# 前　言

伴随着教育领域综合改革的步伐，我们走进了 2016 年. 2016 年是“十三五”开局之年，是转型发展的新起点，将迎来改革发展的新机遇，步入跨越发展的新征程. 遵义师范学院作为一所拥有百年师范传统的西部地方院校，为适应世界教育发展的新格局和国家新要求，正在实施由传统师范类教育向应用型综合大学转型发展.

在目前就业竞争日益激烈的情况下，数学与计算科学学院的就业率始终保持在 98%以上，连续七年名列学校前茅. 结合学校转型和跨越式发展，我们编辑出版了论文集《数学的认识与实践》，这说明我们正在为使我们的办学与时俱进做进一步探索. 因此，出版此论文集，旨在为今后进一步做好数学教育教学工作与服务地方经济社会发展有机结合提供了一个新的基点.

本文集题材定位于数学的认识与实践，主要从遵义师范学院数学与计算科学学院 2015 届学生优秀学位论文和近年我院新进的具有硕士、博士学位的教师力作中选取，共收录师生数学教育教学以及科研论文 75 篇，按内容分为教学研究、方法研究、高考与中考研究、理论研究、应用研究和其他等六个部分. 文集有以下三个方面的特点：一是编入的一直在基础教育数学教学第一线的我院客座教授李雅琳老师的论文和数学与应用数学专业师生关于教学研究、方法研究、高考与中考研究以及理论研究等方面的论文，对基础教育中有关数学教育教学的认识与实践具有一定的针对性、指导性和可操作性；二是录用的我院统计学专业师生关于应用研究方面的论文，对统计应用与服务地方经济具有一定的广泛性、实用性和借鉴性；三是收录的我院新进硕、博士教师理论研究与应用研究方面的论文，对数学的认识与实践具有一定的前沿性、纵深性和创新性. 总之，文集中编录的所有论文，体现了我院师生由传统师范教育向应用性、综合型转型发展的理念、信心和行动.

本文集得到了贵州省重点学科建设计划（黔学位合字 ZDXK〔2014〕23 号）、贵州省 2015 年本科教学工程项目（黔教高发〔2015〕337 号）、贵州省社科规划项目（12GZZC37）和贵州省教育科学规划项目（2010B038）的支持.

由于编者和大多数作者毕竟不在教学第一线，仅仅通过观摩与体验以及查阅文献资料和调研等方法来撰写文章，其认识在理论深度上难免肤浅，建议在可操作性方面也可能不强，还可能存在其他方面的疏漏等，加之时间紧促，再受编者的视角与学术水平限制，瑕玼之处在所难免，敬请阅者批判、指正.

编　者

2016 年 2 月于汇川园

# 目　录

## 第一部分　教学研究



## 第二部分　方法研究

## 第三部分　高考与中考研究

## 第四部分　理论研究



## 第五部分　应用研究

## 第六部分　其　他

# 第一部分

## 教学研究

# 逆向思维与中学数学问题解决

翁小勇　刘　静

（遵义师范学院 数学与计算科学学院，贵州 遵义　563002）

摘　要：逆向思维也叫求异思维，指的是在正（顺）向思维基础上反过来思考问题的一种思维方式. 思考数学问题时，既可以遵从一般的思维方式，也可以从相反的方向去进行探索；若直接证明不行，可采用间接证明. 因此，逆向思维在解决中学数学问题时，有着不可忽视的地位.

关键词：逆向思维；中学数学；解决问题

## 1　引　言

其实，数学知识本身就是正反两方面问题的转化，如相等与不相等、函数与反函数、性质定理与判定定理等. 然而我们在解决数学问题的过程中，总是习惯于沿着事物发展的方向去思考问题并寻求解决办法. 而对于某些问题，尤其是一些特殊问题，从结论往已知方向推，即从求解目标往已知条件推，反过来去想、去思考，或许会使问题变得简单. 敢于“反其道而思之”，让思维向对立面的方向发展，从问题的相反面进行深入的探索与分析，从而树立新思想，创新新解法. 但在实际教学过程中，教师一般注重对学生进行正（顺）向思维的培养，而忽视了逆向思维的培养，因此，本文主要谈谈对学生逆向思维的培养方法.

## 2　逆向思维的基本思想

### 2.1　明确思维方向

在学习数学概念时，要清楚定义应具有充分必要性，即“可逆”性. 因此，在解决数学问题时，我们必须明确题目的已知条件与求解目标，从而确定解题思路（数学思维）的方向. 一般涉及以下两种情况：

正向思维：已知条件 → 求解目标（由上到下解决问题）;

逆向思维：求解目标 → 已知条件（由下到上分析问题）.

### 2.2　选择合理的思维方向

如果利用正向思维解决问题，我们应合理运用已知条件逐步求解；若采用逆向思维解决问题，其解题过程如下：

（1）根据具体问题，假设求解目标（结论）的正确性；

（2）由求解目标（结论）反方向推理（倒推）已知条件的存在性；

（3）由“可逆”性得出完整的逻辑书写过程.

上述三个步骤的分析也体现了化归思想在中学数学问题解决中的应用.

## 3 逆向思维的基本应用

### 3.1 逆向思维在高考选择题中的应用

在数学高考试题中，选择题的总分值约占卷面总分的三分之一，地位十分重要，然而选择题的解题方式却十分灵活，因此，我们应学会选择合适的方法来解题. 如：

例 1 （2012 年全国卷（理）第 2 题）已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$，$B=\{1,m\}$，$A\cup B=A$，则 $m=$（　　）.

（A）0 或 $\sqrt{3}$　　（B）0 或 3

（C）1 或 $\sqrt{3}$　　（D）1 或 3

分析　很多同学在做类似的题时，都是在草稿纸上画出数轴，再表示出集合 $A$ 和集合 $B$ 进行求解，然而利用集合的定义，利用元素的唯一性，直接将其代入也可以进行判定. 若利用逆向思维解决问题，首先要假设求解目标（结论）的正确性，进而判断已知条件的存在性.

若令 A 选项中 $m=0$，由集合的定义可知，已知条件存在，即 $m=0$，从而排除 C, D 选项；接下来看 A,B 选项. 通过观察，可令 $m=3$，再代入可得，已知条件存在，故答案为 B 选项.

例 2 （2012 年安徽卷（理）第 2 题）下列函数中，不满足：$f(2x)=2f(x)$ 的是（　　）.

（A）$f(x)=|x|$　　（B）$f(x)=x-|x|$

（C）$f(x)=x+1$　　（D）$f(x)=-x$

分析　若利用逆向思维解决问题，首先要假设求解目标（结论）的正确性，进而判断已知条件的存在性.

通过观察可知，A，B，D 选项均可表示为 $f(x)=kx$ 与 $f(x)=k|x|$ 的形式，故它们均满足：$f(2x)=2f(x)$，因此答案为 C 选项.

例 3 （2012 年安徽卷（文）第 7 题）若要得到函数 $y=\cos(2x+1)$ 的图像，只要将函数 $y=\cos 2x$ 的图像（　　）.

（A）向左平移 1 个单位　　（B）向右平移 1 个单位

（C）向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位　　（D）向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位

分析　利用逆向思维解决问题，首先要假设求解目标（结论）的正确性，进而判断已知条件的存在性.

通过观察函数 $y=\cos 2x$，若选择 C 选项“向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位”，即可表示为 $y=\cos 2x\rightarrow y=\cos(2x+1)$，故答案为选项 C.

### 3.2 逆向思维在代数问题与几何问题中的应用

例 4　已知水池中某种荷花的面积每天能长一倍，如果 18 天恰能长满整个水池，问需经过多少天，这种荷花恰好能长满半个水池?

分析　显然，若采用正（顺）向的数学思维方式，从已知条件到求解目标，正（顺）向去想，难以入手，而若逆向（反方向）考虑，因为荷花的面积每天会长一倍，而从半个水池到整个水池恰好需要一天的时间，即$18-1=17$，所以只需$17$天，这种荷花恰好能长满半个水池.

例 5 （2011 年全国卷(文)第 18 题）$\triangle ABC$ 的三个内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$. 已知 $a\sin A+c\sin C-\sqrt{2}a\sin C=b\sin B$.

（Ⅰ）求 $B$；

（Ⅱ）若 $A=75°,\ b=2,$ 求$a$，$c$.

分析　对于本题（Ⅰ），若采用逆向思维，则可演示为：

要求$\angle B$

$\Downarrow$

即要知道$\angle A$，$\angle C$之间的正、余弦关系（已知 $a\sin A+c\sin C-\sqrt{2}a\sin C=b\sin B$）

$\Downarrow$（由正、余弦定理）

$$\begin{cases} a^2+c^2-\sqrt{2}ac=b^2 \\ b^2=a^2+c^2-\sqrt{2}ac\cos B \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故$\angle B=45°$.

因为正向思维与逆向思维是相反的过程，因此，书写过程可表示为

解　由正弦定理得

$$a^2+c^2-\sqrt{2}ac=b^2. \quad ①$$

由余弦定理得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B. \quad ②$$

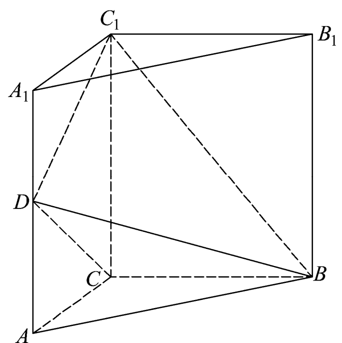
又因为

$$a\sin A+c\sin C-\sqrt{2}a\sin C=b\sin B, \quad ③$$

由①②③式可得$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $B=45°$.

（Ⅱ）同（Ⅰ），通过逆向思维分析问题，得出解题流程图，再利用可逆性，写出解题过程，即可求出 $a, c$.

例 6　（2012 年新课标卷（文）第 19 题）如下图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱垂直于底面，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=\dfrac{1}{2}AA_1$，$D$ 是棱 $AA_1$ 的中点.




（Ⅰ）证明：平面 $BDC_1\perp$平面 $BDC$.

分析　对于本题（Ⅰ），若采用逆向思维，则可演示为：

假设平面 $BDC_1 \perp$ 平面 $BDC$

$$\Downarrow$$

$$DC_1 \subset \text{面 } BDC_1,\ DC \subset \text{面} BDC,\ BD \subset \text{面} BDC,\ DC_1 \perp DC,\ DC_1 \perp BD$$

$$\Downarrow$$

$$\angle CDC_1 = 90^\circ.$$

因为 $\angle ACB = 90^\circ$ ，$AC = BC = \frac{1}{2}AA_1$ ，

所以 $\angle ACD + \angle ADC = \angle A_1DC_1 + \angle A_1C_1D$ .

又因为$\triangle ACD \cong \triangle A_1C_1D_1$，

所以 $\angle ADC = \angle A_1DC_1 = 45^\circ$

$\Downarrow$

$\angle ACD = \angle A_1C_1D = 45^\circ$

$\Downarrow$

$AD = AC$ （已知）.

正向思维与逆向思维是相反的过程，因此，书写过程可表示为：

（1）因为在 $\mathrm{RtV}DAC$ 中，$AD = AC$ ，

所以 $\angle ADC = 45^\circ$.

同理：$\angle A_1DC_1 = 45^\circ \Rightarrow \angle CDC_1 = 90^\circ$.

所以 $DC_1 \perp DC$ ，$DC_1 \perp BD$ .

又因为 $DC_1 \subset$ 面 $BDC_1$，$DC \subset$ 面 $BDC$，$BD \subset$ 面 $BDC$，$DC_1 \not\subset$ 面 $BDC$，

所以 $DC_1 \perp$ 面 $BCD$.

所以 $DC_1 \perp BC$ .

## 4 结束语

事实上，解决中学数学问题，需要用到的数学思想方法不胜枚举，本文就数学思维中的一个方式：逆向思维，进行了简要分析.

每一个学习数学的人，都应该注重培养自身的数学思想，而对于中学生而言，这尤为重要. 由于现在的教学理念已发生了转变，学校教育也逐渐注重学生数学素养的培养，而逆向思维作为数学思维的一种基本方式，其重要性不言而喻. 因此，在平时学习数学知识的过程中，我们更应侧重于培养与发展逆向思维.

## 参考文献

[1] 周春荔．数学思维概论[M]．北京：北京师范大学出版社，2012．

[2] 王宪昌．数学思维方法[M]．北京：人民教育出版社，2010．

[3] 张 泉．世界金榜——高中全程复习方略（高中数理）[M]．吉林：延边大学出版社，2011．

[4] 曲一线．5 年高考 3 年模拟．高考理数[M]．北京：首都师范大学出版社，2013.

[ 5 ]　王全林．现代数学教育研究概论[M]．广东高等教育出版社，
[ 6 ]　王选章．理科考试研究数学版[J]．2014，12 期.
[ 7 ]　林伟芬，何秀湘．在稳定之中注重教学概念和思维的考查．高中数学教与学[J]．2014．11 期.
[ 8 ]　窦志明．高考数学快速解题法[M]．北京：中国青年出版社.

# 会阅读才会审题

李雅琳[1] 柯 铧[2]

（1. 遵义师范学院附属实验学校

2. 遵义师范学院 数学与计算科学学院，贵州 遵义 563002）

摘 要：通过多年的教学发现，学生缺乏良好的阅读习惯和阅读能力，导致其审题出错. 本文通过研究学生阅读和审题方式，提出了五步审题法，以查找审题病根，进而引导学生把握题目要义，顺利解决问题.

关键词：数学；阅读；审题；题设；结论

审题是指仔细阅读、思考、反复分析题目，并推究、理解题目的意思. 从数学学科来看，审题应包括认真阅读题目，理解题设和结论，分析题设呈现出来的条件所表示的数量关系或空间形式，思考结论与题设的数量关系或几何关系.

## 一、五步审题，把握要义

无论是做作业还是考试，都需要认真审题. 数学审题一般要求如下：第一，仔细阅读题目中的每一个字、每一个词、每一句话；第二，准确理解每一句话，每一个条件的含义；第三，抓住题目中关键的字、词、句；第四，找出题目中各种数量之间的关系；第五，能准确地用数学语言表达文字语言.

通过以上五步骤，可以快速、准确、有条理地把握题目的主要含义，发现题设与结论的内在联系，寻求问题的解决. 学生要做到这几点，需要教师在平时的教学过程中，培养学生的阅读习惯和阅读能力.

## 二、推究审题，阅读是根

通过多年的教学发现，很多学生没有阅读数学书和数学资料的习惯和能力[1]，导致其对数学题目的审题能力较差，主要表现在以下几个方面：

（1）审题不仔细，看漏字、词、句，把题目中的符号、字母抄错，把条件抄漏.

常见的是把匀速运动条件看漏或忽视，把圆弧 $AB$ 错看成弦 $AB$，把整数解看成解，把非

基金项目：贵州省教育科学规划课题（2013B019）；贵州省社科规划课题（12GZZC37）；贵州省教育厅资助项目（2010B038）。

负整数看成非“负整数”，等等.

（2）审题不完全，题目要求看不完全，读题只读一半.

例 1　人教版七年级上册数学《绝对值》课后习题的第 5 题，写出下列各数的绝对值：

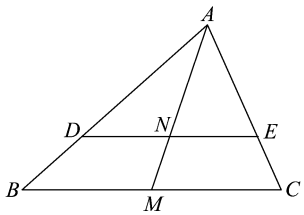
$$-125，+23，-1.5，0，\frac{2}{3}，-\frac{2}{3}，-0.05.$$

上面的数中哪个数的绝对值最大？哪个数的绝对值最小？

就这个题，有超过三分之一的学生只求出了绝对值. 其中，有的学生还是数学基础和成绩比较好的学生. 究其原因，很多学生经常在阅读题目时对题目后面的要求和条件视而不见.

（3）没有做完题后再审一次题目的习惯，而是想当然，导致题目没做完.

例 2　如图，在△$ABC$ 中，$DE /\!/ BC$，$\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$，$M$ 是 $BC$ 边上的一点，$AN$ 交 $DE$ 于点 $N$，若 $AE=4$，求 $EC$ 的长.




此题本身比较容易，对绝大多数学生来说，没有问题. 但是，有相当一部分学生只求出了 $AC$，并没有按题目要求进一步求出 $EC$. 究其原因，学生没有再阅读一遍题目，就想当然地认为做完了. 从表面上看，是学生粗心大意，实质上是学生没有养成良好的阅读习惯，进而没有形成一定的阅读能力.

（4）找不到题目中的关键字句，或者对题目中的关键字句不深究、不理解.

例 3　在△$ABC$ 中，$AB=6$，$AC=9$，点 $D$ 在边 $AB$ 所在的直线上，且 $AD=2$，过点 $D$ 作 $DE /\!/ BC$，交 $AC$ 所在直线于点 $E$，求 $CE$ 的长.

此题要求学生自己画图，绝大多数学生只画出了 $D$ 点在边 $AB$ 上的情况（见图 1），求出 $CE=6$；而 $D$ 点在 $BA$ 的延长线上的情况（见图 2）却没有想到. 经过调查发现，学生们对“点 $D$ 在边 $AB$ 所在的直线上”没有深究，想当然的理解成“点 $D$ 在边 $AB$ 上”. 在讲评此题时，教师在“点 $D$ 在边 $AB$ 所在的直线上”这句话中，重点标出了“所在直线上”这五个字，这样很多学生马上就明白了还有第二种情况. 还有少数基础较差的学生一时还没理解，教师就引导阅读“点 $D$ 在边 $AB$ 上”和“点 $D$ 在边 $AB$ 所在的直线上”这两句话并思考其区别，这样学生很快也就弄明白了.

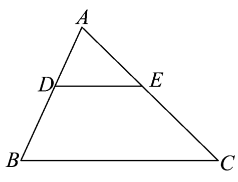



图 1

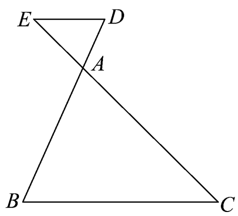



图 2

紧接着，教师又出了一道题：在直角三角形中，有两边长分别是 3 和 4，求另一边的长. 教师在突出对“两边”含义的理解和引导后，学生对此问题就迎刃而解了.

（5）题目文字多，有的学生会嫌麻烦不去阅读题目，甚至认为是难题并放弃.

例 4　遵义市 2014 年中考数学第 25 题，全题约有 300 字，另加一个速度、时间、路程的函数关系图像，这极大地增加了学生的阅读量和理解量.

经调查，中等及以下学生几乎都嫌麻烦，不愿去仔细阅读题目. 其实，这种情况的发生，主要还是因为学生的阅读习惯没有养成，阅读能力欠缺造成的.

## 三、审题弊病，对症用钥

（1）针对审题不仔细，看漏字、词、句，把题目中的符号、字母抄错，把条件抄漏的情况，教师需要在平时的练习中，引导学生遵循“慢审快做”的原则，逐字逐句地去阅读题干.

（2）针对审题不完全，题目要求看不完全，读题只读一半的情况，教师需要在教学过程中经常引导和监督学生养成完整读题的习惯，罗列题设所呈现的条件，以及结论所要求的问题.

（3）针对做完题后不检查，不再审一遍而导致遗漏的现象，教师要引导学生养成检查作业、检查题目的习惯.

（4）针对找不到题目中的关键字句，或者不理解题目关键词、题目条件的作用这一现象，教师需要在平时的教学中，首先对学生进行语句分析的训练，教会学生断句，找中心语、定语等，从而找到关键词；然后对单个的知识点进行巩固和强化；最后再引导学生采取联想的方式，理解知识点间的联系，形成思维链接. 这样学生的思维就会得到发散，由一个知识点很快联想到其他知识点. 通过阅读题目，很快就理解了题设和条件的意思.

（5）针对题目文字多，学生会嫌麻烦不去阅读题目的问题，教师应引导学生学会去掉问题背景，将生活问题简化为数学问题，提炼出数学模型，并运用相应知识予以解答.

通过阅读习惯的培养，提升阅读理解能力，仔细分析题干的含义，认真思考结论的联系，在知识结构网络中，发散思维，找到解决问题的关键，握紧审题的钥匙——阅读. 会阅读，才会审题.

## 参考文献

[1] 李雅琳，高小军，柯铧. 七年级学生数学学习兴趣的现状调查[G]//从高考题型分析到实际应用研究. 成都：西南交通大学出版社，2015：123-126.

# 关于直线与圆锥曲线的位置关系的问题分析

杨　梅　张　斌

（遵义师范学院 数学与计算科学学院，贵州 遵义　563002）

摘　要：圆锥曲线是高中数学的重点内容，也是高考的考点之一[1]. 本文将对代数方程联立求解和中点弦等问题进行分析归纳，寻找常见的直线与圆锥曲线位置关系和中点弦题型的一般解题思路，从而提高解决此类问题的水平.

关键词：直线；圆锥曲线；中点弦

圆锥曲线是高中数学中非常重要的函数曲线. 高考试题中，与圆锥曲线相关的问题在总分中所占的比例相当大，它通常情况下，它是以一道选择题、一道填空题和一道大题的形式出现. 对于这“两小一大”题型，“两小”通常只需要掌握圆锥曲线的基本性质和定义即可，属于容易题；而对于大题，综合性一般较强，涉及的问题通常有两类：第一是代数方程求解问题，第二是中点弦问题. 因此本文就这两类问题展开讨论，即通过韦达定理和点差法等寻找这两类题型的一般解题思路，这在一定程度上，能提高学生的学习水平，从而提高教学质量.

## 1. 代数方程与圆锥曲线问题

将表示直线的方程：$Ax+By+C=0$（$A,B$ 不全为零）代入圆锥曲线的方程 $f(x,y)=0$ 进行消元，可以把原来的方程组变成一元二次方程，然后再对二次项系数、判别式的取值进行讨论，从而得出方程的解，最终得出直线与圆锥曲线的位置关系. 其中的过程可以近似看作由方程组 $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}$ 消去 $y$（或 $x$）后得到的一元二次方程 $ax^2+by+c=0$，经过这样简单的处理后就能够判断直线与圆锥曲线的位置关系.

由此观之，在求解直线与圆锥曲线问题时，我们应该运用以下基本思路：先假定直线 $y=kx+b$ → 结合已知方程 → 消元 → 运用韦达定理（或判别式）→ 得出等量关系（或不等式关系）→ 最终演变到代数运算.

例 1　已知双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 $F_1,F_2$，记 $O$ 为坐标原点，过点 $Q(0,2)$ 的直线 $l$ 与双曲线 $c$ 相交于不同的两点 $E,F$. 若△$OEF$ 的面积为 $2\sqrt{2}$，求直线的方程[2].

解　依题意，可设直线 $l$ 的方程为 $y=kx+2$，代入双曲线 $c$ 的方程，整理得

$$(1-k^2)x^2-4kx-6=0. \qquad ①$$

因为直线 $l$ 与双曲线 $c$ 有两个不同的交点 $E,F$，所以

$$\begin{cases}1-k^2\neq 0\\ \Delta=(-4k)^2+4\times 6(1-k^2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq\pm 1\\ -\sqrt{3}<k<\sqrt{3}\end{cases},$$

即 $$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}\ \text{且}\ k\neq\pm 1. \qquad ②$$

因此可设 $E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$，由①式得

$$x_1+x_2=\frac{4k}{1-k^2}\ ,\ x_1x_2=\frac{-6}{1-k^2}.$$

于是有：

$$|EF|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$$
$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}.$$

而原点 $O$ 到直线 $l$ 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}$，所以

$$S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}d\cdot|EF|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}.$$

若 $S_{\triangle OEF}=2\sqrt{2}$，即

$$\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow k^4-k^2-2=0.$$

所以 $k=\pm\sqrt{2}$，满足②. 因而，要满足题目的要求，方程就应该是 $y=\sqrt{2}x+2$ 及 $y=-\sqrt{2}x+2$.

例 2　已知双曲线 $c\colon x^2-y^2=1$ 及直线 $l: y=kx-1$，

(1) 求当直线 $l$ 和双曲线 $c$ 有两个不同的交点时，求出实数 $k$ 的取值范围；

(2) 求当直线 $l$ 和双曲线 $c$ 交于 $A,B$ 两点，$O$ 是坐标原点，$\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{2}$，求实数 $k$ 的值[3].

分析　在题目的第一问，因为直线与双曲线有两个相异的交点，所以在解决此类题目时应该联立方程组，再提取出判别式并令其大于零(注意:此时的二次项系数不为零). 在求 $S_{\triangle AOB}$ 时，可以通过直线恒过定点 $(0,-1)$，转化为与 $A,B$ 的横坐标相关的问题，此时可以运用韦达定理求解，从而轻易解决了此类问题. 详细解题思路如下：

(1) 由 $\begin{cases}x^2-y^2=1\\ y=kx-1\end{cases}$ 消去 $y$ 并整理得

$$(1-k^2)x^2+2kx-2=0.$$

由题意可知

$$\begin{cases}1-k^2\neq 0\\ \Delta=4k^2+8(1-k^2)>0\end{cases}\Rightarrow -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}.$$

又 $k\neq\pm 1$，所以实数 $k$ 的取值范围为：$(-\sqrt{2},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{2})$.

(2) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由(1)得

$$x_1+x_2=-\frac{2k}{1-k^2}\ ;\ x_1x_2=-\frac{2}{1-k^2}.$$

又因为直线 $l$ 恒过点 $C(0,-1)$，则：当 $x_1x_2<0$ 时，

$$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}|x_1|+\frac{1}{2}|x_2|=\frac{1}{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\ ;$$

当 $x_1x_2>0$ 时，

$$S_{\triangle OAB}=|S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OBC}|=\left|\frac{1}{2}|x_1|-\frac{1}{2}|x_2|\right|=\frac{1}{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}.$$

所以
$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(2\sqrt{2})^2,$$

即
$$\left(-\frac{2k}{1-k^2}\right)^2+\frac{8}{1-k^2}=8.$$

所以 $k=0$ 或 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

由（1）可知，上述 $k$ 的值符合，所以，$k=0$ 或 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

## 2. 中点弦与圆锥曲线问题

直线的图像与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的图像相交于两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，解决与弦 $AB$ 的中点有关的问题称为中点弦问题. 在解决此类问题时我们往往采用“点差法”. 其详细的解题步骤是：把 $A$，$B$ 两个点的坐标代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中，得

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1. \quad ①$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1. \quad ②$$

由①－②可得

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0. \quad ③$$

设 $M(x_0,y_0)$ 为 $AB$ 的中点，则有

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2} & ④ \\ y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2} & ⑤ \end{cases}.$$

又直线 $AB$ 的斜率为

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \quad ⑥$$

将④⑤⑥代入③中得到 $k_{AB}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

这就是“点差法”的运算过程，通常用此法来解决中点弦问题及其对称问题. 下面再用一道例题进行佐证：

例 3　已知椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，求：

（1）以 $P(2,-1)$ 为中点的弦所在的直线方程；

（2）斜率为 2 的平行弦中点的轨迹方程；

（3）点 $Q(8,2)$ 是椭圆截直线所得弦的中点，求该点的轨迹方程[4].

本题主要考查中点弦问题，一般利用“点差法”来解答.

解　设弦的两端分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$AB$ 的中点为 $(x,y)$，则

$$2x=x_1+x_2\ ,\ 2y=y_1+y_2 .$$

又因为 $A$，$B$ 两点均在椭圆上，故有

$$x_1^2+4y_1^2=16\ ,\ x_2^2+4y_2^2=16 .$$

两式相减得

$$(x_1+x_2)(x_1-x_2)=-4(y_1+y_2)(y_1-y_2) .$$

故

$$K_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=-\frac{x}{4y} .$$

（1）由 $K_{AB}=-\frac{x}{4y}=\frac{1}{2}$ 可知所求的方程为：$x-2y-4=0$.

（2）由 $K_{AB}=-\frac{x}{4y}=2$ 可知所求的轨迹方程为：$x+8y=0(-4\leqslant x\leqslant 4)$.

（3）由 $K_{AB}=-\frac{x}{4y}=\frac{y-2}{x-8}$ 可知所求的轨迹方程为：$(x-4)^2+4(y-1)^2=20(-4\leqslant x\leqslant 4)$.

在研究直线与圆锥曲线的位置关系时，我们往往是先联立直线与圆锥曲线方程、求解，再逐步化简、消元，最后运用韦达定理（或判别式）得出等量关系（或不等式关系），进而达到处理代数运算问题的目的[5]，但在解决中点弦问题时，我们应该首选点差法进行解答. 通过这些方法的运用，能有效地对这类题型的问题进行思考，从而提高解决此类问题的水平.

## 参考文献


[1]　叶良清．高考圆锥曲线中参数方程解法的探求[J]．福建中学数学，2010（4）: 33-35.

[2]　赵权忠，杨淑娟．新教材完全解读[M]．长春：吉林人民出版社，2007.

[3]　李霞．尖子生学案[M]．长春：吉林人民出版社，2008.

[4]　王金战，许永忠．高考数学轻松突破 120 分[M]．北京：外语教学与研究出版社，2010.

[5]　中学语文课程教材研究开发中心．普通高中课程标准试验教科书数学选修[M]．北京：人民教育出版社，2007.

# 浅论高中数学涉及的数学思想

刘向虎　刘永波

（遵义师范学院 数学与计算科学学院，贵州 遵义　563002）

摘　要：数学是一门思维、逻辑性都很强的学科，有着悠久的历史传承与积累. 生活中的方方面面都离不开数学，历史的传承也离不开数学，因此要掌握好这门课程，就必须掌握其思想，而掌握其思想就是掌握其精髓. 本文以高中数学学习为基础，以学习中所涉及的若干思想为出发点，辅以例题进行浅显的讨论. 希望通过对若干思想的归纳分析，进一步提升对数学的了解并掌握其内容精要；更望在了解和掌握提升以后，能够以最佳方法去解决数学问题.

关键字：数学思想；归纳分析；最佳方法

## 1　函数思想

以我们学过的各种函数的性质为出发点，把握、理解、确立题目所含的条件与真实意图，再利用函数的概念与性质去解决数学问题. 函数思想与方程思想之间存在着互通与接轨.

例 1　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对任意实数 $\alpha,\beta$ 有 $f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)f\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$，且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

（1）求证：$f(-x)=f(x)=-f(\pi-x)$；

（2）若 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>0$，求证：$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减.

解析（1）

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2f\left(\frac{\pi}{3}\right)f(0).$$

又 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $f(0)=1$. 所以

$$f(x)+f(-x)=2f(x)f(0).$$

所以

$$f(x)=f(-x).$$

基金项目：贵州省科技厅联合基金项目：黔科合 LH 字〔2015〕7002；遵义师范学院博士基金：遵师 BS〔2014〕19；贵州省教育厅重点基金：黔教合 KY 字〔2015〕391.

作者简介：刘向虎（1980—），男，山东德州人，博士研究生，副教授，研究方向：微分方程，Email：liouxinaghu04@126.com.

因为 $f(x)+f(\pi-x)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ，又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ ，所以

$$f(x)=f(-x)=-f(\pi-x).$$

（2）因为 $f(-x)=f(x)$ 且 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)>0$ ，所以当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)>0$.

设 $0<x_1<x_2<\pi$ ，则

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(\pi-x_2)=2f\left(\frac{x_1+\pi-x_2}{2}\right)f\left(\frac{x_1+x_2-\pi}{2}\right).$$

因为 $0<\frac{x_1-x_2+\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$ ， $-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2-\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$ ，所以

$$f\left(\frac{x_1+\pi-x_2}{2}\right)>0 ，f\left(\frac{x_1+x_2-\pi}{2}\right)>0.$$

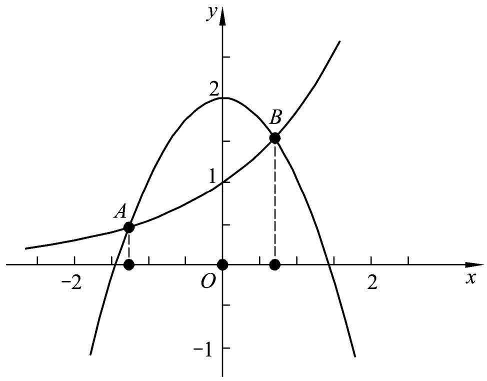
所以 $f(x_1)>f(x_2)$ ，即 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减.

## 2 数形结合

数形结合简述为根据代数式画出对应的图形，或根据图形找出合理的代数式，或将两者相结合，达到解决问题的目的，以使问题更加直观、准确.

例 2 方程 $a^x+x^2=2(a>0,a\neq 1)$ 的解的个数为_________（两个）.

解析 观察题目给出的方程，可以将方程拆分为函数 $y=a^x$ 和函数 $y=2-x^2$ ，分别作出两函数的图像. 由图形可以直观地观察到：无论 $a$ 取何值 $(a>0,a\neq 1)$ ，两函数的图像总有两个交点. 结合下图与原方程可得函数 $y=a^x$ 和函数 $y=2-x^2$ 图像交点的横坐标即为原方程的解.




## 3 分类与整合

若问题中存在不定变量，可根据变量取值的不同而引起的问题结果的不同，对其进行分类讨论.

例 3 “$a\leqslant 0$”是“函数 $f(x)=|(ax-1)x|$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增”的_______条件.（充要条件）

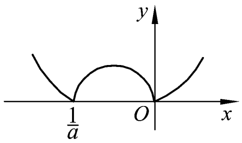
解析 当 $a=0$ 时， $f(x)=|(ax-1)x|=|x|$ ，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，结合函数 $f(x)=\left|(ax-1)x\right|=\left|ax^2-x\right|$ 的图像可知函数在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，如图（1）所示：

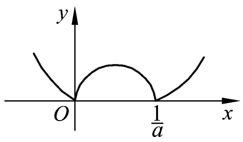
当 $a>0$ 时，函数在区间 $(0,+\infty)$ 上有增有减，如图（2）所示.

所以为充要条件.

图像如下：




（1）




（2）

## 4　方程思想

方程思想是指对题目中所隐含的数量关系加以分析，建立方程或不等式或方程组等，通过解方程求解.

例 4　已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数，且 $f(1)=1$，若 $a,b\in[-1,1]$，$a+b\neq 0,$ $\dfrac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$.

（1）对函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的增减性进行判断，并对结论加以证明：

（2）解不等式 $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)<f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$；

（3）若 $f(x)\leqslant m^2-2am+1$，对所有 $x\in[-1,1], a\in[-1,1]$ 恒成立，求实数 $m$ 的取值范围.

解析　（1）任取 $x_1,\ x_2\in[-1,1]$，且 $x_1<x_2$，则 $-x_2\in[-1,1]$，又 $f(x)$ 是奇函数，于是有

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=\frac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1+(-x_2)}\cdot(x_1-x_2).$$

由已知可知 $\dfrac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1+(-x_2)}>0$. 又 $x_1-x_2<0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为增函数.

（2）由上题的结论可得 $x+\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{x-1}$，所以 $x-1<0$，即不等式变化为

$$x^2+\frac{x}{2}-x-\frac{1}{2}>1.$$

化简得

$$(2x-3)(x+1)>0.$$

解得 $x<-1, x>\dfrac{3}{2}$.

综上所述无解.

（3）$f(x)<f(1)=1$，所以

$$1\leqslant m^2-2am+1.$$

化简得 $0 \leqslant m^2 - 2am$ ，即 $0 \leqslant m(m-2a)$ .

当 $a \in [-1,0]$ 时， $m \leqslant 2a$ 或 $m \geqslant 0$ ；当 $a \in [0,1]$ 时， $m \geqslant 2a$ 或 $m \leqslant 0$ .

## 5 整体思想

对问题的结构进行分析、转化，用“整体”的眼光，将题中的某一部分式子或者部分图像看作一个独立的整体，进行问题的求解，这在化简求值、解方程等方面应用较广.

例 5 分解因式： $16 - 8(x-y) + x^2 - 2xy + y^2$ .

考点 运用公式法进行因式分解 .

解析 将 $(x-y)$ 看作整体，利用已学过的完全平方公式进行分解，即可求得答案 .

解 原式 $= 16 - 8(x-y) + (x-y)^2 = [(x-y)-4]^2 = (x-y-4)^2$ .

故答案为： $(x-y-4)^2$ .

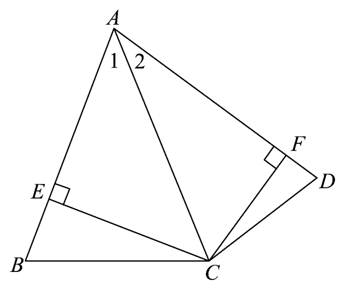
点评 本题主要从整体思想出发，利用已学过的完全平方公式进行因式分解，这是对整体思想的掌握与运用，也是解决本题的关键.

## 6 转化思想

在学习中能够将遇到的问题进行分析和归纳，将之转化为简单的、已知的、等价的、特殊的问题进行求解，这就是转化思想. 例如，函数与方程间的转化、数形之间的转化等就为我们学习中最为常见的转化方式.

例 6 四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60°$ ，$AC$ 平分 $\angle BAD$ ，$AC$=7，$AD$=6， $S_{\triangle ADC} = \dfrac{15}{2}\sqrt{3}$ ，求 $BC$ 和 $AB$ 的长.

分析 此题主要考查对转化思想的掌握，解本题的关键在于四边形与直角三角形间的转化. 根据题目给出的条件 $\angle ABC = 60°$ ，$AC$ 平分 $\angle BAD$ ，易想到若由 $C$ 点作 $CE \perp AB$ 于 $E$，$CF \perp AD$ 于 $F$，便能解决问题. 由已知 $S_{\triangle ADC} = \dfrac{15}{2}\sqrt{3}$ 可求出 $CF$=$CE$，可知 $CE$ 的长；通过解 $\mathrm{Rt}\triangle BEC$ 可求出 $BC$ 的长，$BE$ 也可求出；再通过解 $Rt\triangle AEC$ 可求出 $AE$ 的长，这样，$AB$ 的长就求出来了.




解 作 $CE \perp AB$ 于 $E$， $CF \perp AD$ 于 $F$.

因为 $\angle 1$=$\angle 2$ ，

所以 $CE$=$CF$ .

因为 $S_{\triangle ADC} = \dfrac{15}{2}\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}CF \cdot AD,\ AD = 6$ ，

所以 $CE = \dfrac{5\sqrt{3}}{2},\ CF = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，因为 $AC$=7 ，由勾股定理， $AE^2 = AC^2 - CE^2 = \dfrac{121}{4}$.

所以 $AE=\frac{11}{2}$.

所以 $AB=AE+EB=\frac{11}{2}+\frac{5}{2}=8$.

综上所述：$BC=5, AB=8$.

## 7　隐含条件

问题中没有明确给出，但根据已有的明确条件，可以将之推断出来的深层次条件；或者没有给出，但该条件是一个常规或定理，均称之为隐含条件.

例 7　分解因式：$4x^2-4x-y^2+4y-3=$________.

解析　原式 $=(4x^2-4x+1)-(y^2-4y+4)$

$$=(2x-1)^2-(y-2)^2$$
$$=(2x-y+1)(2x+y-3).$$

故答案为：$(2x-y+1)(2x+y-3)$.

思路点拨　本题从原式进行直接分解较为困难，通过观察式子的特点，联想到已学过的完全平方公式，可以较容易地解决问题. 本题考点在于找出隐含的条件，将常数项进行拆分，便于凑配.

## 8　类比思想

将生活中或者学习中不同的两者或两类进行比较，假如在某一方面它们存在共同点，我们就可以推想它们仍存在其他共同点.

例 8　已知 $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=k$，求 $k$ 的值.

解析　利用 $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=k$ 可知，直线 $l_1:ax+by+c=0$ 和直线 $l_2:(b+c)x+(c+a)y+a+b=0$ 重合. 从而

$$(a+b+c)(x+y+1)=0.$$

于是：当 $a+b+c=0$ 时，$k=-1$;

$a+b+c\neq 0$ 时，$k=\frac{1}{2}$.

考点　通过类比来解决数形结合问题就是类比思想的最直观体现. 本题就是通过对形的描述，运用类比思想来解决问题的.

## 9　建模思想

运用建模思想可解决许多数学问题，而数学模型的建立则依赖于运用数学语言来描述. 在解决数学问题时，题目给我们的往往是一个抽象的概念，此时数学模型的建立就起到了至关重要的作用. 建模思想的熟练掌握与应用，能为我们解题提供便利.

例 9　一家桶装水的经营部一天的成本为 200 元，其中包含一天的房租及工人的工资．假设每桶水的进价为 5 元；每天的销售量主要受销售价格的影响，销售价格与每天的销售量存在下表所示的关系：

| 销售单价/元 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 日均销售量/桶 | 480 | 440 | 400 | 360 | 320 | 280 | 240 |

根据以上给出的数据，经营部若想获得最大利润应当如何制定售价？

解析　根据以上给出的数据，售价每增加 1 元，每天的销量均会减少 40 桶．设进价增加 $x$ 元后，每天销售的利润为 $y$ 元，那么根据题意可得每天的销售量为 $480-40(x-1)=520-40x$（桶）．

由于 $x>0$，且 $520-40x>0$，即 $0<x<13$，于是

$$y=(520-40x)x-200=-40x^2-520x.\ 0<x<13.$$

易知，当 $x=6.5$ 时 $y$ 有最大值．所以，只需将销售单价定为 11.5 元，就可获得最大利润．

小结：本题是通过题目给出的数据建立准确的数学模型来解决的．运用数学模型解题时，要重点阅读，观察表格数据及变量间的联系，并从表格中提取准确有效的信息．

## 10　归纳推理

犹如从一个人的平时习惯来推测此人的性格特点，我们在解题时，也可从部分特点来推测整体的思想，在数学上我们称为归纳推理．总之，可以将归纳推理看成由点及面，或者由个别到一般的推理．

例 10　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2),\ a_1=a,\ a_2=b$，记 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则下列结论正确的是（　　）．

A．$a_{100}=-a,\ s_{100}=2b-a$　　　B．$a_{100}=-b,\ s_{100}=2b-a$

C．$a_{100}=-b,\ s_{100}=b-a$　　　D．$a_{100}=-a,\ s_{100}=b-a$

解析　$a_3=a_2-a_1=b-a,\ s_3=a_1+a_2+a_3=2b$；

$a_4=a_3-a_2=-a,\ s_4=s_3+a_4=2b-a$；

$a_5=a_4-a_3=-b,\ s_5=s_4+a_5=b-a$；

$a_6=a_5-a_4=a-b,\ s_6=s_5+a_6=0$；

$a_7=a_6-a_5=a,\ s_7=s_6+a_7=2b-a.$

通过观察与分析可知，$a_n,s_n$ 都是每隔 6 项就重复，所以由归纳推理得

$$a_{100}=a_4=-a,\ s_{100}=s_4=s_3+a_4=2b-a.$$

故此题选 A.

## 11　极限思想

极限思想可以简述为将未知变量视为无穷大或无穷小，进而使问题得以解决．极限思想的

运用十分广泛，尤其在数学分析这门课中，就是运用极限思想研究函数的，其中许多重要的概念，都需要利用极限去定义或者解析. 因此掌握极限思想极其重要.

例 11　若存在数列$\{a_n\}$，且$a_1=3$，总有自然数 $n$ 使得$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}$，求证是否存在一对实数$a,b$，使得对于任意自然数$n$，$a_n=a+b\left(\frac{2}{3}\right)^n$都恒成立？

解析　解此题的关键在于极限思想与转化思想的掌握. 首先利用转化思想,将问题由一般向特殊转化，利用反证法假设结论成立；其次利用极限求得$a$的可能取值，最后由$a$的取值进行证明.

假设存在实数$a,b$，使得$a_n=a+b\left(\frac{2}{3}\right)^n$恒成立.

当$b=\frac{2}{3}$时，则有$a_n=a+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，可得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

对$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n-1}$两边取极限，得$a=\frac{a}{a-1}$，解得$a=0$或$a=2$.

当$a=0$时，数列$\{a_n\}$为$a_1=3,\ q=\frac{2}{3}$的等比数列，存在实数$a,b$使得$a_{n+1}\neq\frac{a_n}{a_n-1}$.

若$a=2$，代入$a_n=2+b\left(\frac{2}{3}\right)^n$，可求得$b=\frac{3}{2}$，此时$a_n=2+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，验证$a_2$即可得出矛盾. 所以，这样的实数$a,b$不存在.

本题主要考查了极限的掌握情况，以及在解题中的灵活运用.

## 参考文献


[1]　王孟洁. 高中数学中的函数与方程思想[J]. 现代教育科学，2012：12-13.

[2]　赫升. 高中数学思想方法的学习[J]. 神州. 2011，15-17.

[3]　郭计敏. 浅谈数学教学中的几种数学思想[J]. 科技信息，2009：31-34.

[4]　宋和全. 注重教学反思　提高课堂效率[J]. 今日科苑，2008：7-8.

[5]　徐杰. 巧用函数与方程的思维联系解题[N]. 贵阳学院学报，(自然科学版) 2008：5-6.

[6]　段世彬. 用整体思想解高考题[J]. 数学教学通讯，1998：25-26.

[7]　人民日报[N]. 2012，7：18.

[8]　傅学府."数形结合"在中学解题中的应用[J]. 中国科教创新导刊，2010：6-9.

[9]　代尔宁，唐强. 山重水复疑无路　函数思想建奇功[J]. 数学教学通讯：数学金刊，2009.

[10]　李建红. 数学解题中的划归思想[J]. 考试周刊，2012.