高等职业教育轨道交通类校企合作系列教材

土建工程应用数学

主　编　张聚贤　刘玉航

副主编　范玉忠

西南交通大学出版社

·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

土建工程应用数学 / 张聚贤，刘玉航主编. —成都：
西南交通大学出版社，2016.11
高等职业教育轨道交通类校企合作系列教材
ISBN 978-7-5643-4860-1

Ⅰ. ①土… Ⅱ. ①张… ②刘… Ⅲ. ①土木工程－工
程数学－高等职业教育－教材 Ⅳ. ①TU12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 179055 号

高等职业教育轨道交通类校企合作系列教材

土建工程应用数学

主编　张聚贤　刘玉航

责任编辑	张宝华
特邀编辑	曹　嘉
封面设计	何东琳设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市二环路北一段 111 号 西南交通大学创新大厦 21 楼）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网址	http://www.xnjdcbs.com
印刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印张	19.25
字数	481 千
版次	2016 年 11 月第 1 版
印次	2016 年 11 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-4860-1
定价	42.00 元

课件咨询电话：028-87600533
图书如有印装质量问题　本社负责退换

前　言

数学是土建相关专业的一门重要基础课．高职院校土建相关专业学生在学习专业基础课和专业课的时候，不可避免地需要用数学知识以解决工程实际问题．本书结合高职土建相关专业学生对数学知识的需求情况，按照以能力培养为本位，以“必需”“够用”为度的基本原则来编写，注重了数学知识在土建相关专业方面的应用．

本教材在编写方式上不同于传统数学教材：在内容选择上削枝强干，贯彻少而精原则，不贪多求全，不攀高求深，文字叙述力求通俗，以便于学生接受和记忆；在结构安排上采取以工程为背景来展现数学的应用途径，旨在培养学生运用数学知识和方法解决工程实际问题的能力．本书主要有以下特色：突出数学工具课的作用，从内容的选择到具体问题的解答，都力求与专业密切结合；以实际应用为背景，为学生构建数学基本概念；强调数学思想和方法，淡化计算技巧和定理证明，注重学生解决实际问题的能力培养．

本教材共十章，主要介绍函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、工程结构截面几何性质、工程测量误差理论基础、土建工程中常用计算方法、线性代数基础、概率论基础等．建议全书总学时数为 120 学时．不同专业教学内容可根据需要进行选择和调整．

本教材中每一小节后面都配备了习题，以巩固相应小节的教学内容，供课内外练习使用．每章最后都配有一组复习题，供全章复习用．

本教材可作为高职高专土建工程类各专业的“高等数学”教材，也可以作为参加专升本考试和高等教育自学考试的自学辅导书，亦可作为相关工程技术人员参加工程师资格考试的参考用书．

本教材由辽宁铁道职业技术学院张聚贤、刘玉航担任主编，参加本书编写工作的有：辽宁铁道职业技术学院梁世国（第一、二、三章），辽宁铁道职业技术学院张聚贤（第四、五、六章），辽宁铁道职业技术学院范玉忠（第七、八章），辽宁铁道职业技术学院刘玉航（第九、十章）．

本教材在编写工作中，辽宁铁道职业技术学院解宝柱教授、姜雄基老师提出了宝贵的意见和建议，同时得到了辽宁铁道职业技术学院教务处、规划处、科研处的大力支持，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，编写时间仓促，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正．

编　者

2016 年 3 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学与初等数学有很大不同，初等数学主要研究事物相对静止状态的数量关系，而高等数学主要研究事物运动、变化过程中的数量关系. 不同的研究对象有不同的研究方法. 极限方法是高等数学中处理问题的最基本方法，高等数学的基本概念、性质和法则都是通过极限法推导出来的. 因此，极限是高等数学中最基本的概念.

本章主要介绍函数、极限和函数连续性等基本概念及性质，同时介绍土建工程中常见的一些函数，例如分布荷载、剪力与弯矩函数、挠曲线方程等，并通过一些实际问题介绍函数关系的建立. 例如，某化工厂要从 A 处铺设水管到 B 处，并要求 C 点在 B, D 之间，如图 1-1 所示. 已知 BD 段的距离为 100 米，A 到直线 BD 的距离为 20 米. 又 AC 段 1 米长度的水管排管费为 90 元，BC 段 1 米长度的水管排管费为 60 元. 设 CD 为 x 米，求从 A 到 B 的排管费 Y 与 x 之间的函数关系.

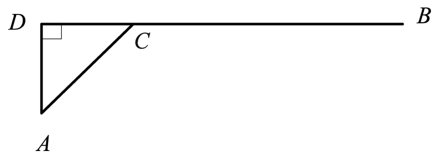

图 1-1

第一节　函　数

一、函数的概念与性质

1．变量、区间和邻域

（1）变量与常量.

在研究实际问题、观察各种现象的过程中，人们会遇到各种各样的量，对在某个问题的研究过程中，始终保持恒定值不变的量我们称之为常量，而能取不同数值的量我们称之为变量. 例如，某个学校的图书馆的面积为常量，而每天到图书馆看书的人数是变量. 在数学中，常常抛开常量或变量的具体含义，只从数值方面加以讨论.

（2）区间.

为了描述一个变量，常常需要指出其变化范围，这就要用到实数的集合，特别是区间的概念.

设有实数 a 和 b，且 $a<b$，而数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作$[a, b]$，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

类似地，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$, $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 称为半开半闭区间.

以上区间都称为有限区间，区间长度为 $b-a$. 此外，还有无限区间. 引进符号 $+\infty$（读作正无穷大）和 $-\infty$（读作负无穷大）. 例如，$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}, (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$.

全体实数的集合 **R** 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无穷区间.

（3）邻域.

设 δ 是任意正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}.$$

而把 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

把 $U(a,\delta)=\{x|0\leqslant|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的有心邻域.

2．函数的概念

（1）定义.

设有两个数集 A 和 B，f 是一个确定的对应关系. 如果对于 A 中的每一个数 x 通过 f，B 中都有唯一确定的数 y 与之对应，记作

$$y=f(x),$$

则称 f 是 A 到 B 的函数，也称 f 是 A 上的函数. A 称为函数的定义域（通常用 D 来表示），x 称为自变量，y 称为因变量，y 的取值范围称为函数的值域.

（2）定义域.

函数的定义域是函数的一个关键要素，给定一个函数，它的定义域也是给定的. 若是实际问题，则使实际问题的自变量有意义的全体实数为其定义域. 若给定函数表达式，则使该表达式有意义的自变量全体为其定义域.

求定义域时，要求熟记以下几点：

① 分母不能为 0；

② 偶次根式被开方数非负；

③ 对数的真数大于 0；

④ 三角函数应满足三角函数各自的定义域要求；

⑤ 反三角函数应满足反三角函数各自的定义域要求；

⑥ 如果函数含有分式、根式、对数式、三角函数和反三角函数，则应取各部分定义域的交集.

例 1-1　求函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域.

解：因为 $y=\sqrt{4-x^2}$，所以

$$4-x^2\geqslant 0.$$

解得 $-2\leqslant x\leqslant 2$. 所以，函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域 $D=[-2,2]$.

例 1-2　求函数 $y=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域.

解：因为 $y=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$，所以

$$3+2x-x^2\geqslant 0 \quad 且 \quad x-2>0.$$

解得 $-1\leqslant x\leqslant 3$ 且 $x>2$，所以 $2<x\leqslant 3$. 所以函数 $y=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域 $D=(2,3]$.

3．函数的性质

（1）有界性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，集合 $I\in D$. 若存在实数 M，使得对任意的 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 是 I 上的有界函数. 否则就称函数 $f(x)$ 是 I 上的无界函数.

例如，函数 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\cos x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\cos x$ 是定义域上的有界函数.

（2）单调性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\in D$. 若对于 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的函数；若

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的函数；

单调增加函数或单调减少函数统称为单调函数.

例如，函数 $y=x^2+3$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的. 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的. 而函数 $y=x+5, y=x^3+23$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内都是单调增加的.

图像特征：单调递增函数的图形从左往右呈上升趋势；单调递减函数的图形从左往右呈下降趋势.

（3）奇偶性.

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对于任意的 $x\in D$，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为偶函数；若对于任意的 $x\in D$，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

例如，函数 $y=x^2+13$ 在定义区间上是偶函数，函数 $y=x, y=x^3-12$ 在定义区间上是奇函数.

（4）周期性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在一个正数 T，使得对于任意的 $x\in D$，都有 $(x\pm T)\in D$，且

$$f(T+x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，并把 T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期，即使上式成立的最小正数.

例如，函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

4．反函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R. 对于任意的 $y\in R$，在 D 上只有唯一的 x 与之对应，且满足 $f(x)=y$. 如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，就可以得到一个新的函数：

$$x=f^{-1}(y).$$

我们称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而把函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由于函数的本质是对应法则，而与其变量所用的字母无关，因此，习惯上用 x 表示自变量，即反函数可以写为

$$y=f^{-1}(x).$$

把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一个坐标平面上，这两个图像关于直线 $y=x$ 对称.

例如，函数 $y=\sin x$ 与 $y=\arcsin x$ 就互为反函数.

二、复合函数、初等函数与分段函数

1．复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(x)\in D_1$，则由

$$y=f[g(x)], x\in D$$

确定的函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

例 1-3　设 $y=\mathrm{e}^v, v=\sin t, t=x^2+2$，试写出 $y=f(x)$ 的表达式.

解：$y=\mathrm{e}^{\sin(x^2+2)}$.

例 1-4　设 $y=\cos(5x^2-4)^4$，试给出该函数的复合过程.

解：$y=\cos u, u=v^4, v=5x^2-4$.

注意：

（1）并非任意两个函数都能复合. 例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+5$ 就不能复合成一个函数，因为 $u=x^2+5$ 的值域使 $y=\arcsin u$ 无意义.

（2）复合函数可以有多个中间变量，这些中间变量是经过多次复合产生的.

2．初等函数

（1）基本初等函数.

① 常数函数 $y=C$.

函数特性：图形为过点$(0, C)$且平行于 x 轴的直线.

② 幂函数 $y=x^{\mu}$ (μ 是常数).

函数特性：μ 为任何值时，都是无界函数；图形均经过点$(1, 1)$；$|\mu|$ 为偶数时，函数为偶函数，图形关于 y 轴对称；$|\mu|$ 为奇数时，函数为奇函数，图形关于原点对称；μ 为负数时，图形在原点间断，$x=0$ 为垂直渐近线.

③ 指数函数 $y=a^{x}(a>0, a\neq 1)$.

函数特性：图形均在 x 轴上方且经过点$(0, 1)$；当 $a>1$ 时，指数函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数单调减少；$y=a^{x}$ 的图形与 $y=a^{-x}$ 的图形关于 y 轴对称.

④ 对数函数 $y=\log_{a} x\ (a>0, a\neq 1)$.

函数特性：对数函数是指数函数的反函数；图形均在 y 轴右侧且经过点$(1, 0)$；当 $a>1$ 时，指数函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数单调减少.

⑤ 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

函数特性：正弦函数和余弦函数均是有界函数；图形均介于 $y=\pm 1$ 两条平行线之间；正弦函数是以 2π 为周期的奇函数，余弦函数是以 2π 为周期的偶函数；正切函数和余切函数都是以 π 为周期的奇函数.

⑥ 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arc}\cot x$.

函数特性：反正弦函数是正弦函数在区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上的反函数，是单调增加的有界奇函数，值域为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；反余弦函数是余弦函数在区间$[0, \pi]$上的反函数，是单调减少的有界函数，值域为$[0, \pi]$；反正切函数是正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上的反函数，是单调增加的有界奇函数，值域为$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$；反余切函数是余切函数在区间$(0, \pi)$上的反函数，是单调减少的有界函数，值域为$(0, \pi)$.

上述六类函数统称为基本初等函数.

（2）初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算而成的，并且能够用一个式子表示的函数称为初等函数，否则就是非初等函数.

例如，$y=\sqrt{3+2x-x^{2}}+\ln(x-2),\ y=\cos(3x^{2}-4)^{3}$ 是初等函数，而 $y=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx+\cdots$ 则不是初等函数，因为它并不是有限次四则运算.

3．分段函数

当一个函数的自变量在定义域内不同区间上用不同的表达式表达时，称该函数为分段函数.

例如，绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=[0,+\infty)$，图像关于 y 轴对称.

注意：求分段函数的函数值时，应先确定自变量取值的所在范围，再按相应的式子进行计算.

一般来说，分段函数不是初等函数（不能由一个式子表示出来）.

习题1.1

1．求下列函数的定义域：

（1） $y=2^{\frac{1}{x}}+\arcsin\ln\sqrt{1-x}$；

（2） $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x\leqslant 4 \\ \ln(x-4), & 4<x\leqslant 5 \end{cases}$.

2． $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是______函数（奇、偶或非奇非偶）.

3．求 $f(x)=2+|\sin 2x|$ 的最小正周期.

4．指出下列复合函数的复合过程：

（1） $y=\sin 2x^2$； （2） $y=\cos^2(2x+1)$；

（3） $y=\ln(1+x^2)$； （4） $y=\arctan[\tan^2(a+x^2)]$.

5．求下列函数的反函数：

（1） $y=\dfrac{1-x}{1+x}$； （2） $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$.

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{9-x^2}, & |x|\leqslant 3 \\ x^2-9, & |x|>3 \end{cases}$，求 $f(0), f(\pm 3), f(\pm 4), f(2+a)$.

第二节　函数的极限

函数给出了变量之间的对应关系，但研究变量，仅仅靠对应关系是不够的，还需要对变

量变化的趋势进行研究. 若一个变量在变化过程中表现出与某一常数无限接近的趋势，则说此变量在该变化过程中有极限，并称该常数值为变量的极限. 极限是微积分中最基本、最重要的概念之一. 同时极限也是微积分的基本思想和方法.

一、函数极限的定义

数列可看作定义在正整数集上的函数，它的极限可以看作当 $x\to+\infty$ 时函数极限的特殊情况. 数列的极限在高中已经学习过，下面主要介绍函数的极限.

1．自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 1-1　当自变量 x 取正值并无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数当 $x\to+\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to+\infty).$$

由定义 1-1 可知，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ 的极限为 1，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$.

定义 1-2　当自变量 x 取负值且绝对值无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to-\infty).$$

由定义 1-2 可知，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ 的极限为 1，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$.

定义 1-3　当 $|x|$ 无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

由定义 1-3 可知，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ 的极限为 1，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$.

由上述定义及例题可以得到如下结论：

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\longleftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

2．自变量趋于某个确定值时函数的极限

定义 1-4　当自变量 x 无限趋近于 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

注意：

（1） $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限是否存在，与 $f(x)$ 在 x_0 处有无定义以及在点 x_0 处的函数值无关. 也就是说，$f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限仅反映 $f(x)$ 在 x_0 周围的变化趋势，与 $f(x)$ 在 x_0 的

值无关.

（2）在定义 1-4 中，$x \to x_0$ 是指 x 以任意方式趋近于 x_0，即 x 既可以从大于 x_0 的一侧趋近于 x_0，也可以从小于 x_0 的一侧趋近于 x_0，还可以从两侧同时趋近于 x_0.

定义 1-5　当 x 从 x_0 的左侧 $(x < x_0)$ 趋近于 x_0（记作 $x \to x_0^-$）时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数当 $x \to x_0^-$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 - 0) = A .$$

定义 1-6　当 x 从 x_0 的右侧 $(x > x_0)$ 趋近于 x_0（记作 $x \to x_0^+$）时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数当 $x \to x_0^+$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 + 0) = A .$$

根据极限、左右极限的定义，不难得到如下结论：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A .$$

定理 1-1　当 $x \to x_0$ 时，函数极限存在的充分必要条件是函数在 x_0 的左极限与右极限都存在且相等.

当 $x \to \infty$ 时，函数极限存在的充分必要条件是函数当 $x \to -\infty$ 时的极限与 $x \to +\infty$ 时的极限都存在且相等.

例 1-5　设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x), \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

解：

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x-1) = -1 ,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1 ,$$

由于左极限与右极限不相等，所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

例 1-6　设函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x), \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

解：

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 ,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0 ,$$

所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

例 1-7　判断 $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 是否存在.

解：当 $x \to 0^-$ 时，$\dfrac{1}{x} \to -\infty$，所以 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to 0$，左极限存在.

当 $x\to 0^+$ 时，$\dfrac{1}{x}\to +\infty$，所以 $e^{\frac{1}{x}}\to +\infty$，右极限不存在.

因此，当 $x\to 0$ 时，左极限存在而右极限不存在，$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

二、极限的性质与运算法则

1．极限的性质

性质 1（唯一性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$.

性质 2（有界性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x)$ 有界.

性质 3（局部保号性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），则在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$.

以上性质证明从略.

2．极限的运算法则

若 $\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$，这里省略了自变量的变化趋势，以下极限均表示在自变量的同一变化趋势下的极限.

（1） $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

（2） $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$.

（3） $\lim\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

推论 1　$\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)=CA$.

推论 2　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$.

例 1-8　求 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-3x+2}{2x^2-6x+4}$（有理分式函数）.

解：这里分母极限不为零，故原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}4x^2-3x+2}{\lim\limits_{x\to -1}2x^2-6x+4}=\dfrac{3}{4}$.

从上面的例子可以看出，求有理整数函数（多项式）或有理分式函数当 $x\to x_0$ 时的极限时，只要把 x_0 代替函数中的 x 就行了；但是对于有理分式函数，这样代入后如果分母等于零，则没有意义.

例 1-9　求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

分析：当 $x\to 3$ 时，分子分母极限都是零，所以不能直接用商的极限运算法则. 可以通过约分，消去使得分子分母为零的因式.

解：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$.

例 1-10　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

分析：本题分母以零为极限，不能直接运用极限法则，但是如果把分子、分母同时乘以分子的共轭有理式，而后就可以运用极限四则运算法则.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

例 1-11　计算：（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-2}{x^3-x^2+4}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x^2+4}{x^2-2x-2}$.

分析：当 $x\to\infty$ 时，分子、分母极限都是趋于无穷大，称为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型，求该类型分式极限的方法是分子、分母同时除以 x 的最高次幂.

解：（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-2}{x^3-x^2+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}}=\dfrac{0}{1}=0$.

（2）因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}}=\dfrac{0}{3}=0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x^2+4}{x^2-2x-2}=\infty .$$

一般地，若 $a_n\neq0,\ b_m\neq0,\ m,n$ 为正整数，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & m=n\\ 0\ , & m>n\\ \infty\ , & m<n\end{cases}.$$

例 1-12　求 $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

分析：当 $x\to2$ 时，上式两项极限均为无穷大（呈现“$\infty-\infty$”型），我们可以先通分再求极限.

解：$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\dfrac{1}{4}$.

三、两个重要极限

1．第一个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,.$$

第一个重要极限的特点：

（1）函数极限是“$\frac{0}{0}$”型；

（2）形式必须一致，即 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}$ 中的三个 $\varphi(x)$ 一致.

只要满足以上两个特点，就有 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1\,.$

例 1-13　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\,.$

例 1-14　求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

解：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\,.$

例 1-15　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$

2．第二个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

或

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\,.$$

第二个重要极限的特点：

（1）函数极限是“1^∞”型；

（2）形式必须一致，即 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}$ 中的三个 $\varphi(x)$ 一致.

只要满足以上两个特点，就有 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}\,.$

例 1-16　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x+1}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x+1}=\mathrm{e}$.

例 1-17　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 6}=\mathrm{e}^{6}$.

例 1-18　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1$.

注：本例解法中用到 $\ln x$ 的连续性，后面章节将会详细说明.

例 1-19　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{(x+1)-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{-1}=\mathrm{e}^{2}$.

四、无穷小与无穷大

1．无穷小量

定义 1-7　若在自变量 x 的某个变化过程中，函数 $f(x)$ 以 0 为极限，则称函数 $f(x)$ 是此变化过程的无穷小.

例如，$\lim\limits_{x\to 2}(2x-4)=0$ ，所以函数 $f(x)=2x-4$ 是当 $x\to 2$ 时的无穷小.

注意：

（1）一个非常小的数不是无穷小，因为非常小的数极限不等于 0；

（2）常数中只有 0 是无穷小；

（3）一个变量是否是无穷小与其自变量的变化趋势有关，说一个函数 $f(x)$ 是无穷小，必须同时指明自变量的变化趋势.

例如，$f(x)=3x-9$ ，当 $x\to 3$ 时，$f(x)$ 是无穷小，当 x 不趋近于 3 时，$f(x)$ 就不是无穷小.

无穷小有以下性质：

性质 1　有限个无穷小的代数和仍然是无穷小.

性质 2　有限个无穷小的乘积仍然是无穷小.

性质 3　有界函数与无穷小的乘积仍然是无穷小.

性质 4　如果 $\lim\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ 存在，$\lim g(x)=0$ ，则必有 $\lim f(x)=0$.

以上性质证明从略.

例 1-20　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解：因为 $\dfrac{1}{x}$ 是 $x \to \infty$ 时的无穷小，$\sin x$ 是有界函数，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

2．无穷大量

定义 1-8　若在自变量 x 的某一个变化过程中，函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 在此变化过程中是无穷大量，简称无穷大.

注意：

（1）一个绝对值非常大的数不是无穷大，因为无穷大是一个变量；

（2）一个变量是否是无穷大与其自变量的变化趋势有关；

（3）无穷大必为无界函数；反之不然. 例如，当 $x \to \infty$ 时，$f(x)=x\sin x$ 是无界函数，但不是无穷大量.

3．无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

例如，当 $x \to 0$ 时，x 是无穷小，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷大.

4．无穷小的比较

设 $\lim\alpha(x)=0,\ \lim\beta(x)=0$，

（1）若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小，记作 $\beta=o[\alpha(x)]$；

（2）若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$，则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小；

（3）若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=k\ (k\neq 0)$，则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小；

（4）若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$，则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$.

例如，当 $x \to 0$ 时，$\sin x\sim x,\ x^2=o(x)$，$3x$ 是比 x^2 的低阶无穷小.

定理 1-2　在自变量的同一变化过程中，设 $\alpha\sim\alpha',\ \beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

该定理通常称为无穷小的等价代换定理，这个定理表明，求两个无穷小之比的极限时，分子及分母都可以用等价无穷小来代替. 因此，如果用来代替的无穷小选择得当的话，就可以使计算简化. 以下是一些常用的等价无穷小.

当 $x \to 0$ 时， $\sin x \sim x, \tan x \sim x,\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\ \arcsin x \sim x,\ \ln(1+x) \sim x,\ \mathrm{e}^x - 1 \sim x$. 这些等价无穷小代换可以在计算极限时直接使用.

例 1-21　求 $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解：$\lim\limits_{x \to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0}\frac{\tan x \cdot (1-\cos x)}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0}\frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$.

注意：这里对于原式分子中的 $\tan x,\ \sin x$ 不能直接用 x 替换. 等价无穷小代换计算极限时，只能对函数的因子或整体进行无穷小代换，对于代数和中某项的无穷小，一般情况下不能进行等价无穷小代换.

习题1.2

1．求下列极限.

（1） $\lim\limits_{x \to 5}\frac{x^2-5}{x^3-x^2+4}$；　（2） $\lim\limits_{x \to 1}\left(1-\frac{1}{x-2}\right)$；　（3） $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$；

（4） $\lim\limits_{x \to 0}\frac{5x^3-3x^2+4x}{x^2+3x}$；　（5） $\lim\limits_{x \to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$；　（6） $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$；

（7） $\lim\limits_{x \to 4}\frac{x-6}{\sqrt{x-2}-2}$；　（8） $\lim\limits_{x \to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$；

（9） $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}}-\frac{1}{x}\right)$；　（10） $\lim\limits_{x \to 0}\frac{(x+2h)^2-x^2}{h}$.

2．若 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，试求 a, b 的值.

3．求下列极限.

（1） $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin 3x^2}{(\tan 2x)^2}$；　（2） $\lim\limits_{x \to 0}(2x \cdot \cot x)$；　（3） $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}$；

（4） $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$；　（5） $\lim\limits_{x \to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$；　（6） $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{1-\frac{x}{2}}$；

（7） $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^x$；　（8） $\lim\limits_{x \to \pi}(1+\sin x)^{-\csc x}$.

4．计算下列极限.

（1） $\lim\limits_{x \to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$；　（2） $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$；　（3） $\lim\limits_{x \to -\infty}\mathrm{e}^x \cdot \sin\frac{5}{2^x}$；

（4） $\lim\limits_{x \to 0}\frac{(x-1)\tan 2x}{\arcsin 3x}$；　（5） $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{(5x+8)^{50}}{(3x+1)^{20}(2x+3)^{30}}$；　（6） $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{2x^3-3x^2+4x-1}{x^2+10x+15}$.

第三节　函数的连续性

一、函数连续的概念

在自然界中，许多现象都是连续变化的，如时间和空间、河水的流动、植物的生长、金属丝受热后长度的变化、人体身高的变化，等等. 这些现象抽象到函数关系上，就是函数的连续性.

1．函数连续的定义

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域内有定义，且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\,,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，x_0 称为函数 $y=f(x)$ 的连续点.

设 $\Delta x=x-x_0$，且称之为自变量 x 的增量，记 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ 或 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的增量. 函数的连续还可以描述为：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域内有定义，且

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0 \quad 或 \quad \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0\,,$$

即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\,,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

根据以上两个定义，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续的条件如下：

（1）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义，即 $f(x_0)$ 存在；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

以上 3 个条件都满足，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 其中任何一个条件不满足时，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是间断的，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的间断点.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{x}$，虽然 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，但此函数在点 $x=0$ 处无意义，故点 $x=0$ 是间断点. 又如，$f(x)=\begin{cases}1\ ,x\geqslant 0\\ -1, x<0\end{cases}$，因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，故点 $x=0$ 是间断点.

2．初等函数的连续性

根据连续函数的定义，利用极限的四则运算法则，可以得到下列结论：

（1）如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在点 x_0 处连续，那么它们的和、差、积、商 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（在商的情况下要求 $g(x)\neq 0$）在点 x_0 处也连续.

（2）设函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，函数 $u=g(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $u_0=g(x_0)$，则复合函数 $f[g(x)]$ 在点 x_0 处也连续.

（3）如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间 I 上单调递增（或单调递减）且连续，则其反函数

$y=f^{-1}(x)$ 在对应的区间 $\{y \mid y=f(x), x\in I\}$ 上连续且单调递增（或单调递减）.

（4）初等函数在其定义区间内是连续的.

二、函数的间断

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断， x_0 称为函数 $f(x)$ 的间断点.

根据函数产生间断的原因，将间断点分成两大类：

（1）如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，但左极限和右极限都存在，那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

（2）如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，则称 x_0 为第二类间断点.

在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和震荡间断点是第二类间断点.

例 1-22　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2, x\leqslant 1\\ x+1, x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性.

解：当 $x=1$ 时，

$$f(1)=2,\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}2x^2=2,\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}x+1=2$$

则有 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2=f(1)$，所以，函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续.

例 1-23　讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 在点 $x=2$ 处的连续性.

解：由于 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的定义域为 $x\neq 2$ 的一切实数，即 $f(x)$ 在 $x=2$ 处没有定义，所以函数 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处不连续. 又因为 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=4$，所以 $x=2$ 是第一类可去间断点，只要补充定义 $f(2)=4$，函数在该点就连续了.

例 1-24　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$.

解：
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})&=\sin[\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})]\\&=\sin\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\\&=\sin\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\sin 0=0.\end{aligned}$$

注：连续函数求极限时可以把极限符号移到函数内部.

三、闭区间上连续函数的性质

（1）（最值定理）　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则必存在最大值 $M=f(x_1)$ 和最小值 $m=f(x_2)$.

（2）（介值定理）　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续， $f(a)=A, f(b)=B$，则对于 A 和 B 之间的任意值 C，至少存在一个点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$.

（3）（零点定理）　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 内至少

存在一个点 x_0，使得 $f(x_0)=0$.

以上性质证明从略.

例 1-25　证明方程 $x^5-5x-1=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个根.

证明：设 $f(x)=x^5-5x-1$，显然，$f(x)$ 在$[1, 2]$上连续，且

$$f(1)=-5,\ f(2)=21，$$

则 $f(1)\cdot f(2)<0$，由零点定理可知，至少存在一个点 x_0，使得 $f(x_0)=0$. 即 $x=x_0$ 就是方程的一个根.

习题1.3

1．计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(\sin x)^3$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin 5x}{3x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}(a>0)$；（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{2+2\cos x}}{x^2}$.

2．设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^x+2, x<0\\ a+x, x\geqslant 0\end{cases}$$

当 a 取何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续？

3．设函数

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{2x}}, x\neq 0\\ a, \quad x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处连续，求常数 a.

4．证明方程 $e^x-2=x$ 在(0, 2)内至少有一个根.

第四节　函数在土建工程中的应用

一、函数关系的建立

在土建工程中，常常需要找出实际问题中各变量之间的函数关系，然后进行分析与计算.由于实际问题各不相同，所以必须根据问题中具体领域的事物间的关系和相关原则来确定自变量和因变量；然后再运用数学、力学和相关专业知识，分析其中各变量的数量关系，列出函数关系式，并根据实际背景确定函数的定义域. 下面通过几个实例介绍如何建立变量之间的函数关系.

例 1-26　某化工厂要从 A 处铺设水管到 B 处，并要求 C 点在 BD 之间，如图 1-1 所示. 已知 BD 段的距离为 100 米，A 到直线 BD 的距离为 20 米，又 AC 段 1 米长度的水管排管费为 90 元，BC 段 1 米长度的水管排管费为 60 元. 设 CD 为 x 米，求从 A 到 B 的排管费 Y 与 x 之间的函数关系.

解：由于 $AC=\sqrt{20^2+x^2}=\sqrt{400+x^2}$，$BC=100-x$，所以

$$Y=90\sqrt{400+x^2}+60(100-x)\ (0\leqslant x\leqslant 100).$$

因此，根据 Y 与 x 之间的函数关系，再依据不同的 x，算出相应的排管总费用.

例 1-27　一条横断面为等腰梯形的排水渠道，底宽为 b，边坡 1∶1（即坡角 $\varphi = 45°$），如图 1-2 所示. 在过水断面（即垂直于水流的横断面）的面积 A 为一定的条件下，试建立渠道的湿周 L（即水流与界壁接触的长度）与水深 h 之间的函数关系.

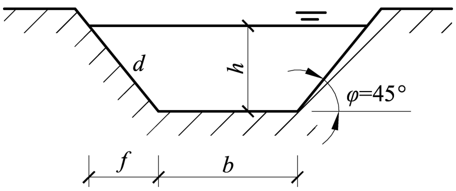

图 1-2

解：
$$L = b + 2d = b + \frac{2h}{\sin 45°} = b + 2\sqrt{2}h .$$

又
$$A = \frac{1}{2}[b + (b + 2f)] \cdot h = (b + h\cot 45°) \cdot h = bh + h^2 ,$$

由于过水断面的面积 A 为一定，即 A 为常量，所以可求得
$$b = \frac{A}{h} - h .$$

将上式代入湿周 L 的表达式，便得到湿周 L 与水深 h 的函数关系式：
$$L = \frac{A}{h} + (2\sqrt{2} - 1)h .$$

由于底宽 h 总是取正，即 $b > 0$，有 $\frac{A}{h} - h > 0$，则 $\frac{A}{h} > h$ 或 $h^2 < A$；又由于水深 h 总是取正，即 $h > 0$，所以湿周函数的定义域为 $0 < h < \sqrt{A}$.

例 1-28　根据工程力学的知识，矩形截面梁的承载能力与梁的弯曲截面系数 W 有关，W 越大，承载能力越强. 而矩形截面（高为 h，宽为 b）梁的弯曲截面系数的计算公式是
$$W = \frac{1}{6}bh^2 .$$

现将一根直径为 d 的圆木锯成矩形截面梁，如图 1-3 所示，求该梁弯曲截面系数与宽 x 之间的函数关系式.

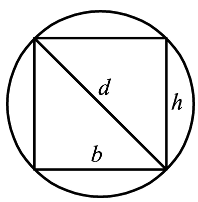

图 1-3

解：从图中可以看出，b, h 和 d 之间有这样的关系：
$$h^2 = d^2 - b^2 .$$

设矩形截面梁宽为 x，则其弯曲截面系数函数为
$$W(x) = \frac{1}{6}x(d^2 - x^2)\ (0 < x < d) .$$

二、分布荷载、剪力与弯矩函数

1．分布荷载、剪力与弯矩

作用于结构的外力在工程上统称为荷载. 当荷载的作用范围相对于研究对象很小时，可近似地看作一个点. 作用于一点的力，称为集中力或集中荷载. 当荷载的作用范围相对于研究对象较大时，就称为分布力或分布荷载. 根据荷载的作用范围不同，分布荷载分为“体荷载”“面荷载”“线荷载”，其中“线荷载”是工程力学中常见的一种分布荷载.

分布荷载在其作用范围内的“某一点”的密集程度，称为分布荷载集度，通常用 q 表示，其大小代表单位体积、单位面积或单位长度上所承受的荷载大小. 如果 q 是常量，称为均布荷载，例如梁的自重；如果 q 是线性分布，称为三角形荷载，例如水压力.

在横截面上有两种内力，平行于横截面的剪力 F_Q 和使梁弯曲的弯矩 M.

横截面上的剪力 F_Q，在数值上等于该截面左侧或右侧梁上全部横向外力的代数和. 横截面上的弯矩 M，在数值上等于该截面左侧或右侧梁上全部横向外力对该截面形心之矩的代数和.

2．剪力方程与弯矩方程

通常在梁的不同横截面或不同梁段上，剪力 F_Q 与弯矩 M 沿梁轴变化. 若沿梁轴取 x 轴，其坐标 x 代表横截面所处的位置，则横截面上的剪力和弯矩可以表示为 x 的函数，即

$$F_Q = F_Q(x),\ M = M(x) .$$

这种表示剪力、弯矩沿梁轴线变化关系的函数关系式，分别称为梁的剪力方程与弯矩方程.

3．剪力图与弯矩图

表示剪力和弯矩沿某个轴线变化的图形称为剪力图和弯矩图. 作图时，以横坐标 x 表示梁截面位置，以纵坐标 y 表示内力值. 需要注意的是，土建工程中默认的剪力图的纵坐标正向朝上；而弯矩图的纵坐标有可能正向朝下. 在后面讨论剪力图和弯矩图的关系时，特别要注意根据坐标正向的朝向进行讨论.

例 1-29　一单臂外伸梁的受力情况如图 1-4 所示，沿梁的长度方向（即原点 O 在 A 端的 Ox 轴方向），不同位置 x 处的梁面上的弯矩用下式表示：

$$M(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 10x - x^2 - 24, & 3 < x \leqslant 4 \end{cases},$$

试求支座 A, B 及 C 端处的梁截面上的弯矩 M 值.

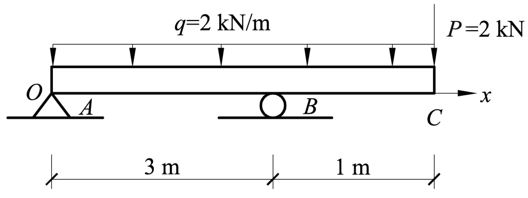

图 1-4

解：该题的弯矩函数是一个分段函数，它反映了在梁的不同横截面 x 处的弯矩. 依题可知：

当 $x_A = 0$ 时， $M_A = M(0) = 0$；

当 $x_B = 3$ 时， $M_B = M(3) = -3$；

当 $x_C = 4$ 时， $M_C = M(4) = 0$.

例 1-30　如图 1-5 所示的一简支梁截面，剪力 $Q = P\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2}\right)$，其中 P 为分布荷载的合力，l 为梁的跨度，x 为梁的横截面的位置坐标，求在截面什么位置（ $x = ?$ ）时剪力为 0?

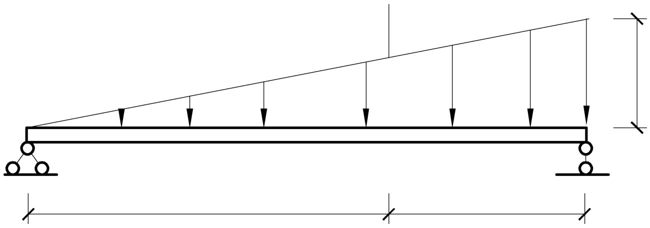

图 1-5

解：令

$$Q = P\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2}\right) = 0,$$

易得 $x = \frac{\sqrt{3}l}{3}$.

三、挠曲线方程

1．挠曲线

在外力作用下，梁的轴线由直线变为一条连续而光滑的曲线. 弯曲变形后轴线称为挠曲线. 如图 1-6，位于 xOy 平面内的悬臂梁 AB，在 y 轴向集中力 P 作用下发生平面弯曲变形，变形后挠曲线为 xOy 平面内的曲线 AB' . 在小变形条件下，梁的变形可用挠度和转角两个基本量度量.

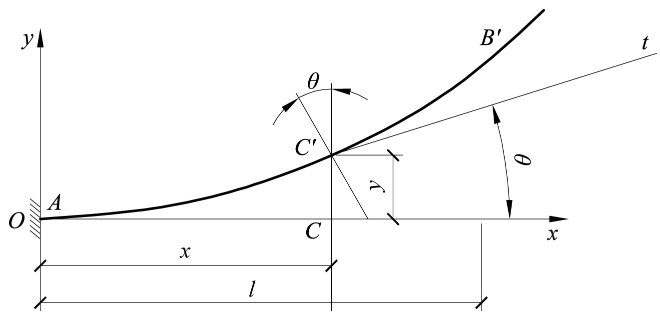

图 1-6

2．挠　度

横截面形心在垂直于梁轴向线方向的位移称为挠度，用 y 表示，向上为正，如图 1-5 所示. 梁各横截面的挠度是横截面位置坐标 x 的函数：

$$y = f(x)$$

这个函数成为梁的挠曲线方程或挠度曲线表达式.

3．转　角

梁变形时，不但截面形心有线位移，整个截面还有角位移. 横截面型相对于原始位置绕中性轴转过的角度，称为转角，用θ表示，以逆时针为正. 在小变形和平面假设下，任一横截面的以弧度为单位的转角θ等于挠曲线在该截面处的斜率$\theta \approx \tan\theta$（即当变形很小时，梁截面的转角等于同一截面的挠度$y$对$x$坐标的一阶导数）. 有关计算将在导数的应用中介绍.

例 1-31　如图 1-7 所示的简支梁受均匀荷载q的作用而发生弯曲，由力学知识可知，此梁弯曲的挠曲线方程为

$$y = \frac{q}{24EI}(x^4 - 21x^3 + l^3 x),$$

其中，抗弯刚度EI、梁的跨度l及q均为常数. 有关计算将在后面介绍.

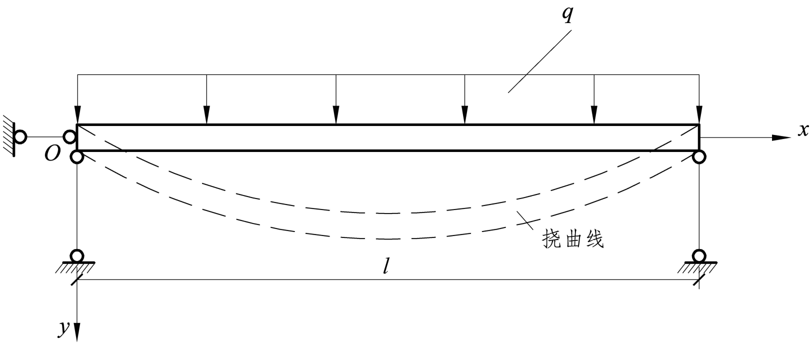

图 1-7

习题1.4

1．一过江隧道的横断面形状由矩形与半圆组合而成，其截面面积A为常量. 试将截面面积的周长l表示为底宽x的函数.

2．厂房的吊车在梁上离左柱x处，有一重为10^4 kN（包括起重量在内）的吊车（图 1-8）. 若不计吊车梁自重，求左柱顶A处的反力R_A与x的函数关系，并指出函数定义域.

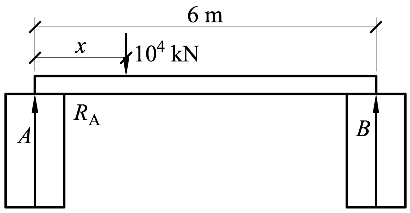

图 1-8

3．有一批钢管要水平地通过如图 1-9 所示的通道，试求钢管长度l与转角之间的函数

关系式.

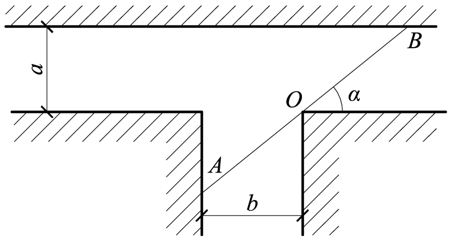

图 1-9

4．拟建一个容积为 V 的长方形水池，设它的底为正方形，如果池底所用材料单位面积的造价是四周单位面积造价的 2 倍，试将总造价表示为底边长的函数，并求其定义域.

小　结

一、函　数

1．函数的定义、定义域.

2．函数的性质：有界性、单调性、奇偶性、周期性.

3．复合函数的复合过程和分解过程.

4．基本初等函数（常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）.

5．初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的函数，并且能用一个数学式子表示的函数.

二、函数的极限

1．函数的极限定义.

（1）当 $x \to +\infty$ 时的极限，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \longleftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A .$$

（2）当 $x \to x_0$ 时的极限，

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A .$$

2．函数极限的性质：唯一性、有界性、局部保号性.

3．运算法则：

（1） $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$.

（2） $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB$.

（3） $\lim\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$.

4．两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 ,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\,.$$

5．无穷小与无穷大以及它们之间的关系.

6．无穷小的比较：高阶无穷小、低阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小.

三、函数的连续

1．函数连续的定义.

2．初等函数在其定义区间内都是连续的.

四、函数在土建工程中的应用举例

1．函数关系的建立；

2．分布荷载、剪力与弯矩函数；

3．挠曲线方程.

习题训练（一）

一、选择题

1．下列函数为复合函数的是（　　）.

A．$y=x^2+x+2$　　B．$y=\sin\frac{1}{x}$

C．$y=\mathrm{ar}\cos(2+\mathrm{e}^x)$　　D．$y=x^2\mathrm{e}^x$

2．$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}=$（　　）.

A．1　　B．$\frac{1}{10}$　　C．0　　D．∞

3．当 $x\to 0$ 时，与 $\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}$ 等价的无穷小量是（　　）.

A．x　　B．$2x$　　C．$\sqrt{2}x$　　D．$\frac{x}{\sqrt{3}}$

4．函数 $f(x)=\frac{x+2}{x^2-x-6}$ 的间断点是（　　）.

A．$x=3$　　B．$x=-2$

C．$x=-2$ 和 $x=3$　　D．不存在

5．函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，是 $f(x)$ 在该点连续的（　　）

A．充要条件　　B．充分条件

C．必要条件　　D．无关的条件

6．设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x>0\\ x^2+k, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $k=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C．-1　　D. 2

二、填空题

1．函数 $f(x)=\sqrt{x-4}+\arcsin\dfrac{1}{x}$ 的定义域为______.

2．$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a+1}{2+x^2}, & x\geqslant 1\\ 3x+1, & x<1\end{cases}$，若函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，则 $a=$______.

3．设 $f(x)=2^x, g(x)=x^2$，则 $f[g(x)]=$______.

4．若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{3x}=5$，则 $k=$______.

5．若 $a=$______，则当 $x\to 0$ 时，$\tan x^2$ 与 x^a 是等价无穷小.

三、计算题

1．分析下列函数由哪些函数复合而成.

（1）$y=\ln^3(\cot\sqrt{2x+5})$；　　（2）$y=\arccos(\mathrm{e}^x+1)^5$.

2．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+2}{4x^2+2x-9}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$；

（3）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos^2 x}{x\sin x}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 5x}{\ln(1+3x)}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$；　　（8）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(2\sin x+2)$.

3．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 3, & x=2\end{cases}$ 在点 $x=2$ 的连续性.

4．求常数 a, b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0\\ ax+b, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^3+2, & x>1\end{cases}$ 为连续函数.

5．将一个半径为 R 的圆形铁皮自中心处剪出中心角为 α 的扇形，围成一个无底圆锥，试将圆锥容积 V 表示为角 α 的函数.

6．下水道断面尺寸如图 1-10 所示，试证明过水断面的水深 h、过水断面的面积 ω 可分别表示成角 φ 的函数，即

$$h=\frac{D}{2}\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right),\quad \omega=\frac{D^2}{8}(\varphi-\sin\varphi).$$

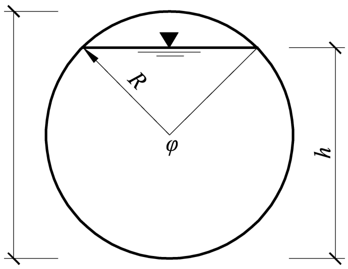

图 1-10