(3-21)

因此由不等式(3-16)可得出

$$\dot{V}(t) \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(t)\Phi\xi(t) + h\xi^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}Z^{-1}F\xi(t) < 0\,. \tag{3-22}$$

由于矩阵 C 的谱半径小于 1，故差分系统 $x(t) - Cx(t-\tau) = 0$ 是稳定的. 故由定理 2.2 可得出不确定中立型系统(3-12)是鲁棒渐近稳定的. 由此，定理 3.2 证毕.

当系统(3-12)中中立型时滞为常时滞 τ 时，系统表示如下：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - (C + \Delta C(t))\dot{x}(t-\tau) = (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))x(t-h(t)), \\ x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \ \ \forall\theta \in [-\tau^*, 0]. \end{cases} \tag{3-23}$$

通过变换，系统(3-23)可转换为如下形式：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - C\dot{x}(t-\tau) = Ax(t) + Bx(t-h(t)) + Lu, \\ z = E_a x(t) + E_b x(t-h) + E_c \dot{x}(t-\tau(t)). \end{cases} \tag{3-24}$$

其中 $\mu = K(t)z$ ，而且有下面不等式成立，即

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{T}}u \leqslant {} & [E_a x(t) + E_b x(t-h(t)) + E_c \dot{x}(t-\tau)]^{\mathrm{T}} \\ & \cdot [E_a x(t) + E_b x(t-h(t)) + E_c \dot{x}(t-\tau)]. \end{aligned} \tag{3-25}$$

使用李雅普诺夫直接方法，可以得到满足条件(3-13)和(3-25)时，系统(3-24)的稳定性定理.

定理 3.3 当矩阵 C 的谱半径小于 1 时，若存在实矩阵：$P_i\ (i = 1,2,\cdots,6)$，$M_{12}, N_i\ (i = 1,2,\cdots,5)$，$X_{ij}\ (i,j = 1,2,\cdots,5)$ 正定矩阵：G, R, S, Q, P_1，以及非负定矩阵：M_{11}, M_{22} 及正实数 $\varepsilon > 0$，使得下面线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \varepsilon E_a^{\mathrm{T}} \\ * & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & \Pi_{45} & \varepsilon E_b^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & \Pi_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{3-26}$$

$$
\begin{bmatrix}
X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & N_1 \\
* & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} & N_2 \\
* & * & X_{33} & X_{34} & X_{35} & N_3 \\
* & * & * & X_{44} & X_{45} & N_4 \\
* & * & * & * & X_{55} & N_5 \\
* & * & * & * & * & G
\end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{3-27}
$$

$$
\begin{bmatrix}
M_{11} & M_{12} \\
M_{12}^{\mathrm{T}} & M_{22}
\end{bmatrix} \geqslant 0, \quad (1-h_D)S - M_{22} \geqslant G, \tag{3-28}
$$

其中

$$\varPi_{11} = P_2^{\mathrm{T}} A + A^{\mathrm{T}} P_2 + Q + N_1 + N_1^{\mathrm{T}} + hX_{11},$$

$$\varPi_{12} = P_1 - P_2^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}} P_3 + N_2^{\mathrm{T}} + hX_{12},$$

$$\varPi_{13} = P_2^{\mathrm{T}} C + A^{\mathrm{T}} P_4 + N_3^{\mathrm{T}} + hX_{13},$$

$$\varPi_{14} = P_2^{\mathrm{T}} B + A^{\mathrm{T}} P_5 + M_{12}^{\mathrm{T}} - N_1 + N_4^{\mathrm{T}} + hX_{14}$$

$$\varPi_{15} = P_2^{\mathrm{T}} L + A^{\mathrm{T}} P_6 + N_5^{\mathrm{T}} + hX_{15},$$

$$\varPi_{22} = hS + R - P_3 - P_3^{\mathrm{T}} + hX_{22},$$

$$\varPi_{23} = P_3^{\mathrm{T}} C - P_4 + hX_{23},$$

$$\varPi_{24} = P_3^{\mathrm{T}} B - P_5 - N_2 + hX_{24},$$

$$\varPi_{25} = P_3^{\mathrm{T}} L - P_6 + hX_{25},$$

$$\varPi_{33} = P_4^{\mathrm{T}} C + C^{\mathrm{T}} P_4 - R + hX_{33},$$

$$\varPi_{34} = P_4^{\mathrm{T}} B + C^{\mathrm{T}} P_5 - N_3 + hX_{34},$$

$$\varPi_{35} = rP_4^{\mathrm{T}} D + C^{\mathrm{T}} P_6 + hX_{35},$$

$$\varPi_{36} = P_4^{\mathrm{T}} L + C^{\mathrm{T}} P_7 + hX_{36},$$

$$\varPi_{44} = P_5^{\mathrm{T}} B + B^{\mathrm{T}} P_5 - (1-h_D)Q + hM_{11} - M_{12} - M_{12}^{\mathrm{T}} - N_4 - N_4^{\mathrm{T}} + hX_{44},$$

$$\varPi_{45} = P_5^{\mathrm{T}} L + B^{\mathrm{T}} P_6 - N_5^{\mathrm{T}} + hX_{45},$$

$$\varPi_{55} = L^{\mathrm{T}} P_6 + P_6^{\mathrm{T}} L - \varepsilon I + hX_{55}.$$

则中立型系统(3-24)是渐近稳定的.

证明　根据系统(3-24)，我们选择下面的李雅普诺夫泛函：

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)+V_4(t), \tag{3-29}$$

其中

$$V_1(t)=\xi^{\mathrm{T}}(t)EP\xi(t),$$

$$V_2(t)=\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\mathrm{d}s,$$

$$V_3(t)=\int_{-h(t)}^{0}\mathrm{d}\theta\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)S\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

$$V_4(t)=\int_{0}^{t}\mathrm{d}\theta\int_{\theta-h(\theta)}^{\theta}\begin{bmatrix}x^{\mathrm{T}}(\theta-h(\theta)) & \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{12}^{T} & M_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(\theta-h(\theta))\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s,$$

其中 $\xi(t)=\begin{bmatrix}x^{\mathrm{T}}(t) & \dot{x}^{\mathrm{T}}(t) & x^{\mathrm{T}}(t-\tau) & x^{\mathrm{T}}(t-h(t)) & u^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $E=\begin{bmatrix}I & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$P=\begin{bmatrix}P_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$P_1>0$，$R>0$，$S>0$，$Q>0$，$S>0$，$\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{12}^{\mathrm{T}} & M_{22}\end{bmatrix}>0$ 是矩阵不等式(3-26)，(3-27)与(3-28)的解.

然后，我们对上述李雅普诺夫泛函 $V(t)$ 沿着系统(3-24)求导，即

$$V(t)=\dot{V}_1(t)+\dot{V}_2(t)+\dot{V}_3(t)+\dot{V}_4(t). \tag{3-30}$$

通过(3-29)，我们得出

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t)&=2\xi^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ 0\end{bmatrix}=2\xi^{\mathrm{T}}(t)P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \begin{pmatrix}-\dot{x}(t)+Ax(t)+Bx(t-h(t))\\ +C\dot{x}(t-\tau)+D\int_{t-r}^{t}x(s)\mathrm{d}s+Lu\end{pmatrix}\end{bmatrix}\\ &=\xi^{\mathrm{T}}(t)[\Gamma+\Gamma^{\mathrm{T}}]\xi(t),\end{aligned}$$

其中

$$\varGamma_1=\begin{bmatrix} P_1^{\mathrm{T}} & P_2^{\mathrm{T}} \\ 0 & P_3^{\mathrm{T}} \\ 0 & P_4^{\mathrm{T}} \\ 0 & P_5^{\mathrm{T}} \\ 0 & P_6^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ A & -I & B & 0 & C \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t) \leqslant\ & \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{x}(t)-\dot{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)R\dot{x}(t-\tau)+x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) \\ & -(1-h_D)x^{\mathrm{T}}(t-h(t))Qx(t-h(t)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(t) &= h(t)\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)S\dot{x}(t)-(1-\dot{h}(t))\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)S\dot{x}(s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant h\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)S\dot{x}(t)-(1-h_D)\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)S\dot{x}(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_4(t) =\ & h(t)x^{\mathrm{T}}(t-h(t))M_{11}x(t-h(t))+2x^{\mathrm{T}}(t)M_{12}^{\mathrm{T}}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s \\ & +\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)M_{22}\dot{x}(s)\mathrm{d}s \\ \leqslant\ & hx^{\mathrm{T}}(t-h(t))M_{11}x(t-h(t))+2x^{\mathrm{T}}(t)M_{12}^{\mathrm{T}}x(t-h(t)) \\ & -2x^{\mathrm{T}}(t-h(t))M_{12}x(t-h(t))+\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)M_{22}\dot{x}(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由不等式(3-30)可以得出：

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leqslant\ & x^{\mathrm{T}}(t)[P_2^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}P_2+Q]x(t)+2x^{\mathrm{T}}(t)[P_1-P_2^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}P_3]\dot{x}(t) \\ & +2x^{\mathrm{T}}(t)[P_2^{\mathrm{T}}C+A^{\mathrm{T}}P_4]\dot{x}(t-\tau)+2x^{\mathrm{T}}(t)[P_2^{\mathrm{T}}B+A^{\mathrm{T}}P_5+M_{12}^{\mathrm{T}}]x(t-h(t)) \\ & +2x^{\mathrm{T}}(t)[P_2^{\mathrm{T}}L+A^{\mathrm{T}}P_6]u+\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)[hS+R-P_3-P_3^{\mathrm{T}}]\dot{x}(t) \\ & +2\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)[P_3^{\mathrm{T}}C-P_4]\dot{x}(t-\tau)+2\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)[P_3^{\mathrm{T}}B-P_5]x(t-h(t)) \\ & +2\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)[P_3^{\mathrm{T}}C-P_6]u+2\dot{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)[P_4^{\mathrm{T}}C+C^{\mathrm{T}}P_4-R]\dot{x}(t-\tau) \\ & +2\dot{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)[P_4^{\mathrm{T}}B+C^{\mathrm{T}}P_5]\cdot x(t-h(t))+2\dot{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)[P_4^{\mathrm{T}}L+C^{\mathrm{T}}P_6]u \\ & +2x^{\mathrm{T}}(t-h(t))[P_5^{\mathrm{T}}B+B^{\mathrm{T}}P_5-(1-h_D)Q+hM_{11}-M_{12}-M_{12}^{\mathrm{T}}]x(t-h(t)) \\ & +2x^{\mathrm{T}}(t-h(t))[P_5^{\mathrm{T}}L+B^{\mathrm{T}}P_6]u \\ & -\int_{t-h(t)}^{r}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)G\dot{x}(s)ds+2u^{\mathrm{T}}[P_7^{\mathrm{T}}L+L^{\mathrm{T}}P_7]u+2[x^{\mathrm{T}}(t)N_1+\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)N_2 \\ & +x^{\mathrm{T}}(t-\tau)N_3+x^{\mathrm{T}}(t-h(t))N_4+u^{\mathrm{T}}N_5]\left[x(t)-x(t-h(t))+\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right] \\ \leqslant\ & \xi^{\mathrm{T}}(t)\varSigma\xi(t),\end{aligned}$$

其中

$$\varSigma=\begin{bmatrix}\varSigma_{11} & \varSigma_{12} & \varSigma_{13} & \varSigma_{14} & \varSigma_{15}\\ * & \varSigma_{22} & \varSigma_{23} & \varSigma_{24} & \varSigma_{25}\\ * & * & \varSigma_{33} & \varSigma_{34} & \varSigma_{35}\\ * & * & * & \varSigma_{44} & \varSigma_{45}\\ * & * & * & * & 0\end{bmatrix},$$

这里 $\varSigma_{ij}=\varPi_{ij}-hX_{ij}$ ，$\Pi_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,5)$均与定理 3.3 中定义的相同.

对满足下面条件的任意矩阵：

$$\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15}\\ * & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25}\\ * & * & X_{33} & X_{34} & X_{35}\\ * & * & * & X_{44} & X_{45}\\ * & * & * & * & X_{55}\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

均有下式成立：

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)hX\xi(t)-\int_{t-h(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(t)\varOmega\xi(t)\mathrm{d}s\geqslant 0,$$

综上所述，可以得出

$$\dot{V}\leqslant\xi^{\mathrm{T}}(t)\varPhi\xi(t)-\int_{t-h(t)}^{t}\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\varOmega\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s, \tag{3-31}$$

其中

$$\varPhi=\begin{bmatrix}\varPi_{11} & \varPi_{12} & \varPi_{13} & \varPi_{14} & \varPi_{15}\\ * & \varPi_{22} & \varPi_{23} & \varPi_{24} & \varPi_{25}\\ * & * & \varPi_{33} & \varPi_{34} & \varPi_{35}\\ * & * & * & \varPi_{44} & \varPi_{45}\\ * & * & * & * & P_6^{\mathrm{T}}L+L^{\mathrm{T}}P_6\end{bmatrix},$$

$$N=\begin{bmatrix}N_1^{\mathrm{T}} & N_2^{\mathrm{T}} & N_3^{\mathrm{T}} & N_4^{\mathrm{T}} & N_5^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}，\ \varOmega=\begin{bmatrix}X & N\\ * & G\end{bmatrix},$$

其中 $\varPi_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,5)$均与定理 3.3 中定义的相同.

使用定理 3.3 及引理 1.1，我们可找到实矩阵：$P_i\ (i=2,3,\cdots,6)$，M_{12}，$N_i\ (i=1,2,\cdots,5)$，$X_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,5)$，正定矩阵：$G$，$H$，$R$，$W$，$S$，$Q$，$P_1$，以及非负定矩阵：$M_{11},M_{22}$ 及正实数 $\varepsilon>0$，使得下面线性矩阵不等式成立：

$$\dot{V}\leqslant \xi^{\mathrm{T}}(t)\Phi\xi(t)-\int_{t-h(t)}^{t}\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\Omega\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s+\varepsilon\Big[E_a x(t)+E_b x(t-h(t))$$

$$+E_d\int_{t-r}^{t}x(s)\mathrm{d}s\Big]^{\mathrm{T}}\Big[E_a x(t)+E_b x(t-h(t))+E_d\int_{t-r}^{t}x(s)\mathrm{d}s\Big]<0, \tag{3-32}$$

使用 S-过程，容易推出下面不等式：

$$\dot{V}\leqslant \xi^{\mathrm{T}}(t)\Phi\xi(t)-\int_{t-h(t)}^{t}\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\Omega\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s<0\,.$$

由于矩阵 C 的谱半径小于 1，故差分系统 $x(t)-Cx(t-\tau)=0$ 是稳定的. 故由定理 2.2 可以得出系统(3-23)为渐近稳定的. 由此，定理 3.3 证毕.

当 $\Delta A(t)$，$\Delta B(t)$，$\Delta C(t)$ 均为零时，系统(3-23)表示为：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)-C\dot{x}(t-\tau)=Ax(t)+Bx(t-h(t)),\\ x(t_0+\theta)=\varphi(\theta),\quad \forall\theta\in[-\tau^*,0].\end{cases}\tag{3-33}$$

使用与定理 3.3 类似的方法，我们可以得到关于系统(3-33)的稳定性定理.

定理 3.4　当矩阵 C 的谱半径小于 1 时，若存在实矩阵：$P_i\ (i=2,3,\cdots,5)$，M_{12}，$N_i\ (i=1,2,\cdots,4)$，$X_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,4)$ 正定矩阵：G，H，R，W，S，Q，P_1，以及非负定矩阵：M_{11},M_{22} 及正实数 $\varepsilon>0$，使得下面线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14}\\ * & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24}\\ * & * & \Pi_{33} & \Pi_{34}\\ * & * & * & \Pi_{44}\end{bmatrix}<0,\tag{3-34}$$

$$\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{12}^{\mathrm{T}} & M_{22}\end{bmatrix}\geqslant 0,\quad (1-h_D)S-M_{22}\geqslant G,\tag{3-35}$$

$$
\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & N_1 \\ * & X_{22} & X_{23} & X_{24} & N_2 \\ * & * & X_{33} & X_{34} & N_3 \\ * & * & * & X_{44} & N_4 \\ * & * & * & * & G \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{3-36}
$$

其中 Π_{ij} ($i, j = 1,2,\cdots,4$)均与定理 3.3 中定义的相同，则中立型系统(3-33)是渐近稳定的.

注意 3.1　选取：

$$
X = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} G^{-1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix},
$$

我们容易得出：当 $X \geqslant 0$ 时，不等式(3-31)成立. 由定理 3.3 以及引理 1.1，容易推出推论 3.1.

推论 3.1　当矩阵 C 的谱半径小于 1 时，若存在实矩阵：P_i $(i = 2,3,\cdots,6)$ ，M_{12}, N_i $(i = 1,2,\cdots,5)$ ，X_{ij} $(i, j = 1,2,\cdots,5)$ 正定矩阵：G , H , R , W , S , Q , P_1 ，以及非负定矩阵：M_{11}, M_{22} 及正实数 $\varepsilon > 0$ ，使得下面线性矩阵不等式成立：

$$
\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & hN_1 & \varepsilon E_a^{\mathrm{T}} \\ * & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} & hN_2 & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} & hN_3 & \varepsilon E_b^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & \Pi_{44} & \Pi_{45} & hN_4 & 0 \\ * & * & * & * & \Pi_{55} & hN_5 & 0 \\ * & * & * & * & * & -hG & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{3-37}
$$

$$
\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^{\mathrm{T}} & M_{22} \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad (1 - h_D)S - M_{22} \geqslant G, \tag{3-38}
$$

其中 Π_{ij} ($i, j = 1,2,\cdots,5$)均与定理 3.3 中定义的相同，则中立型系统(3-23)是鲁棒渐近稳定的.

注意 3.2　选取：

$$X=\begin{bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}G^{-1}\begin{bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\end{bmatrix},$$

我们容易得出：当 $X\geqslant 0$ 时，不等式（3-31）成立. 由定理 3.3 以及引理 1.1，我们容易推出推论 3.2.

推论 3.2　当矩阵 C 的谱半径小于 1 时，若存在实矩阵: $P_i\ (i=2,3,\cdots,5)$，$M_{12}, N_i\ (i=1,2,\cdots,4)$，$X_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,4)$ 正定矩阵：G, H, R, W, S, Q, P_1，以及非负定矩阵: M_{11}, M_{22} 及正实数 $\varepsilon>0$，使得下面线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & hN_1\\ * & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & hN_2\\ * & * & \Pi_{33} & \Pi_{34} & hN_3\\ * & * & * & \Pi_{44} & hN_4\\ * & * & * & * & -hG\end{bmatrix}<0, \tag{3-39}$$

$$\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{12}^{\mathrm{T}} & M_{22}\end{bmatrix}\geqslant 0,\ \ (1-h_D)S-M_{22}\geqslant G, \tag{3-40}$$

其中 $\Pi_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,4)$均与定理 3.3 中定义的相同，则中立型系统(3-33)是渐近稳定的.

3.1.3　数值算例

为了验证本章所得结果的有效性，下面给出三个例子.

例 3.1　考虑如下不确定中立型系统：

$$\dot{x}(t)-\begin{bmatrix}c & 0\\ 0 & c\end{bmatrix}\dot{x}(t-\tau)=\begin{bmatrix}-2+\delta_1 & 0\\ 0 & -1+\delta_2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}-1+\gamma_1 & 0\\ -1 & -1+\gamma_2\end{bmatrix}x(t-h(t)), \tag{3-41}$$

其中 δ_1, δ_2, γ_1, γ_2 均为未知的参数，且满足

$$|\delta_1| \leqslant 1.6 \ , \ |\delta_2| \leqslant 0.05 \ , \ |\gamma_1| \leqslant 0.1 \ , \ |\gamma_2| \leqslant 0.3 .$$

应用定理 3.2 我们研究了系统(3-41)的鲁棒稳定性问题. 在表 3-1 中列出了当 $h_D = 0.1$ 且 $|c|$ 取不同值时保证系统鲁棒稳定的最大离散时滞 h；在表 3-2 中列出了当 $c = 0.1$ 且 h_D 取不同值时保证系统鲁棒稳定的最大离散时滞 h. 而文献[89-93]也对系统(3-41)的鲁棒稳定性问题进行了研究. 通过对比可以发现本章的结果具有更小的保守性.

表 3-1　对应不同的 $|c|$ 保证系统**(3-41)**稳定的离散时滞上界对比表

$\lvert c\rvert$	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70
h（[89]）	0.92	0.73	0.55	0.41	0.29	0.19	0.11	0.04
h（[90]）	1.10	0.85	0.64	0.47	0.33	0.22	0.13	0.05
h（[91]）	1.107 2	0.920 8	0.751 6	0.599 1	0.462 5	0.340 2	0.231 0	0.127 7
h（[92]）	1.166 0	0.962 0	0.778 0	0.616 0	0.472 0	0.346 0	0.235 0	0.130 0
h（[93]）	1.17	1.07	0.95	0.83	0.70	0.51	0.31	0.14
h（[89]）	0.92	0.73	0.55	0.41	0.29	0.19	0.11	0.04
h（定理 3.2）	3.19	2.34	1.75	1.33	1.00	0.74	0.45	0.24

表 3-2　对应不同的 h_D 保证系统**(2-23)**稳定的离散时滞上界对比表

h_D	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
h（[89]）	0.80	0.73	0.65	0.57	0.49	0.41	0.33	0.24	0.16	0.07
h（定理 3.2）	3.24	2.33	1.82	1.47	1.19	0.95	0.75	0.58	0.41	0.25

当 $c = 0.1$ 且 $h_D = 0$ 时，利用文献[90-93, 102]中的结论，使得系统(3-41)渐近稳定的离散时滞 $h(t)$ 分别满足条件：

$$h(t) \leqslant 0.87 \ , \ h(t) \leqslant 0.940\,4 \ , \ h(t) \leqslant 0.998 \ , \ h(t) \leqslant 1.10 \text{ 及 } h(t) \leqslant 1.92 .$$

而利用本章的定理，可以得出保证系统渐近稳定的离散时滞的上限为 3.246.

当 $c = 0$ 且 $h_D = 0$ 时，利用本章的定理可以得到保证系统渐近稳定的离散时滞的上限，并在表 3-3 中把我们及文献[53, 90, 94-97, 102, 103]的结果分别

列出. 通过比较可以看出本章方法所得的结果具有较小的保守性.

表 3-3　保证系统**(3-41)**稳定的离散时滞上界 ***h***

	[94]	[53]	[95]	[96]	[90]	[97]	[102]	[103]	定理 3.2
h	0.241 2	0.241 2	1.149 0	1.149 0	1.149 0	1.162 3	1.990 0	3.133 9	7.999 6

例 3.2　考虑如下不确定中立型系统：

$$\dot{x}(t)-C\dot{x}(t-\tau)=(A+\Delta A(t))x(t)+(B+\Delta B(t))x(t-h), \tag{3-42}$$

其中 $A=\begin{bmatrix}-0.9 & 0.2\\ 0.1 & -0.9\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}-1.1 & -0.2\\ -0.1 & -1.1\end{bmatrix}$,$C=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ 0.2 & -0.1\end{bmatrix}$,$E_a=E_b=I$,$L=\alpha L$. 且对任意 $\forall t$ 都存在 $\alpha>0$ 使得：

$$\|\Delta A(t)\|\leqslant\alpha \text{ ，} \|\Delta B(t)\|\leqslant\alpha .$$

当 $\Delta A(t)=\Delta B(t)=0$ 时，利用文献[91，107] 中的结论，使得系统(3-42)渐近稳定的离散时滞 $h(t)$ 分别满足：

$$h(t)\leqslant 1.784\,4 \text{ ，} h(t)\leqslant 1.371\,8 \text{ ，} h(t)\leqslant 1.652\,7 \text{ ，} h(t)\leqslant 1.785\,6 .$$

而利用本章的定理，可以得出保证系统渐近稳定的离散时滞的上限 h 为 1.807 7. 由此可以看出本章的结果较文献[1, 2, 3, 4]具有更低的保守性.

表 3-4 分别列出了随 α 的变化 ,保证系统(3-42)渐近稳定的最大离散时滞 h. 可以看出，随着 α 的变大，保证系统(3-42)渐近稳定的最大离散时滞 h 不断变小. 这和实际情况是非常吻合的. 而本例进一步证实了本章方法较已有文献[101]具有较小的保守性.

表 3-4　保证系统(3-42)稳定的离散时滞上界 ***h***

α	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
h[101]	1.61	1.51	1.41	1.30	1.19	1.08	0.96	0.83
h ((定理 3.2))	1.807	1.732	1.661	1.595	1.534	1.477	1.424	1.374

例 3.3　考虑如下不确定中立型系统：

$$\dot{x}(t)-C\dot{x}(t-\tau)=(A+\Delta A(t))x(t)+(B+\Delta B(t))x(t-h), \tag{3-43}$$

其中 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}0.4 & 0\\ 0 & 0.4\end{bmatrix}$，$L=\alpha L$，$E_a=\begin{bmatrix}0.6 & 0\\ 0 & 0.6\end{bmatrix}$，$E_b=\begin{bmatrix}0 & -0.1\\ 0.1 & 0.3\end{bmatrix}$，$E_c=0$，$F=\begin{bmatrix}0.8 & 0\\ 0 & 0.8\end{bmatrix}$.

当 $\alpha=0$ 时，利用文献[91,107]中的结论可得出保证系统(3-43)渐近稳定的最大离散时滞 h 分别为 1.687 6 与 1.061 6；当 $\alpha=0.1$ 时，利用文献[107]中的结论可得出保证系统(3-43)渐近稳定的最大离散时滞 h 为 0.972 2．而利用本章定理的结论我们可以得出：当 $\alpha=0$（或 $\alpha=0.1$）且 $h\leqslant 6.605\,5\times10^{15}$ 时，系统(3-43)是渐近稳定的，而分别使用定理 3.3 与定理 3.4，我们可以得到：对任意的 h，系统(3-43)均是稳定的．由此可以看出本章的结果较文献[91, 107]具有更低的保守性．

选择离散时滞 $h=100.4+0.3\sin(t)$，中立型时滞 $\tau=0.4$ 以及初始条件 $\varphi(\theta)=[0.1\quad 0.1]^{\mathrm{T}}$，通过 Matlab 的 Simulink 工具箱仿真得到了系统状态轨迹的仿真图．图 3-1 与图 3-2 分别描述了当 $\alpha=0$ 时，系统(3-43)的状态向量的时间响应图和相位图；图 3-3 与图 3-4 分别描述了当 $\alpha=0.1$ 时，系统(3-43)的时间响应图和相位图．从图例可以看出系统(3-43)是渐近稳定的，从而进一步证实本章所提供的方法的有效性．

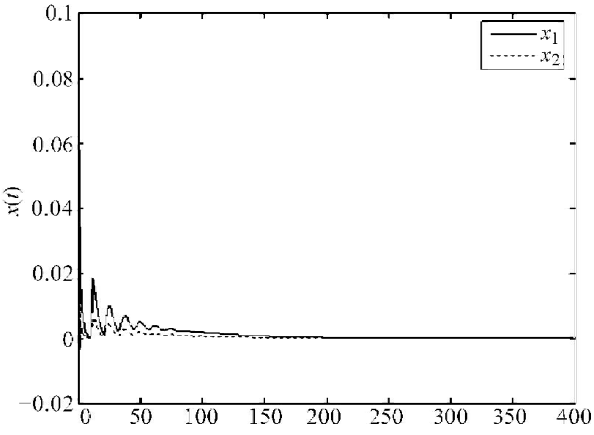

图 3-1　当 $\alpha=0$ 时系统(3-43)状态向量 $x(t)$ 的时间响应图

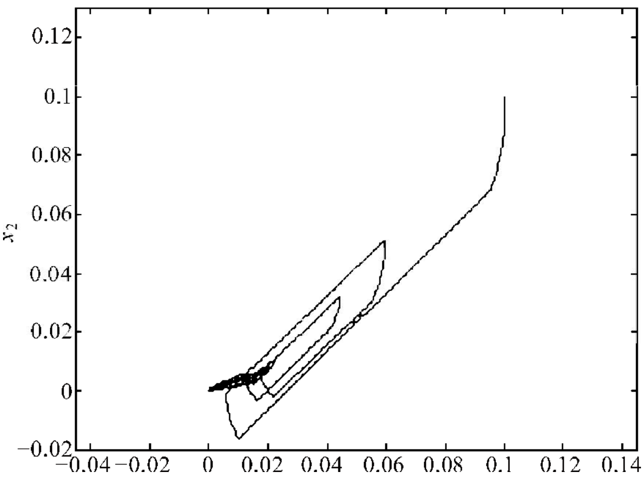

图 3-2　当 $\alpha = 0$ 时系统(3-43)状态向量 $x(t)$ 相位图

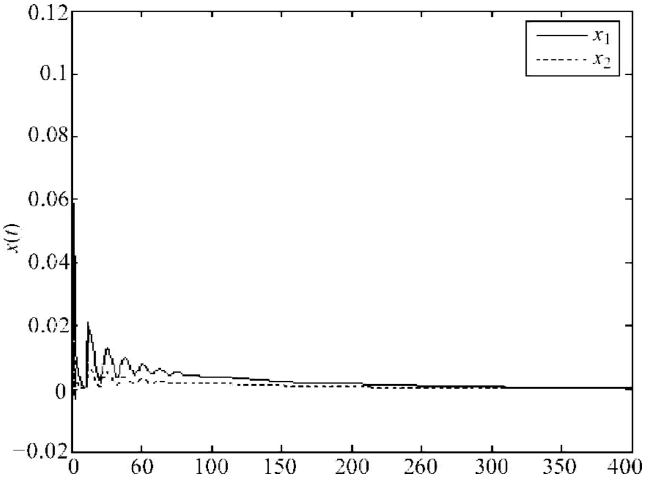

图 3-3　当 $\alpha = 0.1$ 时系统(3-43)状态向量 $x(t)$ 的时间响应图

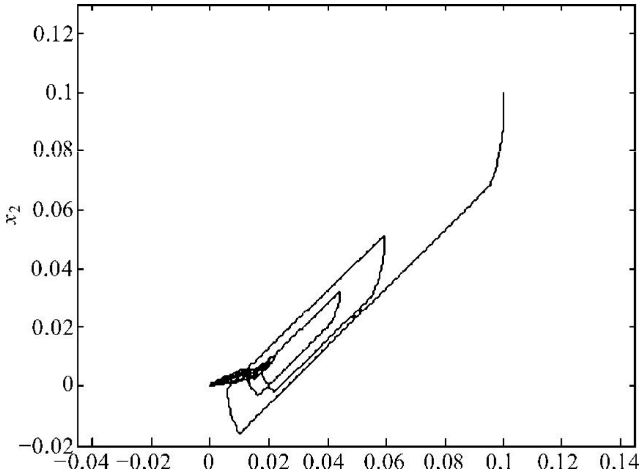

图 3-4 当 $\alpha = 0.1$ 时系统(3-43)状态向量 $x(t)$ 相位图

3.2 具有多时滞的不确定中立型系统的鲁棒稳定性

实际系统中不可避免地存在着不确定性，比如工作条件或系统环境的变化、数据误差、元器件的老化或坏损等. 这些不确定性因素的存在常常会使得被控对象本身的特性随之发生变化，从而导致系统丧失许多性质. 现代控制理论方法，是基于对象系统的一个精确的数学模型，根据具体的需要，通过对系统数学模型进行分析来达到实际的要求. 而在建模过程中，也存在着种种不确定性，比如说系统本身如果比较复杂，为了研究的方便，人们往往会做多种多样的简化. 由于上述两种不确定性的存在，使得现代控制理论方法得到的结果很难应用于实际工程中. 鲁棒控制理论则针对不确定性进行了考虑，弥补了现代控制理论中的部分缺陷，使得对系统的分析和研究方法更加符合实际.

近几十年以来，对不确定时滞系统的鲁棒稳定性问题的研究一直是控制界学者的活跃研究领域,一大批专家和学者在这个问题上付出了巨大的努力，倾注了大量的心血，并获得了丰硕的研究成果. 本节主要研究具有多时滞的不确定中立型系统的稳定性问题. 通过利用构造 Lyapunov 范函并结合不等式分析技巧，给出一个与时滞相关的鲁棒稳定性条件. 该判定条件是一个充

分性条件，并以线性矩阵不等式的形式给出，最后通过数值算例验证了我们结果的可行性和有效性.

3.2.1 具有多时滞的不确定时滞中立型系统的的稳定性定理

3.2.1.1 系统描述

本节所研究的具有时变离散时滞的中立型系统表示如下：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A+\Delta A(t))x(t) + \sum_{i=1}^{l}(B_i + \Delta B_i(t))x(t-h_i(t)) \\ \qquad + \sum_{j=1}^{m}(C_j + \Delta C_j(t))\dot{x}(t-\tau_j(t)), \\ x(t_0+\theta) = \varphi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau^*, 0]. \end{cases} \tag{3-44}$$

其中 $x(t) \in \Re^n$ 为系统的状态向量，A ，$B_i \in \Re^{n\times n}$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$ 和 $C_j \in \Re^{n\times n}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ 为常数矩阵， $\Delta A(t)$, $\Delta B_i(t)(1 \leqslant i \leqslant l)$ 以及 $\Delta C_j(t)(1 \leqslant j \leqslant m)$ 为不确定的扰动矩阵， $h_i(t)$ 和 $\tau_j(t)$ 是有界的实变时滞，且满足条件：

$$\begin{cases} 0 \leqslant h_i(t) \leqslant h_{Mi} \leqslant +\infty, \ \ \dot{h}_i(t) \leqslant h_{Di} \leqslant 1, \ \ i = 1,2,\cdots,l, \\ 0 \leqslant \tau_i(t) \leqslant \tau_{Mj} < +\infty, \ \ \dot{\tau}_j(t) \leqslant \tau_{Dj} < 1, \ \ j = 1,2,\cdots,m, \end{cases} \tag{3-45}$$

其中 τ_{Mj} ， τ_{dj} ($j = 1,2,\cdots,m$), h_{Mi} ， h_{di} ($i = 1,2,\cdots,l$)均为常数，且 $h_M = \max_{1\leqslant i\leqslant l} h_{Mi}$ ， $\tau_M = \max_{1\leqslant j\leqslant l} \tau_{Mj}$ 及 $\tau^* = \max(\tau_M, h_M)$.

系统的不确定扰动项描述为

$$\begin{cases} \Delta A(t) = LK(t)E_a, \Delta B(t) = LK(t)E_b, i = 1,2,\cdots,l, \\ \Delta C(t) = LK(t)E_c, j = 1,2,\cdots,m. \end{cases} \tag{3-46}$$

其中 L , E_a , E_{bi} ($i = 1,2,\cdots,l$)和 E_{cj} ($j = 1,2,\cdots,m$)是适当维数的已知实矩阵， $K(t)$ 是具有勒贝格可测元的适当维数的未知函数，且满足不等式：

$$K^{\mathrm{T}}(t)K(t) \leqslant I . \tag{3-47}$$

3.2.1.2　理论推导

我们把系统(3-44)变形为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{l} B_i x(t-h_i(t)) + \sum_{j=1}^{m} C_j \dot{x}(t-\tau_j(t)) + Lu, \\ z = E_a x(t) + \sum_{i=1}^{l} E_{bi} x(t-h_i(t)) + \sum_{j=1}^{m} E_{cj} \dot{x}(t-\tau_j(t)), \end{cases}$$

其中 $u = K(t)z$. 为了得到与离散时滞 $h_i(t)$ 相关的稳定性条件，我们应用 Newton-Leibniz 的转换公式：$x(t-h_i(t)) = x(t) - \int_{t-h_i(t)}^{t} \dot{x}(\xi)\mathrm{d}\xi$ ($i = 1,2,\cdots,l$) ，将原始的控制系统转化为具有分布时滞的控制系统，即

$$\dot{x}(t) = \left(A + \sum_{i=1}^{l} B_i \right) x(t) - \sum_{i=1}^{l} B_i \int_{t-h_i(t)}^{t} \dot{x}(s)\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m} C_j \dot{x}(t-\tau_j(t)) + Lu \quad , \tag{3-48}$$

并且 u 满足下面不等式：

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{T}} u \leqslant & \left[E_a x(t) + \sum_{i=1}^{l} E_{bi} x(t-h_i(t)) + E_{cj} \sum_{j=1}^{m} E_{cj} \dot{x}(t-\tau_j(t)) \right]^{\mathrm{T}} \\ & \cdot \left[E_a x(t) + \sum_{i=1}^{l} E_{bi} x(t-h_i(t)) + E_{cj} \sum_{j=1}^{m} E_{cj} \dot{x}(t-\tau_j(t)) \right] \\ = & \left[\left(E_a x(t) + \sum_{i=1}^{l} E_{bi} \right) x(t) - \sum_{i=1}^{l} E_{bi} \left(\int_{t-h_i(t)}^{t} \dot{x}(s)\mathrm{d}s \right) + E_{cj} \sum_{j=1}^{m} E_{cj} \dot{x}(t-\tau_j(t)) \right]^{\mathrm{T}} \\ & \cdot \left[\left(E_a x(t) + \sum_{i=1}^{l} E_{bi} \right) x(t) - \sum_{i=1}^{l} E_{bi} \left(\int_{t-h_i(t)}^{t} \dot{x}(s)\mathrm{d}s \right) + E_{cj} \sum_{j=1}^{m} E_{cj} \dot{x}(t-\tau_j(t)) \right]. \end{aligned} \tag{3-49}$$

对于具有时滞的不确定中立型系统，我们有如下的系统鲁棒稳定性定理.

定理 3.5　当矩阵 C 的谱半径满足条件：$\rho(C) < 1$ 时，若存在实矩阵：P_2 和 P_3 ，正定矩阵：R_i $(i = 1,2,\cdots,l)$ ，Q_j $(j = 1,2,\cdots,m)$ ，S_j $(j = 1,2,\cdots,m)$ ，N_j $(j = 1,2,\cdots,m)$ ，$M_j = \begin{bmatrix} M_{j_{11}} & M_{j_{12}} \\ M_{j_{12}}^{\mathrm{T}} & M_{j_{22}} \end{bmatrix}$ $(j = 1,2,\cdots,m)$ ，P_1 ，以及正实数 $\varepsilon > 0$ ，

使得如下的线性矩阵不等式成立：

$$
\left[\begin{matrix}
\Pi_{11} & \Pi_{12} & -P_2^{\mathrm{T}}B_1 & -P_2^{\mathrm{T}}B_2 & \cdots & -P_2^{\mathrm{T}}B_l & -P_2^{\mathrm{T}}C_1 & -P_2^{\mathrm{T}}C_2 & \cdots & -P_2^{\mathrm{T}}C_m \\
* & \Pi_{22} & -P_3^{\mathrm{T}}B_1 & -P_3^{\mathrm{T}}B_2 & \cdots & -P_3^{\mathrm{T}}B_l & -P_3^{\mathrm{T}}C_1 & -P_3^{\mathrm{T}}C_2 & \cdots & -P_3^{\mathrm{T}}C_m \\
* & * & \Pi_{33} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & * & \Pi_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & * & * & * & \cdots & \Pi_{i+2,l+2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & * & * & \cdots & * & \Pi_{l+3,l+3} & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & \Pi_{l+4,l+4} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \Pi_{l+m+2,l+m+2} \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & *
\end{matrix}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{cccccc}
M_{1_{12}}^{\mathrm{T}} & M_{2_{12}}^{\mathrm{T}} & 0 & M_{m_{12}}^{\mathrm{T}} & P_2^{\mathrm{T}}L & \varepsilon\left(E_a^{\mathrm{T}}+\sum\limits_{i=1}^{l}E_{bi}^{\mathrm{T}}\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & P_3^{\mathrm{T}}L & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon E_{b1}^{\mathrm{T}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon E_{b2}^{\mathrm{T}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon E_{bl}^{\mathrm{T}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon E_{c1}^{\mathrm{T}} \\
0 & M_{2_{12}} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon E_{c2}^{\mathrm{T}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & M_{m_{12}} & 0 & \varepsilon E_{cm}^{\mathrm{T}} \\
-(1-\tau_{d1})N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & -(1-\tau_{d2})N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
* & * & * & -(1-\tau_{dm})N_m & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\
* & * & * & * & * & -\varepsilon I
\end{array}\right] < 0, \qquad (3\text{-}50)
$$

$$
M_{j_{22}} - S_j < 0 \text{ ，} (j = 1, 2, \cdots, m) \text{ ，} \qquad (3\text{-}51)
$$

其中

$$\tilde{R}_i = \frac{R_i}{h_{Mi}},\ \ i=1,2,\cdots,l,$$

$$\Pi_{11} = P_2^{\mathrm{T}}\left(A+\sum_{i=1}^{l} B_i\right)+\left(A+\sum_{i=1}^{l} B_i\right)^{\mathrm{T}} P_2+\sum_{j=1}^{m} N_j,$$

$$\Pi_{12} = P_1 - P_2^{\mathrm{T}} + \left(A+\sum_{i=1}^{l} B_i\right)^{\mathrm{T}} P_3,$$

$$\Pi_{22} = \sum_{i=1}^{l} h_{Mii}^2 \tilde{R}_1 - (P_3 + P_3^{\mathrm{T}}) + \sum_{j=1}^{m} (\tau_{Mj} S_j + Q_j),$$

$$\Pi_{33} = -(1-h_{d1})R_1,$$

$$\Pi_{44} = -(1-h_{d2})R_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Pi_{l+2,l+2} = -(1-h_{dl})R_l,$$

$$\Pi_{l+3,l+3} = \tau_{M1} M_{l_{11}} - (1-\tau_{d1})Q_1,$$

$$\Pi_{l+4,l+4} = \tau_{M2} M_{2_{11}} - (1-\tau_{d2})Q_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Pi_{l+m+2,l+m+2} = \tau_{Mm} M_{m_{11}} - (1-\tau_{dm})Q_m,$$

则时滞不确定中立型系统(3-44)为鲁棒渐近稳定的.

证明　我们应用等价系统的方法，系统(3-44)变形如下：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ 0 = -y(t) + \left(A+\sum_{i=1}^{l} B_i\right)x(t) - \sum_{i=1}^{l} B_i \int_{t-h_i(t)}^{t} y(s)\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m} C_j y(t-\tau_j(t)) + Lu. \end{cases} \tag{3-52}$$

根据 Lyapunov 稳定性定理，我们可以选择如下恰当的 Lyapunov 泛函：

$$V(t) = V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)+V_4(t)+V_5(t)\ , \tag{3-53}$$

其中

$$V_1 = [x^{\mathrm{T}}(t), y^{\mathrm{T}}(t)]\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

$$V_2=\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{1-h_{di}}\int_{-h_i(t)}^{0}\mathrm{d}\theta\int_{t+\theta}^{t}y^{\mathrm{T}}(s)R_i y(s)\mathrm{d}s \quad ,$$

$$V_3=\sum_{j=1}^{m}\int_{t-\tau_j(t)}^{t}y^{\mathrm{T}}(s)Q_j y(s)\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{m}\int_{t-\tau_j(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)N_j x(s)\mathrm{d}s \quad ,$$

$$V_4=\sum_{j=1}^{m}\int_{-\tau_{Mj}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_{t+\theta}^{t}y^{\mathrm{T}}(s)S_j y(s)\mathrm{d}s \quad ,$$

$$V_5=\sum_{j=1}^{m}\int_{0}^{t}\mathrm{d}\theta\int_{\theta-\tau_j(\theta)}^{\theta}\left\{\begin{bmatrix}y^{\mathrm{T}}(\theta-\tau_j(\theta)) & y^{\mathrm{T}}(s)\end{bmatrix}M_j\begin{bmatrix}y(\theta-\tau_j(\theta))\\ y(s)\end{bmatrix}\right\}\mathrm{d}s \quad ,$$

其中矩阵 P_2 ，P_3 ，$R_i\ (i=1,2,\cdots,l)$ ，$Q_j\ (j=1,2,\cdots,m)$ ，$S_j\ (j=1,2,\cdots,m)$ ，$M_j\ (j=1,2,\cdots,m)$ ，$N_j\ (j=1,2,\cdots,m)$ 和 P_1 是矩阵不等式(3-50)与(3-51)的解. 根据 Lyapunov 稳定性定理，上述 Lyapunov 泛函沿着系统(3-48)的导数为：

$$\dot{V}(t)=\dot{V}_1(t)+\dot{V}_2(t)+\dot{V}_3(t)+\dot{V}_4(t)+\dot{V}_5(t) \quad , \tag{3-54}$$

其中

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t)&=2\begin{bmatrix}x^{\mathrm{T}}(t) & y^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1 & P_2^{\mathrm{T}}\\ 0 & P_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ 0\end{bmatrix}\\
&=2\begin{bmatrix}x^{\mathrm{T}}(t) & y^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1 & P_2^{\mathrm{T}}\\ 0 & P_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(t)\\ \left(\begin{array}{c}-y(t)+\left(A+\sum_{i=1}^{l}B_i\right)x(t)-\sum_{i=1}^{l}B_i\int_{t-h_i(t)}^{t}y(s)\mathrm{d}s\\ +\sum_{j=1}^{m}C_j y(t-\tau_j(t))+Lu\end{array}\right)\end{bmatrix}\\
&=x^{\mathrm{T}}(t)\left[P_2^{\mathrm{T}}\left(A+\sum_{i=1}^{l}B_i\right)+\left(A+\sum_{i=1}^{l}B_i\right)^{\mathrm{T}}P_2\right]x(t)\\
&+2x^{\mathrm{T}}(t)\left[P_1-P_2^{\mathrm{T}}+\left(A+\sum_{i=1}^{l}B_i\right)^{\mathrm{T}}P_3\right]y(t)-2\sum_{i=1}^{l}x^{\mathrm{T}}(t)P_2^{\mathrm{T}}B_i\left(\int_{t-h_i(t)}^{t}y(s)\mathrm{d}s\right)\\
&+2\sum_{j=1}^{m}[x^{\mathrm{T}}(t)P_2^{\mathrm{T}}C_j y(t-\tau_j(t))]+2x^{\mathrm{T}}(t)P_2^{\mathrm{T}}Lu-y^{\mathrm{T}}(t)[P_3+P_3^{\mathrm{T}}]y(t)\\
&-2\sum_{i=1}^{l}\left[y^{\mathrm{T}}(t)P_3^{\mathrm{T}}B_i\int_{t-h_i(t)}^{t}y(s)\mathrm{d}s\right]+2\sum_{j=1}^{m}[y^{\mathrm{T}}(t)P_3^{\mathrm{T}}C_j y(t-\tau_j(t))]+2y^{\mathrm{T}}(t)P_3^{\mathrm{T}}Lu,
\end{aligned}$$

$$\dot{V}_2=\sum_{i=1}^{l}\left[h_i(t)y^{\mathrm{T}}(t)R_iy(t)-(1-\dot{h}_i(t)\int_{t-h_i(t)}^{t}y^{\mathrm{T}}(s)R_iy(s)\mathrm{d}s\right]$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{l}\left[h_{Mi}y^{\mathrm{T}}(t)R_iy(t)-(1-h_{di})\left(\int_{t-h_i(t)}^{t}y(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}R_i\left(\int_{t-h_i(t)}^{t}y(s)\mathrm{d}s\right)\right],$$

$$\dot{V}_3=\sum_{j=1}^{m}[y^{\mathrm{T}}(t)Q_jy(t)-(1-\dot{\tau}_j(t))y^{\mathrm{T}}(1-\tau_j(t))Q_jy(1-\tau_j(t))+x^{\mathrm{T}}(t)N_jx(t)$$

$$-(1-\dot{\tau}_j(t))x^{\mathrm{T}}(1-\tau_j(t))N_jx(1-\tau_j(t))]$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{m}[y^{\mathrm{T}}(t)Q_jy(t)-(1-\tau_{dj}(t))y^{\mathrm{T}}(1-\tau_j(t))Q_jy(1-\tau_j(t))+x^{\mathrm{T}}(t)N_jx(t)$$

$$-(1-\tau_{dj}(t))x^{\mathrm{T}}(1-\tau_j(t))N_jx(1-\tau_j(t))],$$

$$\dot{V}_4=\sum_{j=1}^{m}\left[\tau_{Mj}y^{\mathrm{T}}(t)S_jy(t)-\int_{t-\tau_{Mj}}^{t}y^{\mathrm{T}}(s)S_jy(s)\mathrm{d}s\right],$$

$$\dot{V}_5=\sum_{j=1}^{m}\left[\tau_j(t)y^{\mathrm{T}}(t-\tau_j(t))M_{j_{11}}y(t-\tau_j(t))+2x^{\mathrm{T}}(t)M_{j_{12}}^{\mathrm{T}}y(t-\tau_j(t))\right.$$

$$\left.-2x^{\mathrm{T}}(t-\tau_j(t))M_{j_{12}}^{\mathrm{T}}y(t-\tau_j(t))+\int_{t-\tau_j(t)}^{t}y^{\mathrm{T}}(s)M_{j_{22}}y(s)\mathrm{d}s\right]$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{m}\left[\tau_{Mj}y^{\mathrm{T}}(t-\tau_j(t))M_{j_{11}}y(t-\tau_j(t))+2x^{\mathrm{T}}(t)M_{j_{12}}^{\mathrm{T}}y(t-\tau_j(t))\right.$$

$$\left.-2x^{\mathrm{T}}(t-\tau_j(t))M_{j_{12}}^{\mathrm{T}}y(t-\tau_j(t))+\int_{t-\tau_{Mj}}^{t}y^{\mathrm{T}}(s)M_{j_{22}}y(s)\mathrm{d}s\right].$$

可以得到

$$\dot{V}\leqslant q^{\mathrm{T}}(t)\Xi q(t)+\sum_{j=1}^{m}\int_{t-\tau_{Mj}}^{t}y^{\mathrm{T}}(s)(M_{j_{22}}-S_j)y(s)\mathrm{d}s\quad,$$

其中

$$q(t)=\left[x^{\mathrm{T}}(t)\quad y^{\mathrm{T}}(t)\quad\left(\int_{t-h_1(t)}^{t}y(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\quad\left(\int_{t-h_2(t)}^{t}y(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\right.$$

$$\cdots\quad\left(\int_{t-h_l(t)}^{t}y(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\quad y^{\mathrm{T}}(t-\tau_1(t))\quad y^{\mathrm{T}}(t-\tau_2(t))$$

$$\left.\cdots\quad y^{\mathrm{T}}(t-\tau_m(t))\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau_1(t))\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau_2(t))\quad\cdots\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau_m(t))\quad u^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

以及

$$\varXi=\left[\begin{matrix}
\varXi_{11} & \varXi_{12} & -P_2^{\mathrm{T}}B_1 & -P_2^{\mathrm{T}}B_2 & \cdots & -P_2^{\mathrm{T}}B_l & -P_2^{\mathrm{T}}C_1 & -P_2^{\mathrm{T}}C_2 & \cdots & -P_2^{\mathrm{T}}C_m \\
* & \varXi_{22} & -P_3^{\mathrm{T}}B_1 & -P_3^{\mathrm{T}}B_2 & \cdots & -P_3^{\mathrm{T}}B_l & -P_3^{\mathrm{T}}C_1 & -P_3^{\mathrm{T}}C_2 & \cdots & -P_3^{\mathrm{T}}C_m \\
* & * & \varXi_{33} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & * & \varXi_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & * & * & * & \cdots & \varXi_{i+2,l+2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & * & * & \cdots & * & \varXi_{l+3,l+3} & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & \varXi_{l+4,l+4} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \varXi_{l+m+2,l+m+2} \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
* & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & *
\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}
M_{1_{12}}^{\mathrm{T}} & M_{2_{12}}^{\mathrm{T}} & 0 & M_{m_{12}}^{\mathrm{T}} & P_2^{\mathrm{T}}L \\
0 & 0 & 0 & 0 & P_3^{\mathrm{T}}L \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & M_{2_{12}} & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & M_{m_{12}} & 0 \\
-(1-\tau_{d1})N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & -(1-\tau_{d2})N_2 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
* & * & * & -(1-\tau_{dm})N_m & 0 \\
* & * & * & * & 0
\end{matrix}\right],$$

其中 $\varXi_{ij}=\varPi_{ij}(i,j=1,2,\cdots),\ l+m+2,\ \varPi_{ij}$ 与矩阵不等式(3-50)中所定义的相等.

由于(3-50)式，应用 S 过程，如果存在 $\varepsilon>0$ 使得对于任意 $q(t)\neq 0$ ，下式成立：