

# 第一章 数学建模概述

## 第一节 数学模型方法的重要性

科学数学化就是把在实践中提出的问题，利用数学理论和计算方法给出正确的数学描述，再运用数学方法解决自然科学、工程技术、经济科学、军事科学和管理科学中的实际问题。多数人认为其工作程序是：

实际问题—数学化—数学模型—检验—应用

可见，数学模型是用数学方法解决实际问题的关键环节，从实际问题中提炼数学模型就要用到数学模型方法。

数学模型方法简称 MM 方法，它是将研究的某种事物系统采用数学形式化语言把该系统的特征和数量关系，抽象出一种数学结构的方法，这种数学结构称为数学模型。一般地，一个实际问题系统的数学模型就是抽象的数学表达式，如代数方程、微分方程、差分方程、积分方程、逻辑关系式，甚至是一个计算机的程序等。而由这种表达式算得某些变量的变化规律，与实际问题系统中相应特征的变化规律相符合。一个实际问题系统的数学模型，就是对其中某些特征的变化规律作出最精炼的概括。

目前，数学模型方法已经得到广泛的应用，成为探索客观规律不可缺少的认识手段，并成为理论思维的有效形式，它在科学研究中发挥着愈来愈重要的作用。其作用可概括为以下三个方面：

第一，数学模型方法同其他数学方法一样为科学研究提供了简洁、精确的形式化语言。利用该方法从实际事物系统中抽象出数学模型，就是用数学符号表示复杂现象的内在联系，这一套数学符号称为形式化语言。由于采用了数学形式化语言，所以对问题的陈述、推理、计算就能够大大简化并加速思维进程，从而揭示出事物的内在联系和运动规律，它具有明显的简洁性和精确性。因此，自然科学、技术科学乃至社会科学的一些定律和原理都尽量表示成简明的数学公式，即数学模型。如果不用形式化语言而用自然语言，不仅无法表达事物的复杂数量关系，就连最简单的数量关系也难以表达清楚。

第二，数学模型方法为科学研究提供抽象思维能力。运用数学模型方法解决实际问题，研究者必须对事物系统进行具体分析，并善于“去粗取精”“化繁为简”地进行一系列抽象，从而得到一个既能反映问题本质特征，同时又是理想化、简单化的数学模型。提炼模型的操作过程实质上是一个科学抽象过程，并由此来反映这种方法所独具的抽象能力。实践使人们认识到，数学模型方法表现出一种抽象思维力量，而熟练使用模型方法则要求人们必须具有很强的抽象能力，必须精通数学抽象分析方法，如果失掉这种抽象认识手段，科学研究将会走进死胡同。

第三，数学模型方法有着巨大的科学预见作用。利用模型方法得到数学模型后，可以在数学模型上展开数学推导、演算和分析，从而对研究对象作出正确的理论概括。由此得到的理论成果，便于作出科学预见，进而把握超出感性经验以外的客观世界。科学史上不少重大发现都是通过数学方法与专业理论相结合才提出的。如电磁波的发现，首先是从英国物理学家麦克斯韦抽象出的数学模型——一组偏微分方程组中推导出来的，后来经德国物理学家赫

兹通过实验所证实。

正因为数学思考方式是如此的重要，才使得数学通过数学建模过程能对事实上非常混乱的现象形成概念性和理想化的东西，也使数学建模方法在各种研究方法，特别是与电子计算机有关的研究方法中占据主导地位。数学建模以及与之相伴随的计算正成为工程设计中的关键工具，因而了解和在一定程度上掌握并应用数学建模的思想和方法应当成为当代大学生必备的素质。对于绝大多数大学生来说，这种素质的初步获得是通过高等数学等课程的学习和练习得到的。

## 第二节 数学模型及数学建模的含义和特点

### 一、数学模型及数学建模的含义

人们在观察、分析和研究现实对象时常常使用模型，如展览馆里的飞机模型、水坝模型。实际上，照片、玩具、地图、电路图等都是模型，它们能概括、集中地反映现实对象的某些特征，从而帮助人们迅速、有效地了解并掌握那个对象。数学模型不过是更抽象些的模型。

简单地说：数学模型就是对实际问题的一种数学表述。

具体一点说：数学模型是关于部分现实世界，为了某种目的而作出的一个抽象的简化的数学结构。

更确切地说：数学模型就是对一个特定的对象，为了一个特定目标，根据特有的内在规律，作出一些必要的简化假设，再运用适当的数学工具得到的一个数学结构。数学结构可以

是数学公式、算法、表格、图示等。

当需要从定量的角度分析和研究一个实际问题时，人们就要在深入调查研究、了解对象信息、作出简化假设、分析内在规律等工作的基础上，用数学的符号和语言，把它表述为数学式子，也就是数学模型，然后用通过计算得到的模型结果来解释实际问题，并接受实践的检验。这个建立数学模型的全过程就称为数学建模。

数学建模是一种重要的数学思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画实际问题的数学模型，再利用计算机求解“解决”实际问题的一种强有力的数学手段；是对现实世界的一特定现象，为了某特定目的，根据特有的内在规律，作出一些重要的简化和假设，再运用适当的数学工具得到一个数学结构，并用它来解释特定现象的现实性态，预测对象的未来状况，提供处理对象的优化决策和控制，设计满足某种需要的产品等。数学建模是使用数学模型来解决实际问题，并将各种知识综合运用于实际问题的解决中，它是培养学生应用所学知识分析问题和解决问题的能力必备手段之一。简单地说：就是系统的某种特征的本质的数学表达式（或者用数学术语对部分现实世界的描述），即用数学式子（如函数、图形、代数方程、微分方程、积分方程、差分方程等）来描述（表述、模拟）所研究的客观对象或系统在某一方面的存在规律。

## 二、数学模型及数学建模的特点

我们已经看到建模是利用数学工具解决实际问题的重要手段。数学模型有许多优点，但也有缺点。建模需要相当丰富的知识、经验和各方面的能力，同时应注意掌握分寸。下面给出了数学模型及数学建模的若干特点，以期学生在学习过程中逐步领会。

### (1) 模型的逼真性和可行性 .

一般来说,人们总是希望模型尽可能地逼近研究对象,但是一个非常逼真的模型在数学上常常是难以处理的,因而不容易达到通过建模对现实对象进行分析、预报、决策或者控制的目的,即实用上不可行.另一方面,越逼真的模型常常越复杂,即使数学上能处理,这样的模型应用时所需要的“费用”也相当高,而高“费用”不一定与复杂模型取得的“效益”相匹配.所以建模时往往需要在模型的逼真性与可行性以及“费用”与“效益”之间作出评判和抉择.

### (2) 模型的渐进性 .

稍微复杂一些的实际问题的建模不可能一次成功,通常要经过其前面所描述的建模过程的反复迭代,包括由简到繁,也包括删繁就简,以期获得越来越满意的模型.在科学发展过程中,随着人们认识和实践能力的提高,各门学科中的数学模型也存在着一个不断完善或者推陈出新的过程.从19世纪力学、热学和电学等许多学科中由牛顿力学建立的模型,到20世纪爱因斯坦相对论模型的建立,就体现了模型渐进性这一特点.

### (3) 模型的强健性 .

模型的结构和参数常常是由对象的信息如观测数据确定的,而观测数据是允许有误差的.一个好的模型应该具有下述意义下的强健性:当观测数据(或其他信息)有微小改变时,模型的结构和参数只能有微小变化,并且一般也要求模型求解的结果有微小变化.

### (4) 模型的可转移性 .

模型是现实对象抽象化、理想化的产物,它不为对象的所属领域所独有,可以转移到其他领域.在生态、经济、社会等领域内建模就常常借用物理领域中的模型.模型的这种性质

显示了其应用的广泛性 .

( 5 ) 模型的非预制性 .

虽然人们已经提出了许多应用广泛的模型 , 但是实际问题是各种各样、变化万千的 , 因此不可能要求把各种模型作成预制品供你在建模时使用 . 模型的这种非预制性使得建模本身常常是事先没有答案的问题 ( open-end problem ), 所以在建立新的模型的过程中常常会伴随着新的数学方法或数学概念的产生 .

( 6 ) 模型的条理性 .

从建模的角度考虑问题可以使人们对现实对象的分析更加全面、更加深入、更具条理性 , 这样即使建立的模型由于种种原因尚未达到实用的程度 , 对问题的研究也是有利的 .

( 7 ) 模型的技艺性 .

建模的方法与其他一些数学方法如方程解法、规划解法等从根本上讲是不同的 , 它是无法归纳出若干条普遍适用的建模准则和技巧的 . 建模与其说是一门技术 , 不如说是一种艺术 . 经验、想象力、洞察力、判断力以及直觉、灵感等在建模过程中所起的作用往往比一些具体的数学知识更大 .

### 第三节 大学生数学建模竞赛以及数学建模教学与竞赛对大学生能力的培养

#### 一、大学生数学建模竞赛

美国大学生数学建模竞赛 ( MCM/ICM ) 由美国数学及其应用联合会主办 , 是唯一的国际性数学建模竞赛 , 也是世界范围内最具影响力的数学建模竞赛 . 赛题内容涉及经济、管理、

环境、资源、生态、医学、安全、未来科技等众多领域。竞赛要求三人（本科生）为一组，在四天时间内，就指定的问题完成从模型建立、求解、验证到论文撰写的全部工作。美国大学生数学建模竞赛体现了参赛选手研究问题、解决方案的能力以及团队合作精神，为现今各类数学建模竞赛之鼻祖。

MCM/ICM 是 Mathematical Contest In Modeling 和 Interdisciplinary Contest In Modeling 的缩写，即“数学建模竞赛”和“交叉学科建模竞赛”。MCM 始于 1985 年，ICM 始于 2000 年，由 COMAP ( the Consortium for Mathematics and Its Application , 美国数学及其应用联合会 ) 主办，得到了 SIAM , NSA , INFORMS 等多个组织的赞助。MCM/ICM 着重强调研究问题、解决方案的原创性、团队合作、交流以及结果的合理性。

2015 年，共有来自美国、中国、加拿大、芬兰、英国、澳大利亚等 19 个国家和地区的 9773 支队伍参加 MCM/ICM，其中包括来自哈佛大学、普林斯顿大学、麻省理工学院、清华大学、北京大学、浙江大学、复旦大学、上海交通大学、西安交通大学、哈尔滨工业大学、华北电力大学、西南交通大学、北京邮电大学等国际知名高校学生参与此项赛事角逐。

中国大学生数学建模竞赛创办于 1992 年，每年一届，目前已成为全国高校规模最大的基础性学科竞赛，也是世界上规模最大的数学建模竞赛。2015 年，来自全国 33 个省（市、自治区）及新加坡和美国的 1326 所院校、28665 个队（其中本科 25646 队、专科 3019 队）、近 86000 名大学生报名参加本项竞赛。2016 年，来自全国 33 个省/市/区（包括我国香港和澳门）及新加坡的 1367 所院校、31199 个队（其中本科 28046 队、专科 3153 队）、共 93000 多名大学生报名参加本项竞赛。

## 1. 竞赛设置

竞赛宗旨：创新意识 团队精神 重在参与 公平竞争

指导原则：扩大受益面，保证公平性，推动教学改革，提高竞赛质量，扩大国际交流，促进科学研究。

全国大学生数学建模竞赛是全国高校规模最大的课外科技活动之一。该竞赛于每年 9 月（一般在上旬某个周末的星期五至下周星期一，共 3 天，72 小时）举行，面向全国大专院校学生，不分专业；但竞赛分本科、专科两组，所有大学生均可参加本科组竞赛，而专科组竞赛只有专科生（包括高职、高专生）可以参加。同学可以向本校教务部门咨询，如有必要也可直接与全国竞赛组委会或各省（市、自治区）赛区组委会联系。

## 2. 社会应用

数学建模的应用对数学建模竞赛起了非常大的促进作用。国内首家数学建模公司——北京诺亚数学建模科技有限公司已在北京成立，这是已读博士学位的魏永生和另外两位志同道合的同学一起创办的创业项目，这也源于他们熟悉的数学建模领域。魏永生三人在 2003 年 4 月组建了一个大学生数学建模竞赛团队，该团队当年就获得了国家二等奖，2005 年又荣获了国际数学建模竞赛一等奖，同年 10 月他们注册了数学建模爱好者网站。本着数学建模走向社会、走向应用的宗旨，他们在 2007 年 6 月正式确立了以数学建模应用为创业方向的团队，开启了创业之路。同月初，北京诺亚数学建模科技有限公司正式注册，这标志着魏永生团队的创业之路走向正轨。现在，诺亚数学建模公司正以其专业化的视角不断拓展业务，壮大实力，已涉及铁路交通、公路交通、物流管理等相关领域的数学建模及数学模型解决方案、咨询服

务。魏永生向记者解释说，也许很多人并不了解数学建模究竟有什么用途，对此，他举了个例子：对于一个火车站，若要计算隔多久发一辆车才能既保证把旅客都带走，又能最大限度地节约成本，这些通过数学建模就能找出最优方案。魏永生介绍说，他们的数学建模团队已有6年的历史，彼此配合很默契，也做了数十个大大小小的项目。他们的创业理念是为直接和潜在客户提供一种前所未有的数学建模优化及数学模型解决方案，真正为客户实现投资收益的最大化、生产成本费用的最小化。

### 3. 相关意义

数学建模竞赛是国内高校中历史最悠久、举办届数最多的学科竞赛，在组织模式上创造了许多经验，已被其他学科竞赛借鉴，同时也带动了其他大学生学科竞赛的健康发展。

数学建模竞赛具有三个阶段：赛前培训、竞赛阶段、赛后继续阶段。如2004年的“饮酒驾车”赛题，让学生分析、估计司机饮用少量酒后多长时间驾车才符合交通规则，重庆某学校师生与当地交警大队联系，由交警大队安排司机做试验，学校师生进行分析，根据司机肇事时的酒精浓度推测他饮用了多少酒；该成果在交警队得到了应用；该成果获得第九届“挑战杯”全国大学生课外学术科技作品竞赛全国终审决赛获全国奖的“数理类”作品。

现在，高校普遍开设了数学建模课程，并举办了校内竞赛，倡导“一次参赛终身受益”的参赛理念。近17年来直接参加全国竞赛的学生约有20万人，至少有200万名学生在竞赛的各个层面上得到了培养和锻炼。

数学建模竞赛是开放型竞赛，是大学阶段除毕业设计外难得的一次“真枪实弹”的训练，它要求学生三天内自觉地遵守竞赛纪律，具有诚信意识和自律精神。竞赛丰富和活跃了广大

同学的课外生活，为优秀学生脱颖而出创造了条件。

## 二、数学建模与竞赛对大学生能力的培养

数学建模竞赛是一项有意义的活动，它对于提高在校大学生的综合素质、培养在校大学生的创新意识和合作精神、促进学校教学建设和教学改革都有着重要的作用。数学建模竞赛也是当代大学生素质教育的一种具体形式，竞赛涉及参赛者的德、智、体等各方面的能力水平。诚信是比赛的基本原则，智力是比赛的动力，体力是比赛的基础。参加数学建模竞赛是对学生道德修养、创造能力和身体素质的一次全面检验，是学校教学改革成果的综合体现。

数学建模竞赛要求学生在面对一个从未接触过的实际问题时，要运用数学方法和计算机技术加以分析和解决，此时，他们必须开动脑筋，拓宽思路，并充分发挥创造力和想象力。对学生创新能力的培养作用早已引起了社会各界的广泛关注。

数学建模竞赛带给参赛学生无数次的惊喜和成功，而成功和喜悦的背后又是多少局外人难以想象的艰辛，是竞赛磨炼了他们的意志，丰富了他们的人生阅历。竞赛锤炼了他们的创新与合作的心态，这种心态又是他们成功的基石，因为他们胜而不骄，败而不馁。

在这个平台上，参赛学生拥有遇到困难时将“建模”进行到底的勇气，并尽情地展示自我，超越自我，学会了如何将知识与应用融入一体的学习；学会了如何将理论与实践融入一体的思考；学会了创新思维和团结协作意识，收获了成功的喜悦和队友的友谊。

下面从三个方面来讲述数学建模活动与其能力培养的关系。

### 1. 数学建模与就业、升学、出国间的关系

学习数学建模能够接触到国内外的各种数学软件，如 Matlab、SAS、Lingo 等；能够拓

宽解决问题的思路与方法；能够提高解决实际问题的创新能力和动手能力及科研能力；能够体验撰写论文流程；能够锻炼学生抗压耐压能力，因此，学习数学建模特别是参加了国内外的数学建模大赛，至少能让人明白你已基本具备了上述能力。

一个人基本具备了上述这些能力，也就有了实际的工作能力，现在很多单位特别需要有思想，能动手，还能吃苦耐劳的工作者，而在中国的大学生中真正具备这些能力的学生并不多。学习建模的学生正以他们的博学多才、敢想敢干、坚强意志而深受用人单位青睐，下面以华中农业大学为例做一介绍。自2005年以来，该校学生的数学建模成绩突飞猛进，这也使得只要参加过数学建模的学生都找到了很好的工作。阿里巴巴、百度、搜狐、华为、腾讯、京东等企业均有他们的学生。

学习数学建模，不仅能够让学生学到很多建模及其数据处理的方法，更能培养学生思考问题和解决问题的良好习惯。不管是自然科学还是社会科学甚至人文科学等，都需要抽象出问题的背景和所要解决的问题，之后就归结为数学问题了。数学是任何学科科学研究的基础，一个学生一旦掌握了这种研究问题的方法和意识，他在科学研究中也就很容易取得成功。作为高校的研究生导师，都非常愿意录取这样的学生。华中农业大学参加过全国数学建模竞赛的学生中有近一半的进入了清华大学、北京大学、北京师范大学、中国人民大学等“985”高校进行深造；有近三分之一的学生本科毕业后进入了美国、英国、德国、新加坡、澳大利亚等国的著名高校深造，且大部分学生取得了资助。在华中农业大学参加数学建模的动力就是升学和出国，而很多出国留学机构也都和该校的数学建模基地进行了合作。该校数学建模团队正努力将数学建模基地打造为出国基地。

## 2. 企业中的数学建模问题

21 世纪以来，中国经济高速发展，中国与世界发达国家的差距越来越小，而随着经济市场化、全球化步伐的加快，数据信息的海量化和复杂化程度越来越高，这也使得企业在高速变化的全球经济中面临的竞争和挑战将会很大，但同时机会也会很多。然而如何科学地进行决策以期获得最大利润才是企业的生存之本，因此，作为一个企业需要在市场竞争分析、消费需求分析、生产优化控制、运输储存、产品开发、资源管理以及人员调配等诸多环节进行系统优化，而这些优化是离不开数学建模的。随着大数据时代的到来，企业更需要具有大数据处理能力的硬件和软件，而软件就是数学建模及相应的计算方法。

正是数学建模教给了学生如何运用数学知识建立企业生产决策中大数据处理所需要的数学模型，并编写相应的计算方法，而具备这些能力的学生无疑是企业所青睐的。数学建模人才的培养与社会需求紧密相连，因而具有旺盛的生命力。

企业中的数学建模问题，大致可分为五大类：一是预测预报问题，包括产品销售、交易期望、生产前景等；二是评价与决策，包括实施方案的风险评估、项目的选择、绩效的评价等；三是分类与判别，包括消费群体的分类、产品归属的判别等；四是关联与因果分析，包括产品质量控制、市场营销等；五是优化与控制，包括生产流程控制、产品定价问题、工程预算问题、规划设计问题等。

数学建模问题本身就来自于现实世界，来自于企业，因此数学建模问题解决的好坏对企业的发展起到了至关重要的作用，而掌握了这种技术的人无疑将在企业中发挥重要的作用。

## 3. 数学建模对科研和工作的影响

数学在生活中无处不在，数学能力的考察并不仅仅是单纯数学知识层面的考察，更多的是数学思维能力和应用能力的考察。而数学建模的实践就是引导大学生们发现实际生活中的数学规律，学会运用数学方法来解决生活当中的问题，从而使自己的思维能力得到很好的锻炼。所以说，参加数学建模学到的实际是一种数学技能，一种可以伴随人一生的思维能力。包括逻辑思维能力、逆向思维能力、创新能力、快速自学能力、文字表达能力以及团队协作能力，等等。

通过数学建模的学习，培养了学生“学数学，用数学”的意识和能力，包括查阅资料的能力、文献综述的能力、模型建立的能力、问题分析的能力、计算编程的能力、科研写作的能力以及超强的自学能力。而有了这些能力，学生就有了创新和动手的能力，也就有了较高的科研潜能和素质，同时也具备了较强的工作能力。科研工作也需要一个具有肯吃苦、善思考、勤动手、能反思等素质的人来担当，而数学建模就是为了培养学生的这些素质，因此，学习数学建模就是培养了我国的工作能手和科研骨干。