

任务十一 控制测量概算

【知识概要】

1. 掌握控制测量概算流程。
2. 熟悉成果质量检验。

【技能任务】

给定控制网观测数据进行控制测量概算。

【技术规范】

1. 《工程测量规范》。
2. 《水利水电工程施工测量规范》。

【相关知识】

知识点一 控制测量概算流程

无论是平面控制网或是高程控制网都是通过野外采集某些数据——观测量，经过适当处理，最终获得待定点的坐标和高程。

然而，观测量之间的矛盾是客观存在的，合理处理观测量之间矛盾的工作称之为平差，而在平差之前又必须将所有观测量归算到某一个基准面上，这是项重要又必不可少的工作，称这项工作为概算。概算的目的不仅仅是为平差作准备，而且也在于检查和评价外业资料（也包括起算数据）的质量，本部分主要讨论平面控制网的概算工作，其主要内容有：

- (1) 外业观测成果的整理、检查；
- (2) 绘制网的略图、编制观测数据表和已知数据表；
- (3) 观测成果归化到标石中心；
- (4) 观测成果归化到椭球面上；
- (5) 观测成果进一步归化到高斯投影平面上；
- (6) 依平面控制网应满足的条件检查观测成果的质量。

应该指出，平面控制网如果在椭球面上进行平差计算，则(5)、(6)两项可省略；如果在高斯投影面上进行，则上述各项不能省略。在我国除全国性的天文大地网在椭球面上进行平差外，一般平面控制网，尤其是工测控制网都是在高斯平面上进行的，因此，必须按上述工作内容逐项进行。

由上列各项工作可以看出，概算的工作量甚大，内容也相当多，概算中的差错将直接影响到平差结果，且又不易发现，所以概算结果的正确性和计算精度应特别注意。

概算精度要求主要考虑两个方面，一是不损害观测量的精度，二是有利于工作进行，只保留必要的有效数字。对三、四等控制网，由于边长较短，因此它的方向计算值和各项改正数的计算分别达到 $0.1''$ 和 $0.01''$ 即可，边长概算取至mm位，而各项改正数的计算则至 0.1 mm 。

概算所选用的算式，既要确保精度，又能进行检核，还要便于使用电子计算机。

计算流程如图 11.1 所示。

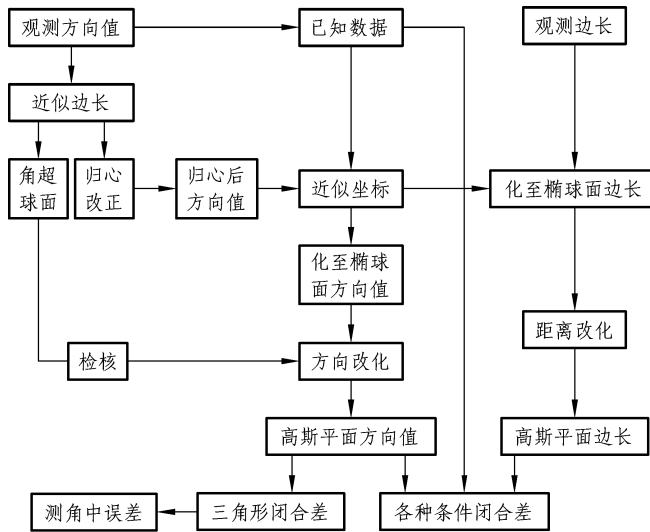


图 11.1 控制测量概算流程

知识点二 外业成果整理与图表绘制

概算时，首先要对外业成果（各种观测手簿，记簿，归心投影用纸，仪器检验资料以及计算资料等）进行逐项整理检查。主要检查原始数据是否清晰，有无缺漏项目，是否满足规范对观测手簿的要求。

检查中发现的问题要认真处理，及时返工和补正，确认资料完整无误后，才能进行后续的计算。

为便于计算，首先要绘制控制网计算略图，将观测方向值（或角度）、观测边长等清晰地标注于图上（见图 11.2）。其次编制已知数据表（见表 11.1）和观测数据表（见表 11.2）。

表 11.1 已知数据表

点 名	等级	平面直角坐标系		坐标方位角 ° ' "	边长/m	至 点
		x/m	y/m			
苏 家	III	5 023 373.446	21 614 660.697	314 21 50.2	7 070.809	长 山
长 山	III	5 028 317.452	21 609 605.685			

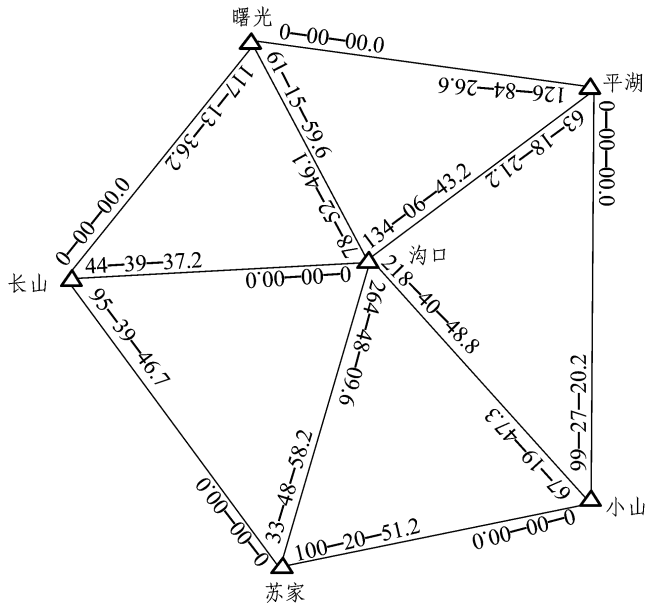


图 11.2 控制网计算略图

表 11.2 水平方向值计算表

测站 (归心元素)	照准点	观测方向值 ° ' "	归心改正		方向改化 $\delta' (")$	$(c+r+\delta)$ 归零/(")	平面方向值 ° ' "
			$c' (")$	$r' (")$			
苏家 $\theta_T = 65^\circ 11'$ $e_T = 0.005 \text{ m}$	长山	0 00 00.0		0	- 1.4	0	0 00 00.0
	沟口	33 48 58.2		0.4	- 1.6	0.2	33 48 58.4
	小山	100 20 51.2		- 0.5	- 0.7	0.2	100 20 51.4
长山 $\theta_T = 96^\circ 30'$ $e_T = 0.008 \text{ m}$ $\theta_V = 100^\circ 00'$ $e_V = 0.018 \text{ m}$	曙光	0 00 00.0	0.8	- 0.4	- 1.0	0	0 00 00.0
	沟口	44 39 37.2	0.5	- 0.3	- 0.1	0.7	44 39 37.9
	苏家	95 39 46.7	- 0.1	0.1	1.4	2.0	95 39 48.7
曙光 $\theta_T = 120^\circ 00'$ $e_T = 0.009 \text{ m}$	平湖	0 00 00.0		- 0.4	0.2	0	0 00 00.0
	沟口	61 15 59.6		- 0.7	0.9	0.4	61 16 00.0
	长山	117 43 36.2		0.4	1.0	1.6	117 43 37.8
平湖 $\theta_T = 117^\circ 00'$ $e_T = 0.018 \text{ m}$	小山	0 00 00.0		- 0.4	1.6	0	0 00 00.0
	沟口	63 18 21.2		- 0.3	0.8	- 0.7	63 18 20.5
	曙光	126 48 26.6		0.5	- 0.2	- 0.9	126 48 25.7

续表 11.2

测站 (归心元素)	照准点	观测方向值 ° ' "	归心改正		方向改化 $\delta' (")$	$(c+r+\delta)$ 归零/ (")	平面方向值 ° ' "
			$c' (")$	$r' (")$			
小山 $\theta_T = 216^\circ 17'$ $e_T = 0.018 \text{ m}$	苏家	0 00 00.0		0.1	0.7	0	0 00 00.0
	沟口	67 19 47.3		0.4	- 0.9	- 1.3	67 19 46.0
	平湖	99 27 20.2		0	- 1.6	- 2.4	99 27 17.8
沟口 $\theta_T = 204^\circ 45'$ $e_T = 0.012 \text{ m}$	长山	0 00 00.0		0.3	0.1	0	0 00 00.0
	曙光	78 52 46.1		- 0.1	- 0.9	- 1.4	78 52 44.7
	平湖	134 06 43.2		- 0.4	- 0.8	- 1.6	134 06 41.6
	小山	218 40 48.8		- 0.7	0.9	- 0.2	218 40 48.6
	苏家	264 49 09.6		0.2	1.6	1.4	264 49 11.6

知识点三 成果归算和改化

一、概算边长和坐标

(一) 边长概算

对于三角网，须从已知边（或观测边）开始，接正弦公式计算边长，如图 11.3 所示， b 为已知边，则 a 、 c 的计算公式如式 (11.1) 所示：

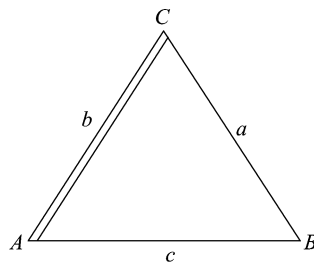


图 11.3 三角网边长概算图

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{b}{\sin B} \sin A \\ c &= \frac{b}{\sin B} \sin C \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

同时，应计算出各三角形的球面角超（后面计算方向改化时检核用），球面角超 ε'' 的计算式为

$$\varepsilon'' = f a b \sin C = f b c \sin A = f c a \sin B \quad (11.2)$$

式中， $f = \rho''/2R^2$ (或以测区平均纬度为引数查表)。

表 11.3 内列入近似边长和球面角超的计算数字。

对于测边网，则要从观测边计算角度近似值，以便推算方向近似值 M ，角度 A 的计算按

余弦定律为

$$A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (11.3)$$

其计算表格与表 11.3 类似，计算时角度取至 $10''$ ，边长取至 m。

表 11.3 概略边长球面角超计算

三角形号	点 名	角 号	观测值			边长 /m	球面角超	备 注
			°	'	''			
1	沟 口	B	95	10	50	7 070.8		$f = 0.002\ 534\ 93$
	长 山	C	51	00	10	5 517.8		
	苏 家	A	33	49	00	3 951.3	$\varepsilon'' = 0.06''$	
2	曙 光	B	56	27	40			
	沟 口	C	78	52	40	4 651.5		
	长 山	A	44	39	40	3 332.2	$\varepsilon'' = 0.03''$	
3	平 湖	B	63	30	00			
	沟 口	C	55	14	00	3 058.7		
	曙 光	A	61	16	00	3 264.9	$\varepsilon'' = 0.02''$	
4	小 山	B	32	07	30			
	沟 口	C	84	34	10	6 112.2		
	平 湖	A	63	18	20	5 485.3	$\varepsilon'' = 0.05''$	
5	苏 家	B	66	31	50			
	沟 口	C	46	68	20	4 311.7		
	小 山	A	67	19	50	5 518.0	$\varepsilon'' = 0.06''$	

(二) 近似坐标计算

应用余切公式如式 (11.4) 所示：

$$x_C = \frac{x_A \cot \beta + x_B \cot \alpha + (y_B - y_A)}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$y_C = \frac{y_A \cot \beta + y_B \cot \alpha - (x_B - x_A)}{\cot \alpha + \cot \beta}$$
(11.4)

如图 11.4 所示 A、B 为已知点，其顶角分别为 α 、 β ；C 为待算点，其顶角为 γ 。应用式 (11.4) 时，三角形角号排列有如下规定：

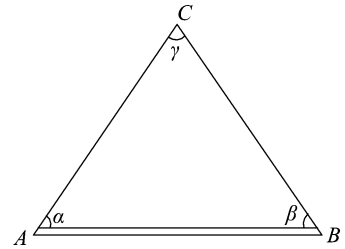


图 11.4 近似坐标计算图

(1) A、B、C 应按逆时针排列，举例如表 11.4 所示。

(2) 近似坐标存在递推累积的误差，故计算时坐标取至 0.1 m，角度相应取至 10"。为防止计算出错，应采用 B、C 作为已知点，A 作为待算点进行校核计算，对于测边网的坐标计算，可先由观测边计算三角形各角度，然后按式 (11.4) 计算近似坐标。

表 11.4 近似坐标计算表

已知点	A B	长山 苏家	长山 沟口	曙光 沟口	平湖 沟口
待算点	C	沟口	曙光	平湖	小山
已知数据	x_A/m	50 28317.5			
	x_B/m	5 023 373.4			
	y_A/m	109 605.7			
	y_B/m	114 660.7			
	$\alpha / (^\circ \ ' \ '')$	51 00 10	41 39 40	61 16 00	63 30 00
	$\beta / (^\circ \ ' \ '')$	33 49 00	78 52 40	55 14 00	84 34 10
运算结果	x_C/m	5 028 774.4	5 031 947.8	5 031 365.5	5 025 864.2
	y_C/m	113 530.4	112 514.2	115 517.1	118 180.0

二、方向观测值改化

(一) 归心改正

将测站平差 (一般为各测回方向平均值) 后的方向值加入测站点和照准点的归心改正数

(c'' 、 r'') , 便得到归化到标石中心的方向值。即

$$c'' = \frac{e_y}{S} \rho'' \sin(M + \theta_y) \quad (11.5)$$

式中 e_y 、 θ_y ——测站点的归心元素。

$$M = N_{ij} - N_{io} \quad (11.6)$$

$$r'' = \frac{e_T}{S} \rho'' \sin(M_1 + \theta_T) \quad (11.7)$$

其中 $M_1 = N_{ji} - N_j$;

e_T 、 θ_T ——照准点的归心元素值 ;

N_{ij} 、 N_{ji} ——测站和照准点上相对的方向值 ;

N_{io} 、 N_{jo} ——该两点上的归心零方向的方向值 (通常 N_{io} 和 N_{jo} 为零 , 即观测零方向与归心零方向一致) ;

S ——近似边长。

现以长山的测站归心和曙光、沟口、苏家对于长山的照准点归心为例 , 计算其归心改正

数 , 如表 11.5 所示。

表 11.5 方向归心计算

方向名 内 容	长山—曙光	长山—沟口	长山—苏家	...
e_y/m	0.018			
θ_y	100°00'00"			
$M + \theta_y$	100°00'00"	144°39'40"	195°39'50"	
S/m	4 651	3 951	7 071	
e_T/m	0.009	0.012	0.005	
θ_T	128°00'00"	204°45'00"	65°11'00"	
$M_1 + \theta_T$	245°43'40"	204°45'00"	65°11'00"	

c''	0.79''	0.54''	- 0.14''	
r''	- 0.36''	- 0.26''	0.13''	

(二) 方向改化

它是将经过归心改正后的方向观测值归化到椭球面上，然后再归化到高斯投影平面上。

然而，国家三、四等和城市工矿控制网一般不测天文方位角；只有极个别独立网，无法引测高一级的起算方位时，才施测天文方位角 α ，作为独立网的定向，且把实测天文方位角看作大地方位角 A 而不加改正。国家三、四等和城市工矿控制网一般也不加“三差改正”，也就是把地面观测方向值直接看作椭球面方向值。对于观测天顶距的垂线偏差改正，亦只有当作为三维控制网时，或测区内的垂线偏差子午与卯酉分量变化甚大且视线高度角超过 3° 时，才进行改正，一般三角高程计算时均可忽略此项改正。

因此，对于三、四等平面控制网或工测控制网，一般只是将经过归心后的方向值，改化到高斯投影平面上即可，其改化公式如式 (11.8)、(11.9) 所示。

(1) 三、四等网：

$$\delta_{ik} = -\delta_{ki} = \frac{1}{2} f_m (x_i - x_k)(y_i + y_k) \quad (11.8)$$

(2) 二等网：

$$\delta_{ik} = -\delta_{ki} = \frac{1}{3} f_m (x_i - x_k)(2y_i + y_k) \quad (11.9)$$

现仍以图 11.2 为例，方向改正计算如表 11.6 所示。

表 11.6 方向改正计算

计算项目	<i>i</i> 苏家 <i>k</i> 沟口	<i>i</i> 长山 <i>k</i> 沟口	曙光 平湖	...
x_i/km	5 023.373	5 028.317	5 031.948	
x_k	5 028.774	5 028.774	5 031.366	
$x_i - x_k$	- 5.401	- 0.457	0.582	
y_i	114.661	109.606	112.514	
y_k	113.530	113.530	115.517	
$\frac{1}{2}(y_i + y_k)$	114.096	111.568	114.016	
f	0.002 534 93			
δ_{ik}	- 1.56"	- 0.13"	0.17"	

方向改正数计算经三角形球面角超检核无误后，和归心改正数一并填入表 11.2，最终获得高斯投影平面上的方向值。

三、边长观测值改化

随着电磁波测距仪应用的普及，平面控制网的观测量除了方向值以外，边长观测值亦占相当的比重，其外业观测结果当然也应该归算到高斯平面上，因此，地面观测边长一般应进行归心改正，倾斜改正和归算到高斯平面上的距离改正（又称曲率改正）。

（一）边长归心改正

边长归心改正公式如式（11.10）、（11.11）所示。

（1）测站归心：

$$\delta_S = -e \cos(M + \theta) + \frac{[e \sin(M + \theta)]^2}{2S} \quad (11.10)$$

（2）镜站归心：

$$\delta_{S1} = -e \cos(M_1 + \theta_1) + \frac{[e \sin(M_1 + \theta_1)]^2}{2S} \quad (11.11)$$

两式右端的符号与方向归心改正数计算公式的符号意义完全一致。其右端的第二项（平方项）一般很小，当 $e < 0.5 \text{ m}$ ， $S > 1 \text{ km}$ 时，此平方项最大值约 0.1 mm 。可见，通常不必顾及此项改正，在实际作业中，一般情况下，主机和反光镜均设在测站，故无需归心。如果个别站受条件限制进行偏心观测时，则可按式（11.10）计算。算法和方向归心改正数计算方法相似，故此处不再叙述。

（二）归化至椭球面的改正

将地面观测的且经归心改正后的倾斜距离改正到椭球面上的大地线长度，其计算公式如式（11.12）~（11.14）所示：

$$K = \sqrt{\frac{d^2 - (H_2 - H_1)^2}{[1 + (H_1 + H_2)] R_A}} \quad (11.12)$$

$$S = \frac{2R_A}{\sin \frac{K}{2R_A}} \quad (11.13)$$

$$R_A = \frac{C}{\left(1 + 2e'^2 \cos^2 B \cos^2 \frac{A}{2}\right)} \quad (11.14)$$

式中 D —— 两端点间的斜距；

K —— 两端点间的弦长；

S —— 两端点间的椭球面长度；

B —— 两端点纬度平均值，可在地图上量取；

A —— 两端点间的方位角，可在地图上量取；

H_1 、 H_2 —— 仪站和镜站的高程；

R_A —— 两端点测线方向地球曲率半径的平均值；

$$C = 6\,399\,698$$

$$e'^2 = 0.006\,738\,5$$

由此可看出式 (11.12) ~ (11.14) 的作用 :

式 (11.12) 为斜距 d 改化为弦长的计算式 ;

式 (11.13) 为弦长与大地线长度的计算式 ;

式 (11.14) 为两端点连线方向地球曲率半径计算式 (实际是两端点测线方向曲率半径的平均值)。

现仍以图 11.2 为例 , 苏家至长山测距仪实测斜长为 7 069.911 m , 归算至椭球面长度如表 11.7 所示。至此 , 获得了椭球面上的长度 , 然而 , 尚须进一步投影到高斯平面上 , 以利于后续计算。

表 11.7 倾斜距离的归算

测站点 (1)	苏 家		附 注
镜站点 (2)	长 山		
已知数据	B	45°20'	$C = 6\,399\,698$
	A	314°21'50"	$e'^2 = 0.006\,738\,5$
	H_1/m	172.485	
	H_2/m	180.435	
	d/m	7 069.911	
计算结果	R_A/km	6 363.698	R_A 和 ΔS 直接在计算器上计算
	$\Delta S/m$	1.098	
	S/m	7 069.711	

(三) 距离改正

在之前项目中已经讨论了将椭球面上的长度归算到高斯投影平面上的计算过程 , 在此 , 仅列出距离改正的计算公式如式 (11.15) 所示 :

$$D = S + \Delta S \quad (11.15)$$

式中 D ——高斯平面上的长度；

S ——椭球面上的长度，

$$\Delta S = \frac{y_m^2}{2R^2} S$$

其中 $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_k)$

其中 y ——横坐标自然值，由近似坐标计算获得。

本例中，苏家至长山 $\Delta S = 1.098$ ，故 $D = 7\,070.809$ m。

四、观测成果质量检查

(一) 边长条件 (极条件) 闭合差计算

计算公式如式 (11.16) 所示：

$$\omega_{\lg S} = \lg S_0 + \sum_{i=1}^n (\lg \sin a_i - \lg \sin b_i) - \lg S_n \quad (11.16)$$

式中 $\omega_{\lg S}$ ——边长条件对数闭合差；

S_0 、 S_n ——分别是投影到高斯平面后的起算边长和终了边长；

a_i 、 b_i ——分别是投影到高斯平面后的传距角；

n ——所经三角形的个数。

闭合差限差的计算公式为

$$(\omega_{\lg S})_{\text{限}} \leq 2\sqrt{2m_{\lg s_0}^2 + [\delta\delta]m^2} \quad (11.17)$$

式中 δ ——传距角正弦对数秒差；

m ——测角中误差；

$m_{\lg s_0}$ ——起算边对数中误差。

至于极条件闭合差及限差公式，因其推算的开始与结束是同一条边，故式 (11.16) 中的

$S_0 = S_n$ ，从而式中 m_{lgS_0} 略去，即不计起算边对数中误差的影响，便使该两式转化为极条件的相应公式。

图 11.5 是本项目列举的控制网，图中注明了归化到高斯平面上的三角形各角，三角形最大闭合差为 $\pm 2.1''$ ，均满足规范要求。本例极条件闭合差计算如表 11.8 所示。

$$\omega_{\text{每}} = 2m\sqrt{[\delta\delta]} = 29.84，故本例合格。$$

本例应用小型计算器计算，故正弦对数栏未一一填写，而直接写出累加数。

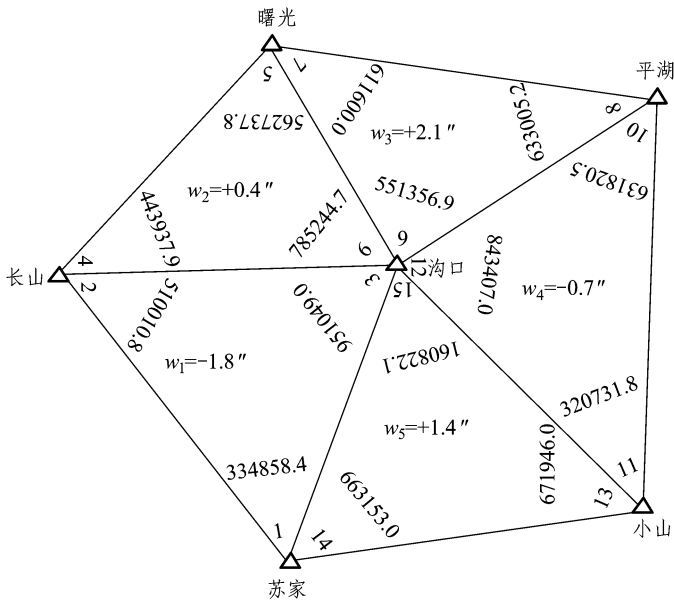


图 11.5 控制网计算图

表 11.8 极条件闭合差计算

角号	角值	正弦对数	δ	角号	角值	正弦对数	δ
1	33°48'58.4"		3.14	2	51°00'10.8"		1.70
4	44°39'37.9"		2.13	5	56°27'37.8"		1.40
7	61°16'00.0"		1.15	8	63°30'05.2"		1.05
10	63°18'20.5"		1.06	11	32°07'31.8"		3.35
13	67°19'46.0"		0.88	14	66°31'53.0"		0.91
	$\Sigma = 49.4514508$				$\Sigma = 49.4514555$		
					$w = -4.7$		

此外，按四等三角网要求，故测角中误差按规范给出的 $m = 2.5''$ 计算。

(二) 方位角和坐标条件闭合差的计算

计算公式如式 (11.18) 所示：

$$\left. \begin{aligned} w_T &= T_0 + \sum_{i=1}^n (\pm C_i) - j \times 180^\circ - T_n \\ w_x &= x_0 + \sum_{i=1}^n S_i \cos T_i - x_n \\ w_y &= y_0 + \sum_{i=1}^n S_i \sin T_i - y_n \end{aligned} \right\} \quad (11.18)$$

式中， x_0 、 y_0 、 T_0 和 x_n 、 y_n 、 T_n 分别是起点和终点的平面坐标和方位角； C_i 、 S_i 、 T_i 分别是推算路线上的间隔角，边长和方位角。这些数据按照控制网的种类不同，有的是直接观测值，有的则是观测值的函数。 j 为转折角个数。

方位角限差公式如式 (11.19) 所示：

$$(w_T)_{\text{限}} = 2\sqrt{2m_T^2 + nm^2} \quad (11.19)$$

至于坐标闭合差的限差公式，往往导入纵横向位差 m_L 、 m_Q 的限差公式，而公式的推导是建立在固定在两高级点间的直伸等边导线的基础上的。这一前提具有一定的典型意义，因此，在实用上往往是规定 $w_x^2 + w_y^2 < (m_L^2)_{\text{限}} + (m_Q^2)_{\text{限}}$ ，就实际作业而言，一般不考虑此项限差。

【习题练习】

1. 试述控制测量概算的目的、内容、工作程序和意义。
2. 在概算工作中，归心改正计算及方向改正计算要求近似边长达到什么精度？为什么？