. 多做题，多做难题，对您终身有益！

考研真题

从 1987 年全国统考以来，行列式的题以填空、选择为主，题量不多，偏重简单论证. 这些考题中不仅考查行列式的概念、性质及计算，还涉及矩阵、向量、方程组、特征值、二次型等知识点.

1.（97，数 4）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$（　　）.

2.（99，数 2）记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4