

## 第二章 数学教学设计准备

进行数学教学设计之前，必须先了解情况，进行调查分析，这是非常重要的。数学教学设计的准备包括对数学教学内容的分析和学生情况的分析。通过分析可以有的放矢地制定数学教学目标、设计数学教学活动，从而确保数学教学方案的质量。

### 第一节 数学教学内容分析

#### 一、数学教学内容分析的意义

数学教学内容是指为了实现数学教学目标，要求学生学习的数学知识和技能的行为经验的总和。它具体表现为人们制定的数学课程标准、教材和教学计划。

数学教材是数学教学过程中协助学生达到课程目标的各种数学知识信息材料，是按照一定的课程目标，遵循相应的教学规律组织起来的数学理论知识体系。数学教材在数学教学过程中有很重要的作用。为了提高数学教学质量，成功进行教学设计，数学教师首先应认真分析和研究、理解和掌握数学教材，只有

在深刻理解数学教材的基础上，才能灵活地运用教材、组织教材和处理教材，深入浅出地上好每堂课，取得好的教学效果。教材分析是教学工作的重要内容，也是教师进行教学研究的主要方法，它能充分体现教师的教学能力和创新能力。

很多教师不重视教学内容的分析，对教材内容缺乏深刻理解，没有领会教材中有关内容在知识体系中的地位，不能从整体和全局去把握数学教材，没有掌握数学教材的精神实质，对数学教材的编写意图领会不深，对教学的目的和要求理解不透，导致课堂教学停留在一般水平上，有时甚至无法达到教学目标，这在很大程度上影响了数学教学质量。例如，“角平分线的性质”一课，教材在开头简单地叙述了一段话“依据线段垂直平分线性质的定理……”，其目的是提示教师利用类比方法进行教学，而有些教师由于没有深入钻研教材，未领会其中的含义，在教学中把角平分线的性质定理直接搬出来，使学生失去了通过类比直观得出结论的机会，学生处于被动思维状态，教学效果不好。其实，这节课从定理内容到证明方法，以及证明三角形三内角平分线交于一点的例题，都可以采用类比方法，这样不仅能激发学生思维的主动性，使学生积极地参与到知识的发生、发展过程中，而且还能使学生领悟蕴含其中的数学思想方法。

只有深入分析教材，才能确定教学的重点、难点以及知识的衔接点，并制定出突出重点和突破难点的教学策略；只有通过教材分析，才能找出有关

章节的特点，并根据其特点和学习者的特征，开发相应的教学资源 and 选择恰当的教学媒体、教学模式。

## 二、数学教学内容分析的基本方法

数学教学内容是一个知识系统，为了达到教学内容分析的要求，必须运用系统分析方法进行分析，具体包括背景分析、功能分析、结构分析、要素分析。

### 1. 数学教学内容的背景分析

数学教学内容的背景分析主要是指分析数学知识发生、发展的过程，它与其他有关知识之间的联系，以及它在社会生产、生活和科学技术中的应用。通过背景分析，可以使教师对有关的数学知识有整体的、全面的和系统的了解，不仅知道这些数学知识产生、形成和发展的过程，而且还知道它和数学其他部分知识以及其他学科知识之间有什么关系，知道它在实际中有什么用处。这样，既有利于教师拓宽知识面，加深对教材的理解，也有利于教师明确在教学中如何培养学生的应用数学的意识、解决实际问题的能力和辩证唯物主义观点。

#### (1) 分析数学知识发生的过程。

例如，对于异面直线，为什么既要研究它们所成的角，又要研究它们之

间的距离？我们知道，两条相交直线的位置关系可以用它们所成的角来表示，两条平行直线的位置关系可以用它们之间的距离来表示，而两条异面直线的位置关系用什么来表示呢？只用它们所成的角，或只用它们之间的距离都不能确定其位置关系，这就要求同时用这两个量才能确定两条异面直线的空间结构。这是由两条异面直线的本质属性所决定的。

进一步来研究两条异面直线所成角的定义是如何产生的。两条相交直线的夹角表示两条直线方向的差异，是其中一条直线绕着两条相交直线的交点旋转并和另一条直线重合所成的角。两条异面直线所成的角也要表示两条直线方向的差异，但是两条异面直线不相交，没有交点，怎么办呢？只有平移其中一条直线，使它和另一条直线相交，这样两条异面直线的方向没有变化，但却产生了交点，转化为相交直线，有了夹角，就可以表示两条异面直线方向的差异。用这种方法就可以定义两条异面直线所成的角了。

通过两条异面直线所成角的背景分析，教师对两条异面直线所成的角的概念产生的背景和形成过程就有了比较深刻的理解。教师只有对数学知识产生的过程和背景有深刻的理解，才能真正明确为何要教这些数学知识，也才能教好这些数学知识。

由此可见，通过对数学知识产生、发展过程等相关背景的分析，可以使

教师弄清数学知识的来龙去脉，深入理解数学知识，从而更准确地掌握数学知识，在教学中做到既居高临下，又深入浅出。

(2) 分析所学数学知识与其他知识之间的联系。

所教部分的数学知识与其他部分的数学知识，以及其他学科知识之间有着广泛的联系。通过分析这些联系，可以使它们相互融合，可以从更广泛的角度和更深刻的层面来理解这些数学知识。

例如，在学习圆锥曲线的定义时，学生可能会问，为什么抛物线、椭圆和双曲线统称圆锥曲线？这就涉及圆锥曲线名称的由来，它与立体几何的知识有着密切的联系。圆锥曲线是用一个不经过直圆锥面顶点的平面去截这个圆锥面(两边都可以无限延伸的)得到的。设截面和圆锥面的轴所成的角是 $\theta$ ，圆锥面的半顶角是 $\alpha$ ，则有如下三种可能：

- ① 当 $0 < \alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，截线是椭圆，特别地，当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，截线是圆；
- ② 当 $\theta = \alpha$ 时，截线是抛物线；
- ③ 当 $0 \leq \theta < \alpha$ 时，截线是双曲线。

圆锥曲线实际上有三种定义，上面这一种是综合几何的定义，第二种是教材中的定义。还有一种是圆锥曲线的统一定义：平面上一个动点到一个定点和一条定直线的距离之比是一个常数，动点的轨迹叫做圆锥曲线。定点叫

做焦点，定直线叫做准线，这个常数叫做离心率。这个定义又与极坐标之间有密切的联系。设焦点到准线的距离为  $p$ ，离心率为  $e$ ，可以得到在极坐标系中圆锥曲线的统一方程：

$$\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta} .$$

教师在教圆锥曲线时，首先必须对圆锥曲线的三种定义有全面的深刻的理解，只有掌握圆锥曲线与其他数学知识的联系，才有可能把圆锥曲线的概念讲深讲透，使学生能对这一部分数学知识融会贯通。

### (3) 分析数学知识的应用。

数学教师只有自己了解和熟悉数学知识在社会生活、生产和科学技术中的应用，才能在课堂教学中加强数学知识应用的教学，有效地培养学生的数学应用意识。

例如，对于圆锥曲线，要了解它在社会生活、生产和科学技术中各个方面的应用：

- ① 抛射体在重力作用下的运动轨道是抛物线。
- ② 探照灯和汽车前灯的反射镜面的形状，是由一条抛物线绕着它的对称轴旋转而成的。
- ③ 有很多拱桥的桥孔是抛物线拱。

④ 烟囱的直角弯头处的边缘曲线是椭圆 .

⑤ 隧道的横断面是椭圆拱 .

⑥ 电影放映机用的放映灯泡的反射镜面是椭圆绕轴旋转而成的椭球面 .

⑦ 激光机中的聚光罩是椭圆柱面 , 把棒状的氙灯和棒状激光材料分别装在横截面椭圆的焦点所组成的两条焦线位置上 , 氙灯发出的光线经过反射后 , 集中在激光材料上 , 发出方向性好、亮度高的激光 .

⑧ 海轮在海洋上航行 , 常采用“双曲线时差定位法”测定自己在海洋上的位置 .

⑨ 通风塔的外形是双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面 .

⑩ 太阳系各行星运行的轨道是椭圆 , 有些彗星运行的轨道是抛物线或双曲线 .

⑪ 人造卫星和宇宙火箭运行的轨道 . 当发射的速度大于第一宇宙速度 , 且小第二宇宙速度时 , 运行的轨道是椭圆 ; 当发射的速度等于第二宇宙速度时 , 运行的轨道是抛物线 ; 当发射的速度大于第二宇宙速度时 , 运行的轨道是双曲线 .

教师知道了圆锥曲线这些应用以后 , 在进行圆锥曲线教学时 , 就能从生产和生活中的实际问题出发 , 引入圆锥曲线概念 , 并能应用它们解决有关圆锥曲线的实际问题 , 强化学生的数学应用意识 , 提高学生的数学应用能力 .

## 2. 数学教学内容的功能分析

数学教学内容的功能分析是指通过对数学内容在培养和提高学生数学素质方面的功能分析，明确这部分内容在整个教材中所处的地位和作用，及其学习价值，包括智力价值、思想教育价值和应用价值。数学智力价值是指数学思维品质的培养、数学思想方法的训练、数学能力的提高等。数学的思想教育价值是指个性品质的培养、人格精神的塑造、世界观和人生观的形成等。数学的应用价值是指数学知识在生活、生产实践和科学技术中的应用。数学的学习价值往往隐含在教学内容之中，是潜在的因素，需要教师深入钻研、积极挖掘。

同时指出，数学教学内容的功能分析是设计数学教学目标的基本依据。

## 3. 数学教学内容的结构分析

数学教学内容的结构分析主要是指分析它有哪些知识要点，它们是如何安排的，前后次序如何，其中哪些是重点，哪些是难点，哪些是关键。

### (1) 数学知识结构。

教学内容的结构一般为：

感性材料引入→概念→定理、公式、法则→应用。

### (2) 数学教学结构。教学结构即教学顺序，是把规定了广度和深度的数



学教学内容，采用有利于学生理解和接受的展开形式加以序列化。如果教材按照教学顺序编写，不仅提供数学事实和结论，而且体现教法安排，引导学生自己独立探索结论的过程，那么教材的叙述方式就体现了编者对教学顺序的安排和教学方法选择的意图，教材的结构体现了教学的结构。教学内容结构的分析为数学教学设计中教学结构的安排提供了基础。

### ( 3 ) 重点、难点和关键。

一般地，在学习那些贯穿全局、带动全面、应用广泛、对学生认知结构起核心作用，在进一步学习中起基础作用和纽带作用的内容是教学的重点。它由教学内容在教材的知识结构中所处的地位和作用来确定。通常，概念、定理、公式、法则、数学思想方法、基本技能的训练等，都是可能的教学重点。例如，“三角形”是基本的直线形，其他平面直线形大多数可以转化为三角形来研究。三角形在生产实践中应用广泛，而且对于培养学生的逻辑思维能力、推理论证能力都起着重要的作用。因此，“三角形”是整个几何教学内容的重点。

难点是指学生接受起来比较困难的知识点。这往往是由于学生的认知能力、接受水平与新老知识之间的矛盾造成的，也可能是学新知识时，所用到的旧知识不牢固造成的。一般地，知识过于抽象，知识的内在结构过于复杂，概念的本质属性比较隐蔽，要求用新的观点和方法去研究的新知识，以及各

种逆运算等都是产生难点的因素。分析教学难点是一个相当复杂的工作，教师要从教材本身的特点、教学过程的矛盾、学生学习心理障碍等各种角度进行考虑和综合分析。

关键是指对掌握某一部分知识或解决某一个问题的能起决定作用的知识内容，掌握了这部分内容，其余内容就容易掌握，或者整个问题就迎刃而解。如，要掌握同底数幂的乘法公式与乘方公式，就必须抓住幂的意义这个关键。

#### 4. 数学教学内容的要素分析

数学教学内容是一个系统，它是由一些基本要素构成的。一般来说，构成数学教学内容的基本要素有：感性材料、概念和命题、例题、习题。要素分析就是对这四个要素分别进行分析，从而为合理地进行教学设计提供依据。

(1) 感性材料。它是指表示数量、图形和实际问题等具体材料。可供引入概念和定理之用，是学习数学基础知识和基本技能的必要准备和条件。

(2) 概念和命题。这是数学知识结构的核心部分，包括定义、公理、定理、公式、法则和性质等内容。

由于数学概念是现实世界数量关系和空间形式的本质属性在人们头脑中的反映，数学概念学习是概括有关数量关系和图形的共同本质的过程，因此，学习数学概念就要从数学概念名称、定义、例子和数学概念属性等方面进行

分析 . 例如 , 二面角的概念分析如下 :

名称	二面角
定义	从一条直线出发的两个半平面组成的图形
例子	水坝面和水平面所成的二面角 ; 人造地球卫星的轨道平面与地球赤道平面所成的二面角
属性	从一条直线出发 ; 有两个面
度量	用二面角的平面角来度量

学习数学命题可以从数学命题的内容、结构、证明和应用四个方面进行

分析 . 例如 , 余弦定理的分析如下 :

内容	三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍
结构	条件 : 已知三角形的两边与它们的夹角 结论 : 三角形的另一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍
证明	略
应用	求解三角形

(3) 例题 . 例题是指帮助学生理解、掌握和运用数学概念、定理的数学

问题 , 是教师用作示范的具有一定代表性的数学典型问题 .

教材的教学要求、编者的意图常常通过例题具体反映出来 . 如概念和定

理有哪些具体的应用 , 能够解决哪些类型的问题 , 难度控制到什么程度等 ,

都可以通过例题加以具体的说明 . 还有解题的步骤、书写格式等也可以通过

例题进行示范 . 所有这些 , 教师必须在教学设计前分析清楚 .

例如，空间向量运算的坐标表示（人民教育出版社高中数学选修 2-1《空间向量与立体几何》第 95～96 页）这一节有两个例题：

例 1 在已知正方体的情况下，求两条异面直线所成角的余弦值。

例 2 在已知正方体的情况下，证明两条异面直线垂直。

这两个例题说明了以下几点：

① 运用空间向量运算的坐标表示可以解决有关几何学的度量关系问题和位置关系问题，而且可以使一些问题的解决变得更简单。

② 运用空间向量运算的坐标表示解决问题的实质，是将度量关系和位置关系问题转化为向量的运算问题。

③ 在运用空间向量运算的坐标表示解决问题时，要注意解题规范。

④ 在具体教学过程中，要结合实际情况，配备实际问题作为例题，效果会更好。

（4）习题。习题是指有关运算、推理、论证、画图、测量和使用计算工具等方面的训练材料。可供加深理解、巩固知识、形成技能和培养能力之用。对于习题要分析以下几个方面：

① 习题的分类。课本的习题一般分为三类：

第一，练习：供课堂练习用。

第二，习题：供课内、外作业用。

第三，复习参考题和总复习参考题：复习参考题供复习本章知识时使用；

总复习参考题供复习全书知识时使用。

对每一类每一道题目要明确它的具体要求。

② 习题分量。根据教学目标的要求和学生的水平，结合题目的数量和难易程度，估计习题的分量是否适当。如果分量不够，就需要补充。

③ 习题的使用方式。根据课堂教学的实际和题目的不同特点，确定习题的使用方式。习题的使用方式一般有口答、板演、复习提问、课内练习、课外作业、讨论和思考等。