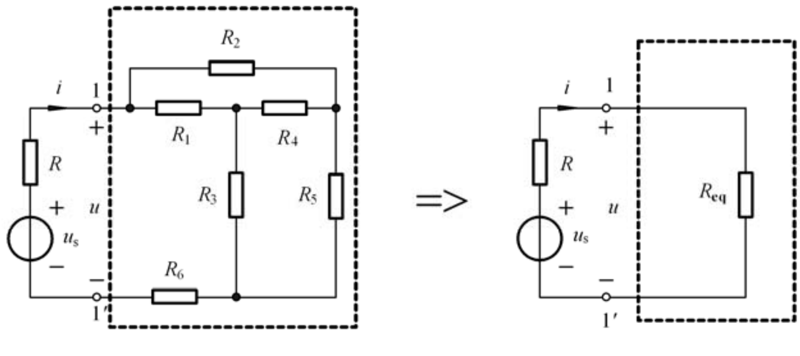
第 2 章　电阻电路的等效变换

内容提要　本章介绍电阻电路等效变换的概念，内容包括：电阻的串联、并联与混联，Y 形连接和△形连接，电源的串联与并联，电源的等效变换。

2.1　等效变换的概念

对电路进行分析和计算时，有时可以把电路的某一部分简化，即用一个较为简单的电路替代原电路。如图 2-1 所示。



（a）　　　　　　　　　　（b）

图 2-1　等效电阻

如图 2-1（a）所示，电路虚线框中由几个电阻构成的电路，可以用一个电阻替代，如图 2-1（b）所示电路虚线框中的 R_{eq}，进行替代的条件是左右两个电路中，端子 1-1′ 右侧部

分具有相同的伏安特性。电阻 R_{eq} 称为等效电阻，它的值取决于原电路中各电阻值及连接方式。

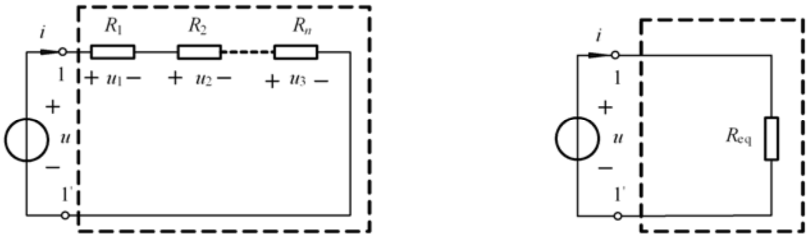
进行替代后，端子 1-1′ 左侧电路的任何电压、电流都与替代前保持完全相同，这就是电路的“等效”概念。一般地说，当电路中某一部分用其等效电路替代后，未被替代部分的电压和电流保持不变，即：等效变换是指对外等效。对于图 2-1（a）和图 2-1（b）所示电路，虚线框外边的电压 u 和电流 i 都是一样的，即虚线框内部两个电路对于外部来说是等效的，但是对于它们内部来讲，由于电路已经变化，很多电量找不到对应项，对内不等效。

2.2 无源电阻电路的等效变换

电路分析中，仅由电阻构成的电路，可以用等效变换的方法进行简化。按照这些电阻的连接方式，可以分为：串联、并联、Y 形和△形连接。下面分别介绍它们的简化方法。

2.2.1 串联电阻电路

若干个电阻依次首尾相连，中间没有分支点，每个电阻流过的电流相同，这种连接方式称为串联。如图 2-2（a）所示电路为 n 个电阻的串联组合。



（a）　　　　　　　　　　　　　　（b）

图 2-2　电阻的串联

应用 KVL，有

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots + u_n \tag{2-1}$$

根据电阻的元件特性，有 $u_1 = R_1 i$，$u_2 = R_2 i$，… $u_k = R_k i$，…$u_n = R_n i$，代入（2-1）式，有

$$u = (R_1 + R_2 + \cdots + R_k + \cdots + R_n)i = R_{\mathrm{eq}} i \tag{2-2}$$

其中，R_{eq} 称为等效电阻，

$$R_{\mathrm{eq}} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \frac{u}{i} = R_1 + R_2 + \cdots + R_k + \cdots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k \tag{2-3}$$

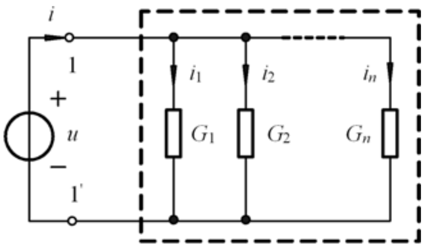
由等效电阻可以得到各电阻的分压公式：

$$u_k = R_k i = \frac{R_k}{R_{\mathrm{eq}}} u \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{2-4}$$

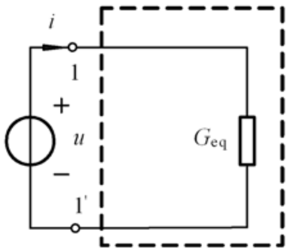
在串联电路中，每个电阻的电流相同，电压与电阻成正比。

2.2.2　并联电阻电路

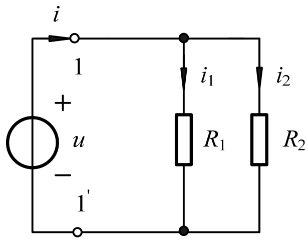
若干个电阻两端分别连接在两个公共结点上，每个电阻的电压相同，这种连接方式称为并联。如图 2-3（a）所示电路为 n 个电阻的并联组合。



（a）



（b）



（c）

图 2-3　电阻的并联

应用 KCL，有

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_k + \cdots + i_n \tag{2-5}$$

根据电导的元件特性，$i_1 = G_1u$，$i_2 = G_2u$，…，$i_k = G_ku$，…，$i_n = G_nu$，代入上式

$$i = (G_1 + G_2 + \cdots + G_k + \cdots + G_n)u = G_{eq}u \tag{2-6}$$

其中，G_{eq} 称为等效电导。

$$G_{eq} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{i}{u} = G_1 + G_2 + \cdots + G_k + \cdots + G_n = \sum_{k=1}^{n} G_k \tag{2-7}$$

由等效电导可以得到各电导的分流公式：

$$i_k = G_k u = \frac{G_k}{G_{eq}} i \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2-8}$$

可见，在并联电路中，每个电导的电压相同，电流与电导成正比。

当 $n = 2$，即 2 个电阻并联时，如图 2-3（c）所示，等效电阻 R_{eq} 为

$$R_{eq} = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

两并联电阻的电流分别为

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

例 2-1　求图示电路的等效电阻 R_{ab}。

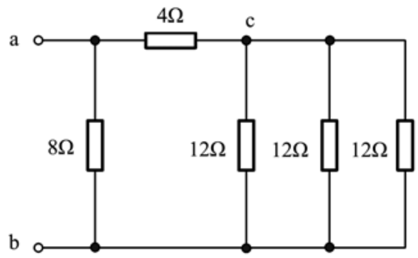


图 2-4　例 2-1 图

解：图中三个 12 Ω 电阻并联，再与 4 Ω 电阻串联，最后与 8 Ω 电阻并联，因此有

$$R_{cb} = \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}} = 4\ (\Omega)$$

$$R_{ab} = \frac{8 \times (4 + R_{cd})}{8 + (4 + R_{cd})} = \frac{8 \times (4 + 4)}{8 + (4 + 4)} = 4\ (\Omega)$$

在实际中，电阻并联是很常用的，例如各种负载（电灯、电炉、电烙铁等）都是并联在电网上的。另外，万用表就是利用电阻并联分流的原理来扩展电流测量范围的。

2.2.3　Y 形和 Δ 形连接电阻电路

在电路中，电阻的连接有时既不是串联也不是并联。如图 2-5（a）所示，R_1、R_3、R_4 和 R_1、R_2、R_3 这两组电阻的连接就不能用串、并联来等效。

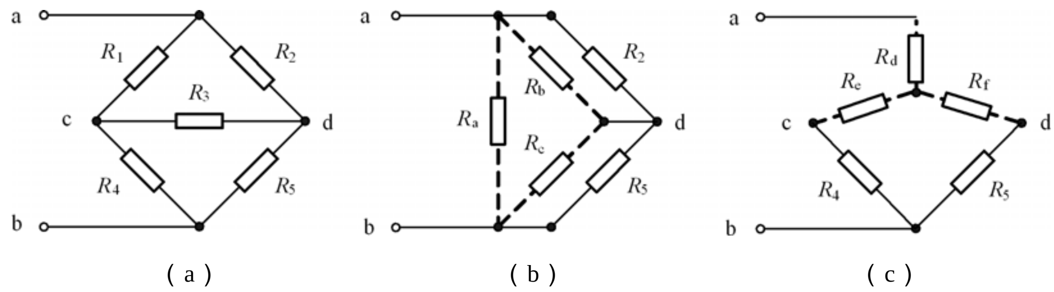


图 2-5　电阻的 Y 形和△形连接

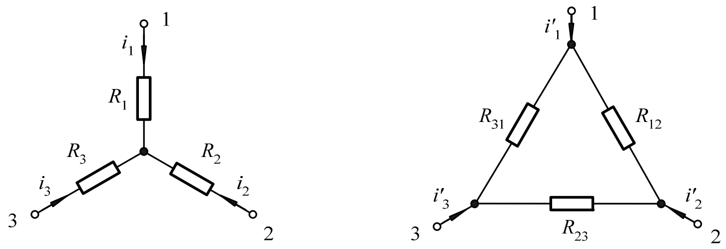
我们把电阻 R_1、R_3、R_4 的连接方式叫做星形（Y）连接，这种连接，将三个电阻的一端连接在一个公共接点上，其余一端与外电路相接。

R_1、R_2、R_3 的连接方式叫做三角形（△）连接，这种连接，将三个电阻分别接到三个端点的每两个之间，即三个电阻首尾相接，构成一个闭合三角形。

当电路中有 Y 形或 △ 形连接电阻时，不能用串并联方法进行等效变换。如果把图（a）中按星形连接的 R_1、R_3、R_4 这三个电阻等效变换成按三角形连接的 R_a、R_b、R_c 时（见图 2-5（b）)，则端钮 a、b 之间的等效电阻就可以用串联、并联公式求得；同样，若把图 2-5（a）中 R_1、R_2、R_3 等效变换成图 2-5（c）中按星形连接的 R_d、R_e、R_f，则 a、b 间的等效电阻也不难求出。

对于上面星形连接的电阻和三角形连接的电阻，它们都是通过三个端钮与外部电路相连的，它们之间的等效互换依据的仍然是外部等效原理，即当它们对应端钮间的电压相同时，流入对应端钮的电流也必须分别相等，这就是 Y-△ 等效变换的条件。

现以图 2-6 为例，若将电阻星形连接等效互换为三角形连接时，按照上述等效变换条件，可以推导出其等效变换公式为



（a）　　　　　　　　　　　　（b）

图 2-6　Y 形和△形连接的等效变换

$$\left.\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \\ R_{31} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} \end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

反之，将星形连接等效互换为三角形连接时，其等效变换公式为

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned}\right\} \tag{2-10}$$

为便于记忆，以上 Y 形和△形连接的互换公式可以归纳为

$$\text{Y 形电阻} = \frac{\text{△ 形相邻电阻的乘积}}{\text{△ 形电阻之和}}$$

$$\text{△ 形电阻} = \frac{\text{Y 形电阻两两乘积之和}}{\text{Y 形不相邻电阻}}$$

若三个电阻相等，则有 $R_{\mathrm{Y}} = \dfrac{1}{3}R_{\triangle}$ 或 $R_{\triangle} = 3R_{\mathrm{Y}}$。

例 2-2　如图 2-7（a）所示，求等效电阻 R_{ab}。

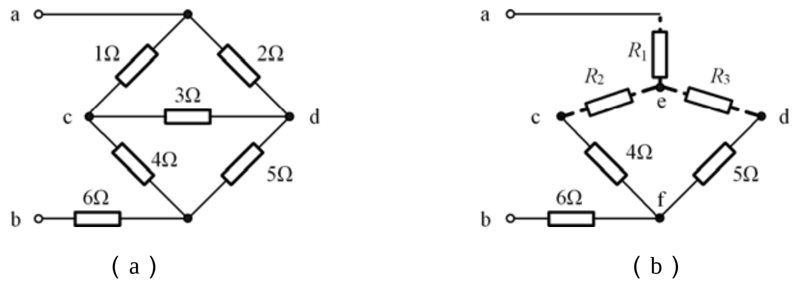


图 2-7　例 2-2

解：将图 2-7（a）中 1 Ω、2 Ω、3 Ω 组成的△形连接用 Y 形连接等效代替，有

$$R_1 = \frac{1\times 2}{1+2+3} = \frac{1}{3}\ (\Omega)$$

$$R_2 = \frac{1\times 3}{1+2+3} = \frac{1}{2}\ (\Omega)$$

$$R_3 = \frac{2\times 3}{1+2+3} = 1\ (\Omega)$$

变换后的等效电路如图 2-7（b）所示，再利用电阻串并联关系进行求解，得

$$R_{ef} = \frac{(4+R_2)\times(5+R_3)}{(4+R_2)+(5+R_3)} = 2.52\ (\Omega)$$

$$R_{ab} = R_1 + R_{ef} + 6 = 0.33 + 2.52 + 6 = 8.85\ (\Omega)$$

本例题也可以将 1 Ω、3 Ω、4 Ω 组成的 Y 形连接等效变换成△形连接，再利用电阻串并联关系进行求解，具体过程不再赘述。

在使用 Y-△ 等效变换时，要注意找准 Y 或△与外部连接的三个点，即分清外电路与 Y 或△电路。

2.3　实际电源的两种模型及其等效变换

2.3.1　理想电压源和理想电流源的串并联

图 2-8（a）所示为 n 个电压源的串联，可以用一个电压源等效替代，如图 2-8（b）所示这个等效的电压源为

$$u_s = u_{s1} + u_{s2} + \cdots + u_{sn} = \sum_{k=1}^{n} u_{sk}$$

如果 u_{sk} 的参考方向与图（b）中 u_s 的参考方向一致时，式中的 u_{sk} 前面取“+”号，不一致时取“-”。

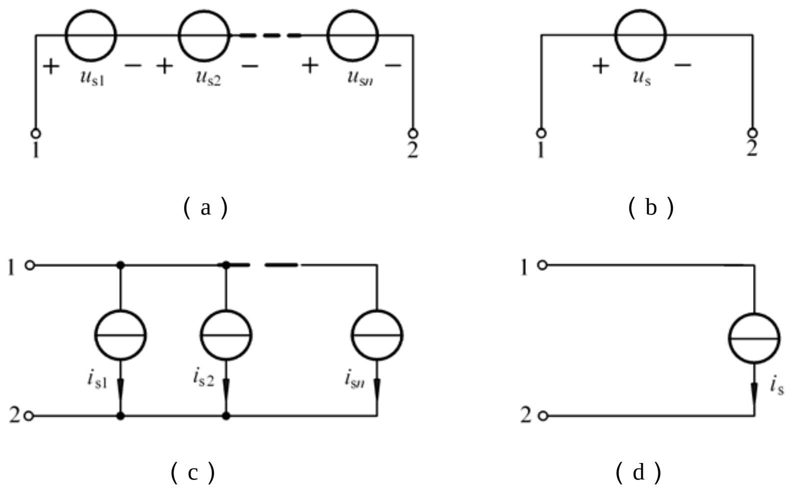


图 2-8　电压源的串联与电流源的并联

图 2-8（c）所示为 n 个电流源的并联，可以用一个电流源等效替代，如图 2-8（d）所示。这个等效的电流源为

$$i_s = i_{s1} + i_{s2} + \cdots + i_{sn} = \sum_{k=1}^{n} i_{sk}$$

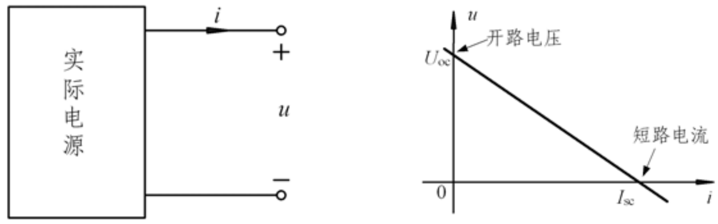
如果 i_{sk} 的参考方向与图 2-8（d）中的参考方向一致时，式中的 i_{sk} 前面取“+”号，不一致时取“-”。

只有电压相等、极性一致的电压源才允许并联，否则违背 KVL，其等效电路为其中任一电压源，但是这个并联组合向外部提供的电流在各个电压源之间如何分配则无法确定。

只有电流相等、方向一致的电流源才允许串联，否则违背 KCL，其等效电路为其中任一电流源，但是这个串联组合的总电压如何在各个电流源之间分配则无法确定。

2.3.2　实际电源的两种电路模型及其等效变换

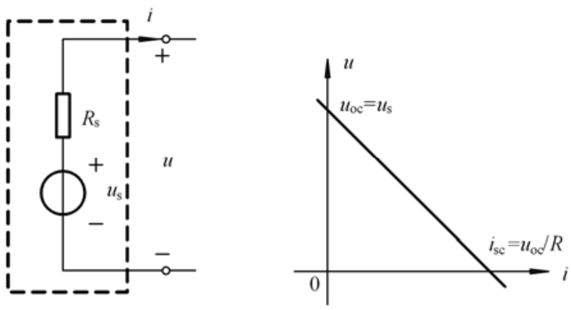
实际电源与理想电源有所不同，由于实际电源本身有内阻，其端电压（或电流）与输出电流（或电压）有关，通常输出电流（或电压）越大，端电压（或电流）越低。根据测定，其电压电流关系曲线如图 2-9 所示。



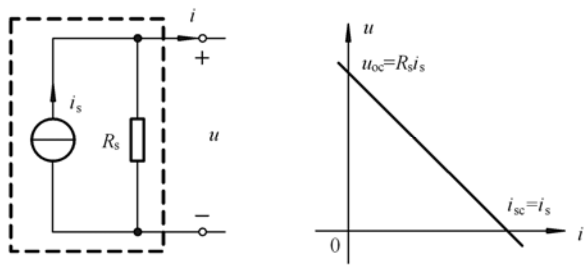
（a）　　　　　　　　（b）

图 2-9　实际电源的伏安特性曲线

根据该曲线，可以作出实际电源的两种等效电路模型。即用电压源和电阻的串联组合或电流源与电阻的并联组合作为实际电源的电路模型。



（a）　　　　　　　　（b）



（c）　　　　　　　　　（d）

图 2-10　实际电源的两种电路模型及其伏安特性曲线

图 2-10（a）所示为一个理想电压源和一个电阻串联组合，其中 R_s 通常称作内电阻（内阻），而 u_s 称为源电压。其端口电压电流关系为

$$u = u_s - R_s i \tag{2-11}$$

当电源输出端开路时，端口电流 $i = 0$，端口电压为

$$u = u_{oc} = u_s \tag{2-12}$$

其中，u_{oc} 称为开路电压。

当电源输出端短路时，端口电压 $u = 0$，端口电流为

$$i = i_{sc} = \frac{u_s}{R_s} \tag{2-13}$$

其中，i_{sc} 称为短路电流。

比较式（2-12）和式（2-13），有

$$R_s = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} \tag{2-14}$$

可见，只要知道上式中任意两个参数，就可以作出其电压源模型，特性曲线如图 2-10（b）所示。

图 2-10（c）所示为一个理想电流源和一个电阻并联组合。其端口电压电流关系为

$$i = i_s - \frac{u}{R_s} \tag{2-15}$$

当电源输出端开路时，端口电流 $i = 0$，端口电压为

$$u = u_{oc} = i_s R_s \tag{2-16}$$

当电源输出端短路时，端口电压 $u = 0$，端口电流为

$$i = i_{sc} = i_s \tag{2-17}$$

其中，i_{sc} 称为短路电流。

比较式（2-16）和式（2-17）有

$$R_s = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} \tag{2-18}$$

只要知道上式中任意两个参数，就可以作出其电流源模型，特性曲线如图 2-10（d）所示。

对比式（2-11）和式（2-15）发现，如果满足条件

$$u_s = R_s i_s \tag{2-19}$$

则两种电源模型的端口电压电流关系将完全一样，即它们对外部是等效的。所以，电压源模型和电流源模型之间在满足该条件情况下，可以进行相互变换，如图 2-11 所示（注意电压源与电流源的方向）。

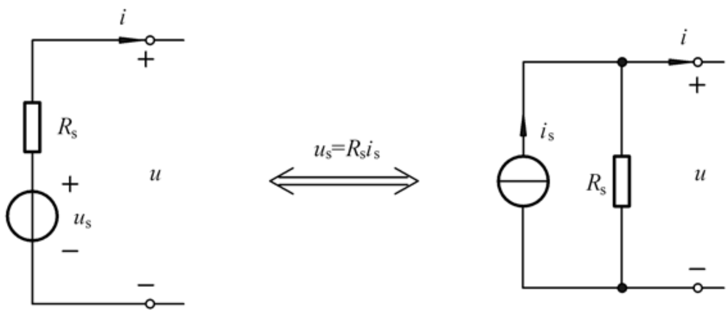


图 2-11　两种电源模型的等效变换

电路分析中，对于有源电阻电路，可以采用上面的两种电源模型等效变换的方法，对电路进行简化，从而方便求解。

例 2-3　求解如图 2-12（a）所示电路中的电流 i。

解：利用等效变换，先把如图 2-12（a）所示左侧电压源与电阻的串联，变换成电流源与电阻的并联，如图 2-12（b）所示；

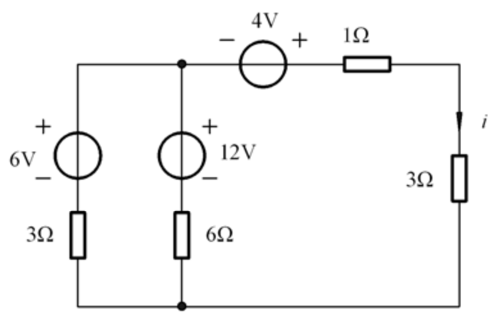
然后利用电流源并联、电阻并联变换得到图 2-12（c）；

再利用一次电源等效变换，将电流源与电阻的并联组合，变换成电压源与电阻的串联组合，如图 2-12（d）所示。

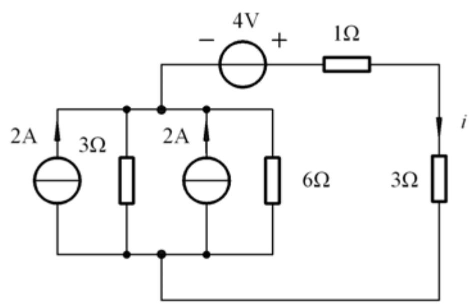
将电压源、电阻串联变换，最后得到图 2-12（e），从而有

$$i=\frac{12}{6}=2\text{（A）}$$

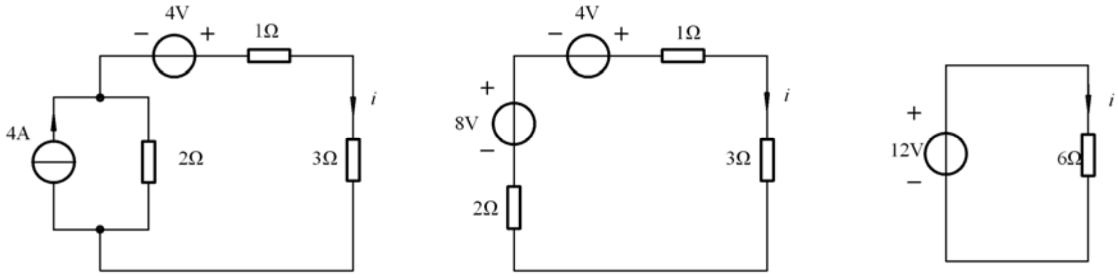
在使用上述电源等效变换时注意，这里的等效变换仍然是对外部电路来讲的，对内部则不然。如果需要求内部电量，必须根据变换前原电路进行求解。



（a）



（b）

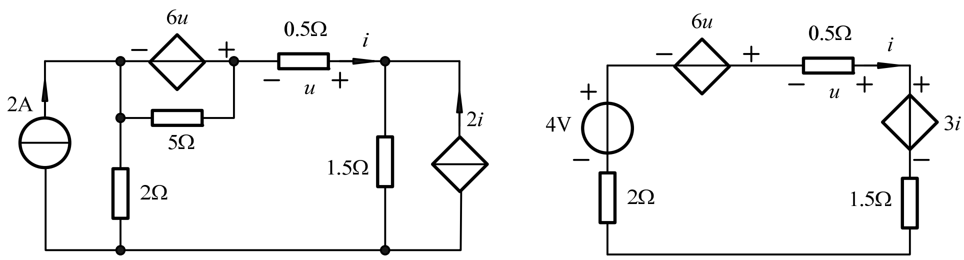


（c）　　（d）　　（e）

图 2-12　例 2-3

另外，受控电压源、电阻的串联组合与受控电流源、电阻的并联组合也可以采用上述方法进行变换，不过需要注意在变换过程中要保留控制量所在支路，而不要把它消掉。

例 2-4　求解如图 2-13（a）所示电路中的电流 i。



（a）　　（b）

图 2-13　例 2-4

解：应用等效变换把图 2-13（a）所示电路转换成图 2-13（b）所示单回路电路。

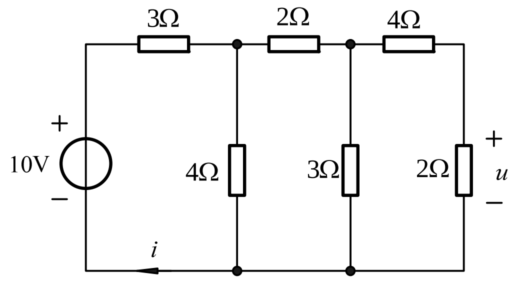
由 KVL 可得

$$\begin{cases} 4 = 2i - 6u + 0.5i + 1.5i + 3i \\ u = -0.5i \end{cases}$$

得　　$i = 0.4$（A）

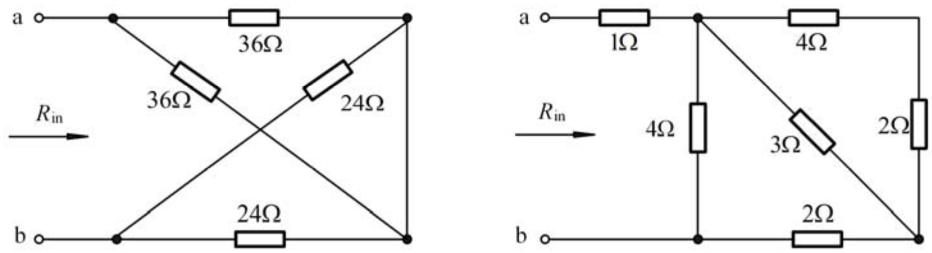
习　题

2-1　如题 2-1 图所示，求图中电压 u 和电流 i。



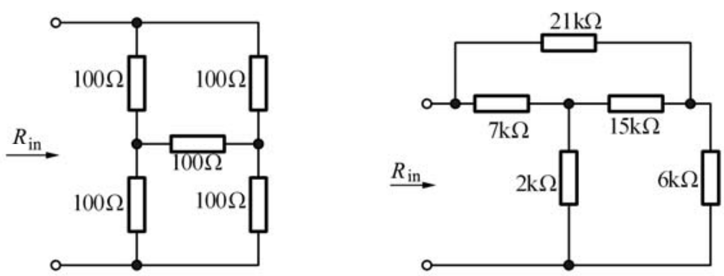
题 2-1 图

2-2　如题 2-2 图所示，求图示电路的等效电阻 R_{in}。



题 2-2 图

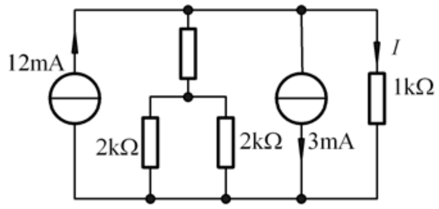
2-3　如题 2-3 图所示，求等效电阻 R_{in}。



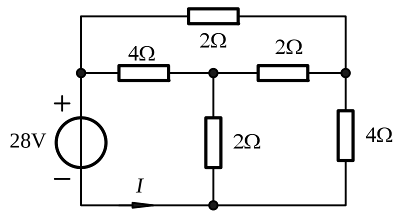
题 2-3 图

2-4　如题 2-4 图所示，求电流 I。

2-5　如题 2-5 图所示，用 Y-△变换求电流 I。

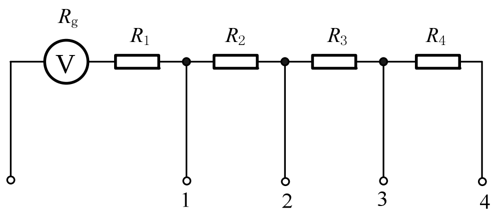


题 2-4 图



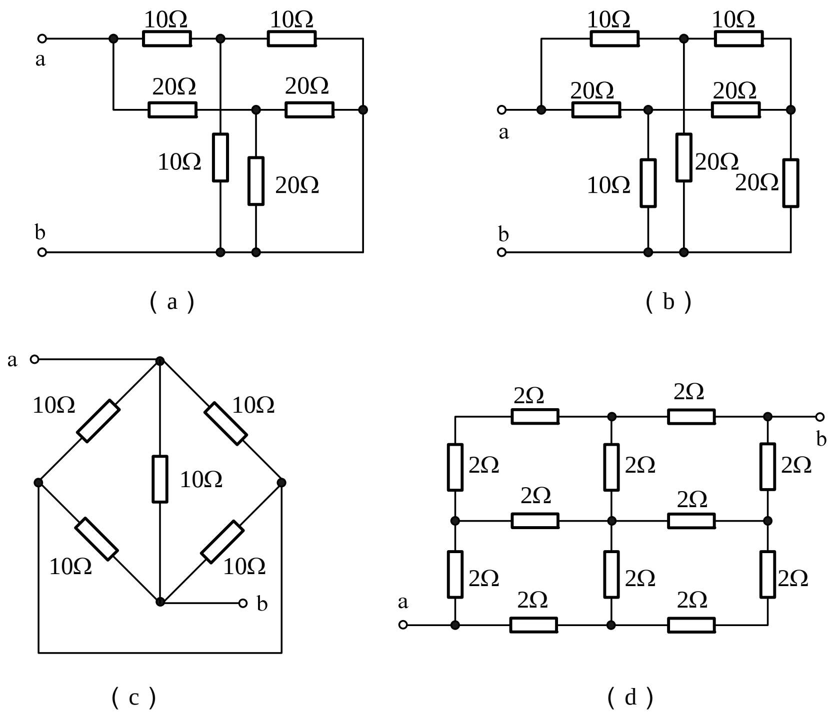
题 2-5 图

2-6　如题 2-6 图所示为一多量程电压表，表头满偏电流 $I_g = 50\ \mu A$，内阻 $R_g = 2.5\ k\Omega$，现欲扩大量程为 2.5 V，10 V，50 V，250 V 四挡。求所需串联的电阻 R_1，R_2，R_3，R_4。



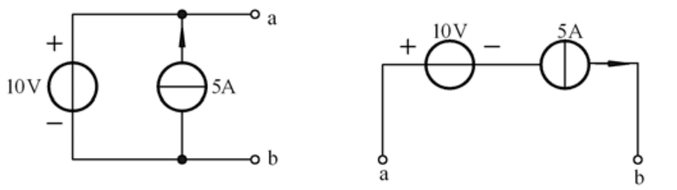
题 2-6 图

2-7　如题 2-7 图所示，求等效电阻 R_{ab}。

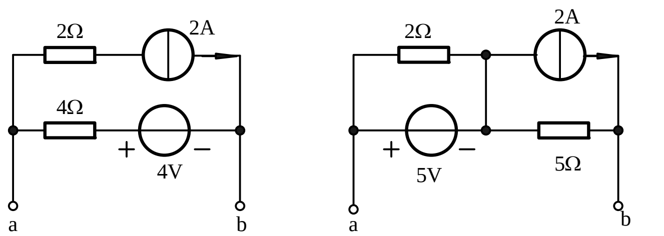


题 2-7 图

2-8　如题 2-8 图所示，通过等效变换化简电路。



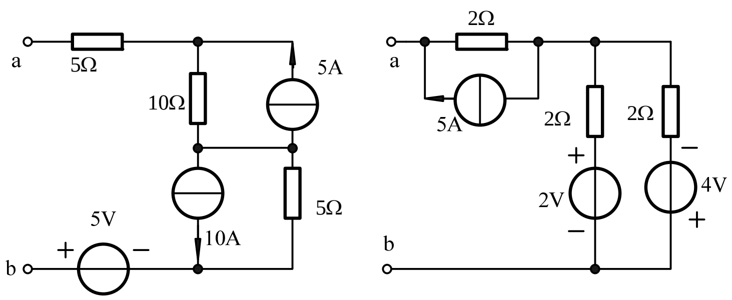
（a）　　　　（b）



（c）　　　　（d）

题 2-8 图

2-9　如题 2-9 图所示，通过等效变换化简电路。

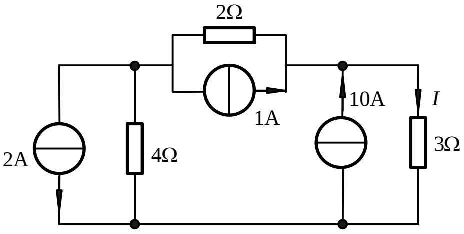


（a）　　　　（b）

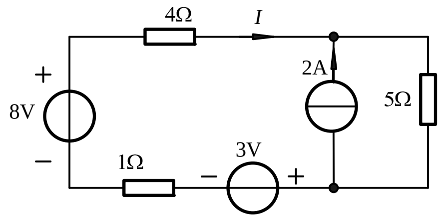
题 2-9 图

2-10　如题 2-10 图所示，试用电源模型等效变换法求电流 I。

2-11　如题 2-11 图所示，试用电源模型等效变换法求电流 I。



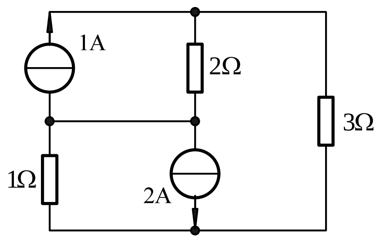
题 2-10 图



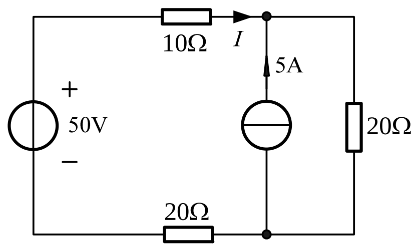
题 2-11 图

2-12　如题 2-12 图所示，试等效简化 3 Ω 电阻所接二端网络，求 3 Ω 电阻的电压，并求 1 Ω 电阻的电流。

2-13　如题 2-13 图所示，试用电源模型等效变换法求电流 I。



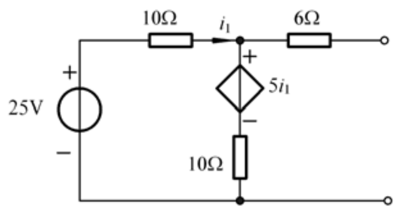
题 2-12 图



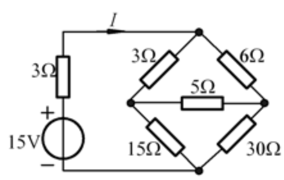
题 2-13 图

2-14　将如题 2-14 图所示电路化简为最简单的形式。

2-15　求如题 2-15 图所示桥式电路中的电流 I。



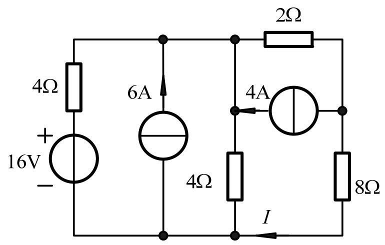
题 2-14 图



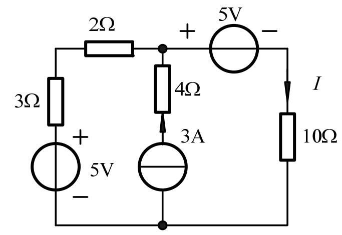
题 2-15 图

2-16　电路如题 2-16 图所示，试用电源模型等效变换法求电流 I。

2-17　电路如题 2-17 图所示，试用电源模型等效变换法求电流 I。

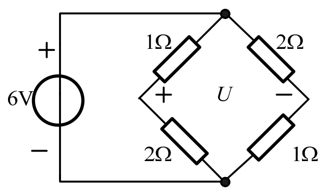


题 2-16 图



题 2-17 图

2-18　电路如题 2-18 图所示，求电压 U。



题 2-18 图