

第一部分

高考研究



与时俱进认识数学“双基”

—2012、2013 年高考“三角函数”内容剖析

翁小勇 徐增辉

(遵义师范学院 数学与计算科学学院, 贵州 遵义 563002)

摘 要: 通过研究近几年全国各省市数学高考卷可以发现, 三角函数的试题既是考试的热点, 也是考试的重点. 考查内容一般是单一的基础知识、基本技巧的运用以及与其他知识点的交叉. 其题型难度多以中低档题为主, 考查分数占整张试卷分数的 12% 左右, 题目类型有选择题、填空题、解答题三种形式. 可以预测未来几年高考数学中三角函数试题考查的内容、题型基本不变.

关键词: 三角函数; 高考; 统计分析

1 三角函数问题在高考中的地位

高考是以分数论成败的, 所以分数的高低显得十分重要. 然而对于一张数学高考卷来讲, 题型的分数比例就体现了它在高考中的地位. 因此, 我们统计了“2012、2013 年全国各省市高考数学试卷三角函数问题”所占的分数, 分析发现:

(1) 2012 年高考数学试卷中三角函数问题所占分值比例为 11% 左右. 由于地区的差异性, 导致三角函数问题在各个地区分值比例在 11% 左右波动.

(2) 2013 年高考数学试卷中三角函数问题所占分值比例为 12% 左右. 由于地区的差异性, 导致三角函数问题在各个地区分值比例在 12% 左右波动.

综上所述: 三角函数问题在高考中, 分值一般在 17 分与 22 分之间波动, 也有少部分地区, 其分数可能低于 17 分或者高于 22 分. 由此我们得出一个结论: 三角函数问题在高考中的地位非常重要, 绝非“鸡肋”. 所以把握住三角函数问题, 也就把握住了高考数学.

2 三角函数问题在高考中的考查要点

随着新课程标准的实施, 高考中三角函数的问题也发生了变化, 即“摒弃了复杂的三角恒等式变换和特殊技巧的运用, 将重点变成了对三角函数图像与性质的考查以及基础知识与基本技能的考查”^[1]. 具体分析如下:

2.1 2012 年全国各省市数学高考试卷三角函数考试知识要点

通过统计分析 2012 年全国各省市的数学高考试卷发现, 考查要点主要有: 三角函数的

图像和三角函数的基本性质，三角函数的增减性与值域结合问题，简单的三角恒等变换和求值问题，解三角形问题，三角函数的周期性，三角函数与函数、向量、数列、导数相结合问题等。

2.2 2012 年高考卷与 2013 年高考卷三角函数知识对比

通过对比 2012 年与 2013 年全国各省市的数学高考卷，我们发现，2013 年加强了对三角函数图像和三角函数基本性质、三角函数的增减性和最值结合问题、解三角形问题以及三角函数和充要条件、向量、数列、函数相结合问题的考查。

综合分析：三角函数问题的考查要点可以分为四个方面：

- (1) 三角函数的图像与性质；
- (2) 三角函数恒等变换问题；
- (3) 解三角形的三角函数问题；
- (4) 三角函数与向量及其他知识点相结合问题。

3 高考中三角函数典型例题分析

3.1 考查数学基本概念的问题分析

例 1 (全国大纲卷,理科)^[2]已知 α 为第二象限角, $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()。

- A. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{5}}{9}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{9}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

解: $\because \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{2}{3}.$$

$$\therefore \sin 2\alpha = -\frac{2}{3}.$$

$$\because \alpha \text{ 为第二象限角, 且 } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} > 0,$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore 4k\pi + \pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2} + 4k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

$\therefore 2\alpha$ 在第三象限,

$$\therefore \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

分析：本题考查了二倍角公式和同角三角函数的基本关系，要求学生具有运算求解能力和转化化归的思想，试题难度中等。

3.2 考查数学基本原理的问题分析

例 2 (陕西卷, 文科)^[3] 函数 $f(x) = A \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ ($A > 0, \omega > 0$) 的最大值为 3, 其图像相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(II) 设 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2$, 求 α 的值.

解: (I) \because 函数 $f(x)$ 的最大值为 3,

$$\therefore A + 1 = 3.$$

$$\therefore A = 2.$$

\because 函数图像相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

\therefore 最小正周期 $T = \pi$.

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2.$$

\therefore 函数 $f(x)$ 的解析式为 $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

(II) $\because f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2$,

$$\therefore \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} < \alpha - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore \alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

分析: 本题考查正弦函数的性质, 要求学生具有运算求解能力, 试题难度较小.

3.3 考查学生数学运算能力的问题分析

例 3 (辽宁卷, 文科)^[3] 设向量 $\mathbf{a} = (\sqrt{3} \sin x, \sin x)$, $\mathbf{b} = (\cos x, \sin x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

(I) 若 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 求 x 的值;

(II) 设函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值.

解: (I) $|\mathbf{a}|^2 = (\sqrt{3} \sin x)^2 + \sin^2 x = 4 \sin^2 x$,

$$|\mathbf{b}|^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$\because |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|,$$

$$\therefore 4 \sin^2 x = 1.$$

$$\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6}.$$

$$(II) f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \sin \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } \sin \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ 取最大值 } 1, f(x) \text{ 的最大值为 } \frac{3}{2}.$$

分析：本题考查三角恒等变换、数量积的运算和向量模的求法，要求学生具有简单的运算求解能力，试题难度较小。

4 三角函数问题在高考中的发展趋势

通过研究 2012、2013 年全国各省市数学高考卷，我们预测今后的高考考试中三角函数问题考查的内容、题型基本保持稳定，还是会把低档题、中档题作为考查重点。同时也暗示这部分题是学生的主要得分题。下面是对今后高考考试中三角函数问题的猜测：

(1) 有关三角函数的图像和三角函数的基本性质，出题类型为选择题或填空题。

(2) 有关三角恒等变换求值和三角恒等变换与其他知识点相结合，出题类型为选择题或解答题。

(3) 运用三角函数知识解决生活中的实际问题，出题类型为解答题。

(4) 在三角形中运用三角函数知识求解的问题，出题类型为解答题。

(5) 正、余弦公式及二倍角公式的应用，出题类型为选择题、填空题或解答题。

(6) 三角函数与函数零点、向量、不等式、数列、函数、充要条件、导数等相结合的题，出题类型为选择题、填空题、解答题。

按照“近几年高考数学大纲的要求，命题突出能力立意，加强了对学生综合能力和素质的考查，因此出题往往具有综合性和应用性，且常常是多重知识点交汇”。^[4-8]

参考文献

- [1] 方晓玲. 三角函数图像的对称性 — 河南中学生数理化 (尝试创新版) [J]. 河南教育报刊, 2011(10).
- [2] 薛金星. 数学卷 — 2012 年全国及各省市高考试题全解 [J]. 陕西人民教育, 2012(6).

- [3] 薛金星. 2013 年全国及各省市高考试题全解. 数学卷[J]. 西安：陕西人民教育出版社，2013(1).
- [4] 蒋启源，谢金星，叶俊. 数学模型[M]. 北京：高等教育出版社，2003.
- [5] 钟启泉. 新课程的理念与创新[M]. 北京：高等教育出版社，2003.
- [6] 课程教材研究所，中学数学课程教材研究开发中心. 普通高课程标准实验教科书必修[M]4A 版. 北京：人民教育出版社，2007.
- [7] 孙伟. 高中数学解题方法[M]. 延吉：延边大学出版社，2009.
- [8] 杨玉东，范文贵. 高中数学新课程理念与实施[M]. 海口：海南出版社，2004.