

结构力学

刘蓉华 编著

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

结构力学 / 刘蓉华编著. —成都: 西南交通大学出版社, 2014.9

ISBN 978-7-5643-3419-2

I. ①结… II. ①刘… III. ①结构力学 IV. ①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 205341 号

结构力学

刘蓉华 编著

责任编辑	曾荣兵
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 (四川省成都市金牛区交大路 146 号)
发行部电话	028-87600564 87600533
邮政编码	610031
网 址	http://www.xnjdcbs.com
印 刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印 张	21
字 数	495 千字
版 次	2014 年 9 月第 1 版
印 次	2014 年 9 月第 1 次
书 号	ISBN 978-7-5643-3419-2
定 价	39.50 元

课件咨询电话: 028-87600533

图书如有印装质量问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前 言

本书是按照教育部力学课程教学指导委员会撰写的《结构力学课程教学基本要求》，围绕应用型人才培养，根据土建类结构力学的教学计划和教学大纲编写的。

全书共九章，第一~六章主要内容包括了静定结构内力计算与位移计算、超静定结构计算的力法与位移法，这些内容是结构力学课程的重要基础，也是学习者必须修读的结构力学经典部分。本书的第七、八、九章是在其经典内容的基础上，进一步介绍杆件结构分析的一些专题分析方法，包括杆系结构的计算机分析、结构动力分析和在移动荷载作用下的结构分析，这些专题内容将为学习相关专业课程以及进行结构设计和科学研究打下良好的基础。

本书的编写致力于读者结构力学的基本概念的培养及应用能力的提高，全书内容简明，讲解语言平实，叙述深入浅出，尽可能注意由具体到抽象，由简单到复杂，注重综合归纳、思考提高。在全书各章的开篇均根据《结构力学课程教学基本要求》，对学习目的和主要知识点的掌握程度，给出了“了解”、“熟悉与理解”、“掌握与应用”由低到高的层次要求。全书的编写符合课程的认知和发展规律，也适应于当前教学改革的要求。

本书是西南交通大学结构力学教研室教师在长期从事结构力学教学、科研以及工程实践的基础上写成的，罗永坤、黄慧萱、蔡婧、江南、马珩、齐欣、李翠娟老师为本书的策划、编写、修订等给予了大量的帮助与支持，在此一并表示衷心的感谢！

限于编者的水平，书中难免存在疏漏和不足之处，诚恳期望同行和读者批评指正。

编 者

2014年8月

目 录

第一章 绪 论	1
第一节 结构力学的研究对象和基本任务	2
第二节 结构的计算简图	2
第三节 杆件结构的分类	6
第二章 平面体系的几何组成分析	8
第一节 结构的几何不变性	9
第二节 运动自由度的概念	9
第三节 几何不变体系的简单组成规则	11
第四节 几何组成分析示例	15
第五节 体系的几何构造与静定性	17

习 题	18
习题参考答案	20
第三章 静定结构的受力分析	21
第一节 静定梁	22
第二节 多跨静定梁	29
第三节 静定平面刚架	32
第四节 三铰拱	42
第五节 静定平面桁架	47
第六节 组合结构	54
第七节 静定结构的一般性质	57
习 题	58
习题参考答案	62
第四章 静定结构位移计算	65
第一节 概 述	66
第二节 虚功原理及其在位移计算中的应用	67
第三节 荷载作用下结构的位移计算	70
第四节 图乘法	77
第五节 静定结构在非荷载因素作用下的位移计算	84
第六节 弹性体系的互等定理	89
习 题	91
习题参考答案	94
第五章 力 法	96
第一节 超静定结构的概念和超静定次数	97
第二节 力法的基本原理	99
第三节 荷载作用下各类超静定结构的计算	105
第四节 对称性的利用	111
第五节 广义荷载作用下的力法计算	118
第六节 超静定结构在荷载作用下的位移计算	123
第七节 超静定结构最后内力图的校核	125
第八节 超静定结构的特性	128
习 题	129
习题参考答案	133
第六章 位移法	135
第一节 位移法的基本思路	136
第二节 单跨超静定梁的杆端力	137
第三节 位移法的基本未知量和基本结构	140
第四节 位移法原理与位移法方程	142

第五节	位移法计算步骤及示例	145
第六节	对称性的利用	154
第七节	力矩分配法	156
习 题		166
习题参考答案		171
第七章	矩阵位移法	173
第一节	概 述	174
第二节	结构离散化	174
第三节	局部坐标系下单元刚度方程和单元刚度矩阵	180
第四节	单元刚度矩阵的坐标转换	188
第五节	结构的整体分析	193
第六节	单元杆端力的计算	207
第七节	计算步骤和算例	211
第八节	矩阵位移法计算程序主框图简介	219
习 题		220
习题参考答案		225
第八章	结构动力学	228
第一节	概 述	229
第二节	结构动力计算简图和动力自由度	231
第三节	单自由度体系的自由振动	233
第四节	单自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动	245
第五节	单自由度体系在一般动荷载作用下的强迫振动	254
第六节	多自由度体系的自由振动	256
第七节	多自由度体系在简谐荷载作用下强迫振动	269
第八节	振型分解法	274
习 题		278
习题参考答案		282
第九章	影响线及其应用	285
第一节	移动荷载与影响线的概念	286
第二节	静力法作单跨静定梁影响线	286
第三节	静力法作多跨静定梁的影响线	295
第四节	间接荷载作用下的影响线	297
第五节	机动法作静定梁影响线的概念	299
第六节	桁架内力影响线	304
第七节	影响线的应用	311
第八节	简支梁的绝对最大弯矩和内力包络图的概念	319
习 题		322

习题参考答案	326
--------------	-----

第三章 静定结构的受力分析

【学习目的和基本要求】

静定结构在工程中有着广泛的应用，它的受力分析是结构位移计算和超静定结构内力计算的基础。因此，掌握静定结构的计算方法是结构力学的基本任务之一。

对本章学习的基本要求如下：

了解：(1) 静定结构的基本性质和派生性质；

(2) 各种结构的受力特点，为位移计算和力法等的学习奠定基础。

熟悉与理解：(1) 各种结构的受力特点；

(2) 区段叠加法绘制直杆的弯矩图；

(3) 荷载与内力的微分关系，由弯矩图利用荷载与内力的微分关系绘制剪力图；

(4) 由几何组成确定静定结构的内力计算途径；

(5) 内力图的特征。

掌握与应用：(1) 用截面法计算梁和刚架指定截面的内力；

(2) 用区段叠加法绘制直杆的弯矩图；

(3) 由弯矩图利用荷载与内力的微分关系绘制剪力图；

(4) 多跨静定梁和静定平面刚架的内力计算方法及内力图绘制；

(5) 三铰拱的受力特点，三铰拱支座反力及指定截面内力的计算方法和合理拱轴的概念；

(6) 桁架的受力特点，用结点法和截面法计算桁架杆件内力，利用结点平衡的特殊情况判定零杆；

(7) 静定组合结构的内力计算。

第一节 静定梁

静定结构是工程中常用的结构，其受力分析是结构分析的基础。从几何组成上看，静定结构是没有多余约束的几何不变体系；从受力分析上看，在任意荷载作用下，其反力和内力可以由静力平衡条件求得，而且满足静力平衡条件的解答是唯一的。静定梁是组成各种结构的基本构件之一，其受力分析是各种结构受力分析的基础。因此，读者应对本节内容熟练掌握。

一、单跨静定梁

工程中最为常见的单跨静定梁如图 3.1 (a)、(b)、(c) 所示，分别称为简支梁、伸臂梁和悬臂梁；而图 3.1 (d) 所示梁为一端滑动支座、另一端铰支的简支梁，往往在利用对称性时常用到。

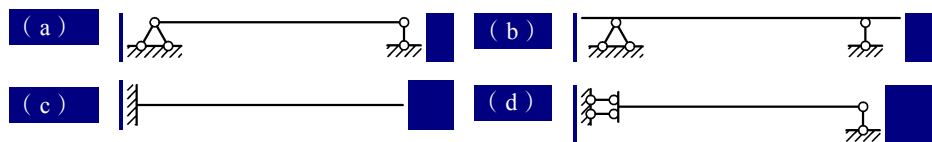


图 3.1

单跨静定梁的计算在材料力学中已作过详细讨论，现对其内力概念以及计算方法进行一下回顾：

平面结构在任意荷载作用下[见图 3.2 (a)]，其杆件横截面（如截面 K ）上一般有三个内力分量，即轴力 F_N 、剪力 F_Q 和弯矩 M 。内力的符号通常规定如下：轴力以拉力为正；剪力以绕隔离体顺时针方向转动者为正；弯矩以使梁的下侧纤维受拉者为正[见图 3.2 (b)]。

计算内力的基本方法是截面法。首先在所求内力的截面处截开，取截面任一侧为隔离体；然后用相应内力代替该截面的应力之和[见图 3.2 (b)]；再利用隔离体的平衡条件，确定该截面的内力。

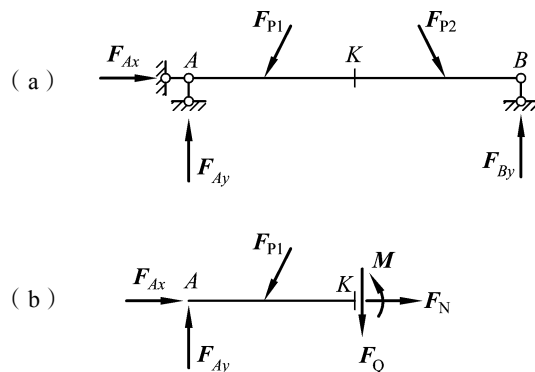


图 3.2

用截面法求截面内力时，选取隔离体应注意两点：① 宜选取外力较少的部分为隔离体，不能遗漏外力和约束力；② 隔离体上的已知力按实际方向示出，未知力设为正号方向。计算结果为正时，表明实际内力与假设为相同方向；计算结果为负时，表明实际内力与假设反向。

例 3.1 求图 3.3 (a) 所示结构 C 截面的内力。

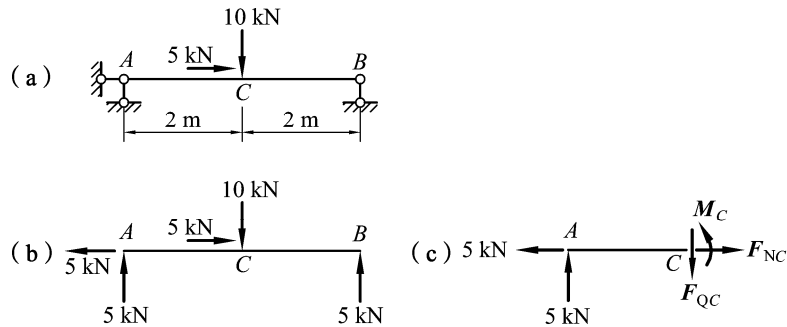


图 3.3

解 (1) 求支座反力。

由整体平衡条件，求得 A、B 支座的支座反力，如图 3.3 (b) 所示。

(2) 取隔离体，求截面内力。

在 C 截面处截开，取截面以左部分作为隔离体，用相应内力代替该截面的应力之和，如图 3.3 (c) 所示。利用隔离体的平衡条件确定该截面的内力，即

由 $\sum F_x = 0$ ，有 $F_{NC} - 5 = 0$ ，求得

$$F_{NC} = 5 \text{ kN}$$

轴力 F_{NC} 等于 C 截面左侧所有的外力沿 x 方向的投影代数和。

由 $\sum F_y = 0$ ，有

$$5 - F_{QC} = 0$$

$$F_{QC} = 5 \text{ kN}$$

剪力 F_{QC} 等于 C 截面左侧所有外力沿 y 方向的投影代数和。

由 $\sum M_C = 0$ ，有

$$5 \times 2 - M_C = 0$$

$$M_C = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

弯矩 M_C 等于 C 截面左侧所有外力对截面形心的力矩的代数和。

计算结果为正，表明 C 截面内力与假设方向相同，均为正内力。

表示结构上各截面内力数值的图形称为内力图。内力图通常是以杆轴线作为基线，在垂直于杆轴线的方向上量取纵距而绘出的。弯矩图习惯上绘在杆件受拉纤维的一侧，正值的纵距画在基线的下侧，但图上不标正负号；剪力图和轴力图则将正值的纵距绘在基线上方，同

时要标明正负号。

二、内力与荷载的关系

按照材料力学的原理，梁的内力之间以及内力与荷载集度之间存在某些确定的关系。图 3.4 所示为从荷载连续分布的直梁上截取的微段隔离体，微段上垂直杆件轴线方向的均布荷载记为 q_y 。图中的截面内力都是按正向画出的。应用静力平衡条件，并略去高阶微量，可导出在图示坐标下内力之间以及内力与荷载集度之间的微分关系：

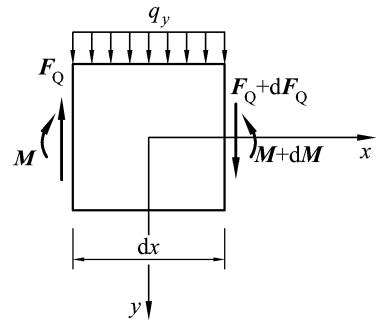


图 3.4

$$\begin{cases} \frac{dF_Q}{dx} = -q_y \\ \frac{dM}{dx} = F_Q \\ \frac{d^2M}{dx^2} = -q_y \end{cases} \quad (3-1)$$

式 (3-1) 的几何意义是：剪力图上某点处的切线斜率等于该点处的横向荷载集度 q_y ，但符号相反；弯矩图上某点处的切线斜率等于该点处的剪力。由上述微分关系可知：

(1) 在无均布荷载区段 ($q_y = 0$)，剪力为一常值，对应的剪力图为与杆件轴线平行的直线；而弯矩图则为倾斜的直线，其斜率大小就等于杆中的剪力值。

(2) 在有均布荷载区段，剪力图为倾斜的直线，而弯矩图则为二次抛物线，抛物线的凸向与 q_y 指向一致；剪力为零处，弯矩图为极值点。

(3) 在横向集中力 F_P 作用处，剪力图有突变，突变值为 F_P 值；而弯矩图有尖角，尖角方向与 F_P 方向相同。

(4) 集中力偶 M 作用处，剪力图无变化；而弯矩图有突变，突变值为 M 值。

三、分段叠加法画内力图

1. 简支梁内力图叠加法

由叠加原理可知，几个力对杆件的作用效果，等于每一个力单独作用效果的总和。由此可作出以下简支梁的弯矩图，其作图过程如图 3.5 所示：首先，作出图 3.5 (b) 所示简支梁的弯矩图。该图两端的纵距分别为 M_A 和 M_B ，将两点纵距以直线相连得到如图 3.5 (d) 所示直线弯矩图。其次作出均布荷载 q 作用下的弯矩图，该图为一个抛物线，如图 3.5 (e) 所示。再次将两个图中相应纵距叠加。叠加时先作出图 3.5 (d) 所示的直线弯矩图，即图 3.5 (f) 中的虚线部分。再次以虚线为基线，叠加图 3.5 (e) 所示的抛物线，此曲线与基线所围成的图形即为叠加后杆段 AB 的弯矩图，见图 3.5 (f)。图 3.5 (f) 中也示出了弯矩图的坐标，弯矩的正值绘在基线的下侧。

叠加法求弯矩可用如下公式：

$$M = M_1 + M_0 \quad (3-2)$$

AB 段中点的弯矩值：

$$M = \frac{M_A + M_B}{2} + \frac{ql^2}{8} \quad (3-3)$$

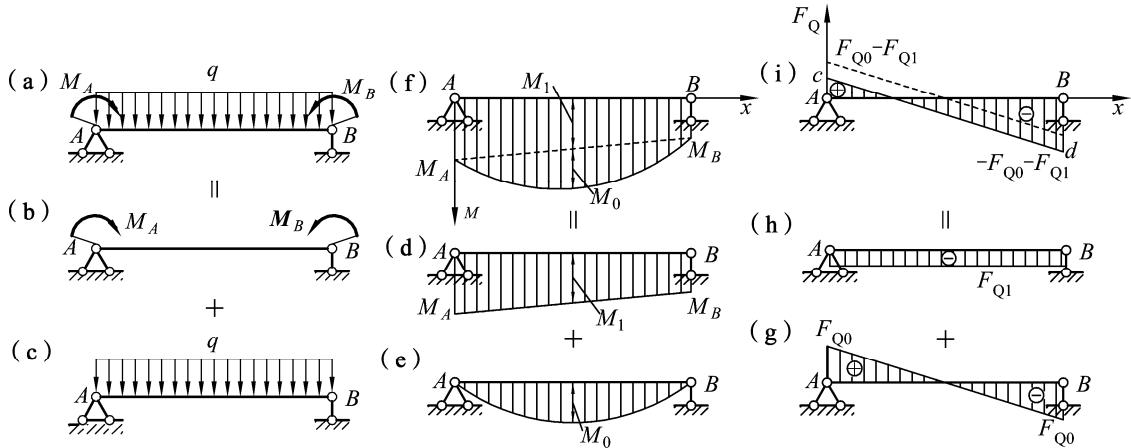


图 3.5

用叠加法作弯矩图应该注意的是：弯矩图的叠加是指各个截面对应的弯矩纵距的代数和，而不是弯矩图的简单拼合，纵距应垂直于杆轴（而不是垂直于 M_A 、 M_B 连线的方向）；凸向与荷载指向一致。

同样，我们也可用叠加法作图 3.5 (a) 所示简支梁的剪力图。首先，作出图 3.5 (c) 所示均布荷载作用下的剪力图[见图 3.5 (g)]，左、右两端的纵距值分别为 $\pm F_{Q0} = \pm \frac{ql}{2}$ ；其次，由 $F_Q = \frac{dM}{dx}$ 作出图 3.5 (d) 相应的剪力图，该剪力图纵距为一常数[见图 3.5 (h)]，其值等于图 3.5 (d) 所示 M 图的斜率，即

$$F_Q = \frac{dM}{dx} = -\frac{M_A - M_B}{l} = -F_{Q1}$$

再次，将图 3.5 (g) 和图 3.5 (h) 两图中相应纵距叠加。叠加时先作图 3.5 (g) 所示的斜线剪力图，即图 3.5 (i) 中的虚线部分，再以虚线为基线，叠加图 3.5 (h) 所示的直线剪力图，该剪力图纵距为常数 $-F_{Q1}$ 。由此，在图 3.5 (i) 中虚线的左、右两端分别往下叠加一个 F_{Q1} 纵距，从而得到 c 、 d 两点，然后连接 c 、 d 两点作虚线的平行线，由 AB 与 cd 构成的图形，即为 AB 杆件的总剪力图[见图 3.5 (i) 竖直阴影部分]。A、B 两端的剪力值为

$$F_{QA} = F_{Q0} - F_{Q1} = \frac{ql}{2} - \frac{M_A - M_B}{l}$$

$$F_{QB} = -F_{Q0} - F_{Q1} = -\frac{ql}{2} - \frac{M_A - M_B}{l}$$

这个结果与按静力平衡条件求得的两端剪力是一致的。

图 3.5 (i) 中示出了剪力图的坐标, 剪力的正值绘在基线的上侧。

2. 直杆段弯矩叠加法

上述叠加法同样可用于绘制结构中任意直杆段的弯矩图。图 3.6 (a) 所示为一简支梁及其所受荷载。设要求作出直杆段 AB 的弯矩图。为此, 可取 AB 为隔离体[见图 3.6 (b)], 其两端的弯矩为 M_A 和 M_B , 剪力为 F_{QA} 和 F_{QB} 。将此隔离体与跨度等于此杆段长 a , 承受同样荷载 q 及两端弯矩 M_A 、 M_B 作用的相应简支梁[见图 3.6 (c)]的受力情况相比较。由静力平衡条件可知 $F_{QA} = F_{RA}$ 、 $F_{QB} = -F_{RB}$, 可见两者完全相同, 因而亦具有相同的内力图。于是 AB 段的弯矩图可以采用简支梁弯矩图叠加法进行计算, 见图 3.6 (d)。

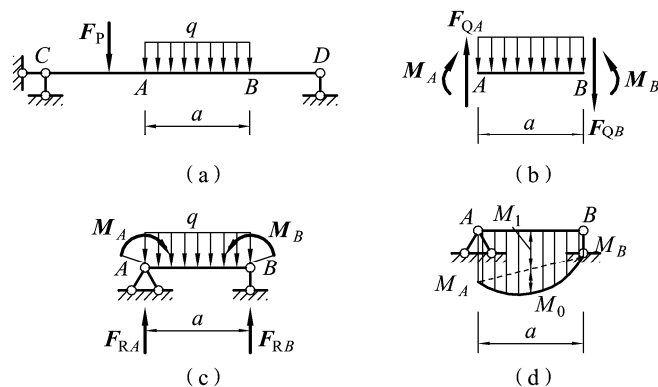


图 3.6

综上所述, 用叠加法绘结构中任意直杆段弯矩图的作图步骤可归结如下:

(1) 欲作某直杆段 AB 的弯矩图, 先用截面法求出两杆端截面的弯矩 M_A 、 M_B , 然后将其纵距顶点连一虚线, 见图 3.6 (d)。

(2) 以此虚线作为基线, 在此基线上叠加相应简支梁荷载作用下的弯矩图。

(3) 取最后图线与杆轴之间所包含的图形, 得实际弯矩图。

例 3.2 试用叠加法作图 3.7 (a) 所示梁的 M 、 F_Q 图。

解 (1) 求出 A 、 B 支座的支座反力, 如图 3.7 (b) 所示。

(2) 将该梁拆成若干个杆段, 各杆端截面为控制截面。根据各段梁外力作用状况, 一般选定外力的不连续点作为控制截面, 然后由截面法求出控制截面的弯矩。本例中, 将该梁拆成 AD 杆段、 DB 杆段, 由截面法求出 A 、 D 、 B 三控制截面的弯矩。其中, $M_A = 0$, $M_B = 0$, 故只需求出 D 截面弯矩。

在 D 截面处截开, 取截面以左部分作为隔离体, 由 $\sum M_D = 0$, 求得

$$M_D = qa^2 - qa^2/2 = qa^2/2 \quad (\text{下缘受拉})$$

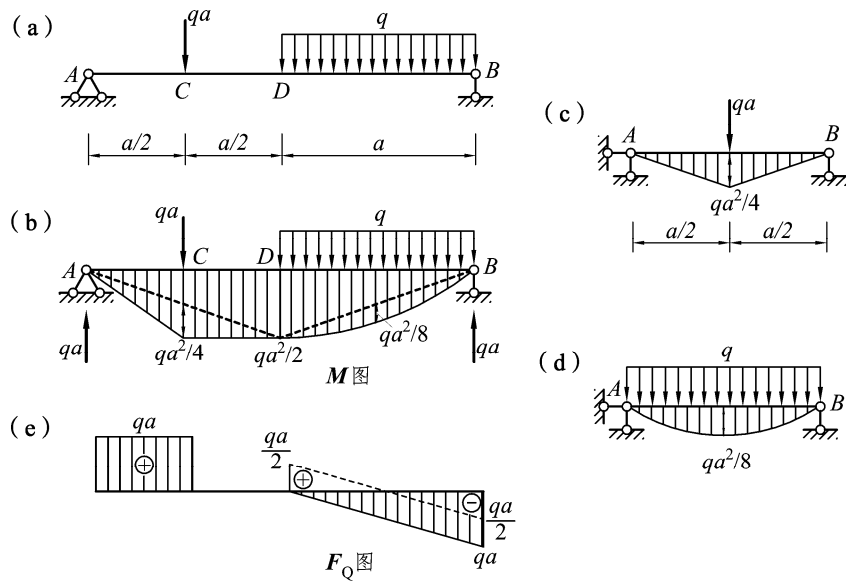


图 3.7

(3) 将 A、D 两截面弯矩纵距顶点连一虚线，以该虚线为基线叠加图 3.7 (c) 所示简支梁的弯矩图；再将 D、B 两截面弯矩纵距顶点连一虚线，以该虚线为基线叠加上图 3.7 (d) 所示简支梁的弯矩图；最后取图线与杆轴之间所包含的图形，即得实际弯矩图，如图 3.7 (b) 所示。

(4) 利用微分关系 $F_Q = dM/dx$ ，由弯矩图上某点的斜率求该点的剪力。剪力图可由左端 A 开始逐段画出。弯矩图斜率的正、负号按图 3.8 所示的坐标规定判定。

$$AC \text{ 段: } F_{QAC} = \frac{dM}{dx} = \frac{\frac{qa^2}{4} + \frac{qa^2}{4}}{\frac{a}{2}} = qa$$

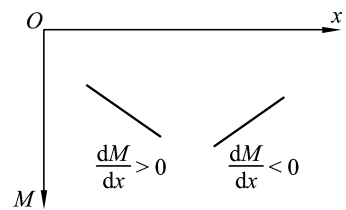


图 3.8

按图 3.8 所示的坐标规定，在该段中 M 图的斜率为正，剪力即为正常值 qa ，即剪力图为一水平线。

$$CD \text{ 段: } F_{QCD} = \frac{dM}{dx} = 0$$

在该段中 M 为常值 (M 图水平线)， M 图的斜率为零，即剪力为零。

DB 段：先作出图 3.7 (d) 所示简支梁在均布荷载作用下的剪力图并以虚线表示 [见图 3.7 (e)]，左、右两端剪力值分别为 $\frac{qa}{2}$ 、 $-\frac{qa}{2}$ 。再以虚线为基线，在竖直方向叠加一个由杆端弯矩 M_D 作用下的剪力图，即 M 图中虚线的斜率，其值为

$$-\frac{qa^2/2}{a} = -\frac{qa}{2}$$

由此可得 D、B 两端点剪力值分别为

$$F_{QD} = \frac{qa}{2} - \frac{qa}{2} = 0, \quad F_{QB} = -\frac{qa}{2} - \frac{qa}{2} = -qa$$

然后将其连成直线即为 DB 段剪力图。全梁剪力图如图 3.7 (e) 所示。

例 3.3 试用叠加法作图 3.9 (a) 所示伸臂梁的 M 、 F_Q 图。

解 先作悬臂部分 BC 的弯矩图, 该部分受均布荷载作用, 弯矩图为下凸的二次抛物线, B 、 C 端截面弯矩为

$$M_B = -\frac{ql^2}{2} = -\frac{1}{2} \times 4 \times 3^2 = -18 \text{ (kN}\cdot\text{m)}, \quad M_C = 0$$

于是绘得图 3.9 (b) 中的二次曲线 bc 。

再作 AB 部分的弯矩图, 为了减少控制截面弯矩值的计算, 可在两控制截面之间以虚线为基线叠加相应简支梁受任意荷载作用下的弯矩图。现选定 A 、 B 两点为控制截面。 A 端铰处 $M_A = 0$ 。在图 3.9 (b) 上连虚线 ab , 并以它为基线, 向下叠加一个图 3.9 (c) 所示的相应简支梁的荷载弯矩图 (该图 $1/3$ 跨度处的弯矩均为 $16 \text{ kN}\cdot\text{m}$), 消去正、负重叠部分, 最后结果 $M_D = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_E = 4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。全梁弯矩图如图 3.9 (b) 中竖直阴影线部分所示。

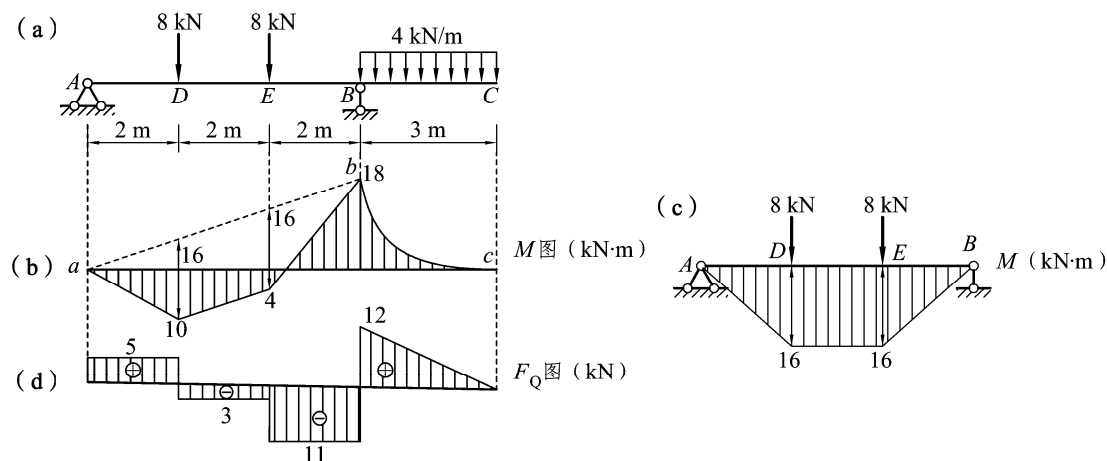


图 3.9

剪力图可由左端 A 开始逐段画出。利用微分关系 $F_Q = dM/dx$, 由弯矩图上某点的斜率求该点的剪力, 无须计算支座反力。

$$AD \text{ 段: } F_{QAD} = \frac{dM}{dx} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (kN)}$$

$$DE \text{ 段: } F_{QDE} = \frac{dM}{dx} = -\frac{10-4}{2} = -3 \text{ (kN)}$$

$$EB \text{ 段: } F_{QEB} = \frac{dM}{dx} = -\frac{18+4}{2} = -11 \text{ (kN)}$$

BC 段为悬臂梁部分, 其剪力图为在自由端处 $F_Q = 0$, 在悬臂梁端部 B 处, $F_{QB} = ql = 4 \times 3 = 12 \text{ kN}$ 。全梁的剪力图如图 3.9 (d) 所示。

第二节 多跨静定梁

多跨静定梁是工程实际中比较常见的结构，它的基本组成形式为图 3.10 所示的两种类型。图 3.10 (a) 所示的是在伸臂梁 AC 上依次加上 CE 、 EF 两根梁；图 3.10 (c) 所示的是在 AC 和 DF 两根伸臂梁上再加上一小悬跨 CD 梁。通过几何组成分析可知，它们都是几何不变且无多余约束的体系，所以均为静定结构。

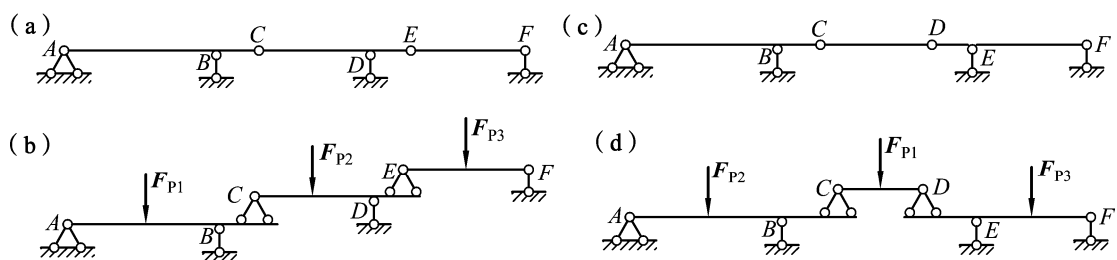


图 3.10

根据多跨静定梁的几何组成规律，可以将它的各部分区分为基本部分和附属部分。例如图 3.10 (a) 所示的梁中， AC 是通过三根既不全平行也不全相交于一点的链杆与基础联结，所以它是几何不变的； CE 梁通过铰 C 和支座链杆 D 联结在 AC 梁和基础上； EF 梁又是通过铰 E 和支座链杆 F 联结在 CE 梁和基础上。由此可知， AC 梁直接与基础组成几何不变部分，它的几何不变性不受 CE 和 EF 影响，故称 AC 梁为该多跨静定梁中的基本部分。而 CE 梁要依靠 AC 梁才能保证其几何不变性，故称 CE 梁为 AC 梁的附属部分。同理， EF 梁相对于 AC 和 CE 组成的部分来说，也是附属部分；而 AC 和 CE 组成的部分相对于 EF 梁来说，则是基本部分。

上述组成顺序可用图 3.10 (b) 来表示，这种图形称为层叠图。通过层叠图可以看出力的传递过程。例如：作用在最上面的附属部分 EF 上的荷载 F_{P3} ，不但会使 EF 梁受力，而且还通过 E 结点将力传给 CE 梁，再通过 C 结点传给 AC 梁。同样，荷载 F_{P2} 能使 CE 梁和 AC 梁受力，但它不会传给 EF 梁。因此， F_{P2} 的作用对 EF 梁的内力无影响。同理，作用在基本部分 AC 梁上的荷载 F_{P1} 只在 AC 梁上引起内力和反力，而对附属部分 CE 和 EF 都不会产生影响。总之，作用在附属部分上的荷载将使支承它的基本部分产生反力和内力，而作用在基本部分上的荷载则对附属部分没有影响。因此，计算多跨静定梁时，应先从附属部分开始，按组成顺序逆向进行。例如：对图 3.10 (a) 所示多跨静定梁，应先取 EF 梁计算，再依次考虑 CE 梁和 AC 梁。这样，每一步都是单跨静定梁的计算问题，用前述方法即可解决。

如图 3.10 (c) 所示的梁，如果仅承受竖向荷载作用，则不但 AC 梁能独立承受荷载维持平衡， DF 梁也能独立承受荷载维持平衡。这时， AC 梁和 DF 梁都可分别视为基本部分，其层叠图如图 3.10 (d) 所示。由层叠图可知，对该梁的计算应从附属部分 CD 梁开始，然后再计算 AC 梁与 DF 梁。

上述先附属部分后基本部分的计算原则，反映出结构几何组成分析和内力计算之间的内在联系。作为普遍规律，它也适用于由基本部分和附属部分组成的其他类型的结构。特别在多跨、多层和复杂情况下，从几何组成入手，找到受力分析的正确途径是非常必要的。

例 3.4 试作出图 3.11 (a) 所示多跨静定梁的内力图。

解 由层叠图 3.11 (b) 可知，*AB* 梁是基本部分，*BD*、*DF* 梁则依次分别为其右边部分的附属部分。计算内力时，应从最上层的附属部分开始，依次计算下来，最后才计算基本部分。即先算 *FD* 梁，再算 *DB* 梁，最后算 *BA* 梁，其计算顺序如图 3.11 (c) 所示。

由于梁上只受垂直荷载作用，由整体平衡条件 $\sum F_x = 0$ 得 *A* 端水平反力等于零，故全梁无轴力，各铰处的水平约束力也为零。

作 *M* 图时，先分别作出各单跨梁 *FD*、*DB*、*BA* 梁的 *M* 图，然后将各单跨梁 *M* 图拼合在同一水平基线上（拼合时，注意梁上无荷载区段 *M* 图为直线）。在铰 *D* 和铰 *B* 处弯矩为零且都不出现尖角，因而 *EC* 段、*CA* 段的 *M* 图均为无斜率变化的斜直线。最后的 *M* 图如图 3.11 (d) 所示。

F_Q 图可利用微分关系式 $F_Q = dM/dx$ ，由弯矩图的坡度（即斜率）求剪力的方法作。在图 3.11 (d) 中，*M* 图为一斜直线，剪力为常值，剪力图为一水平线，由此可知 *F_Q* 图由三段水平线 *FE*、*EC*、*CA* 组成，其值分别为

$$FE \text{ 段: } F_{QFE} = -\frac{F_P a}{a} = -F_P$$

$$EC \text{ 段: } F_{QEC} = \frac{F_P a}{2a} = \frac{F_P}{2}$$

$$CA \text{ 段: } F_{QCA} = -\frac{\frac{F_P a}{2}}{2a} = -\frac{F_P}{4}$$

最后，*F_Q* 图如图 3.11 (e) 所示。

例 3.5 试作出图 3.12 (a) 所示多跨静定梁的内力图。

解 本题的计算顺序应该是先算附属部分 *FG*，然后分别计算基本部分 *EF* 与 *GH*。

(1) 求支座反力和联结处的约束力。

求出 *FG* 附属梁上的两垂直反力 8 kN (↑)，并将其反向传于基本部分 *EF*、*GH* 两个伸臂梁上。这时基本部分 *EF*、*GH* 梁上，除了其本身承受的荷载外，还应包括铰 *F* 和铰 *G* 处的垂直约束力 8 kN (↓)，铰 *F* 和铰 *G* 处的水平约束力由 *GH* 梁的平衡条件可知其值为零，各梁段的受力如图 3.12 (b) 所示。

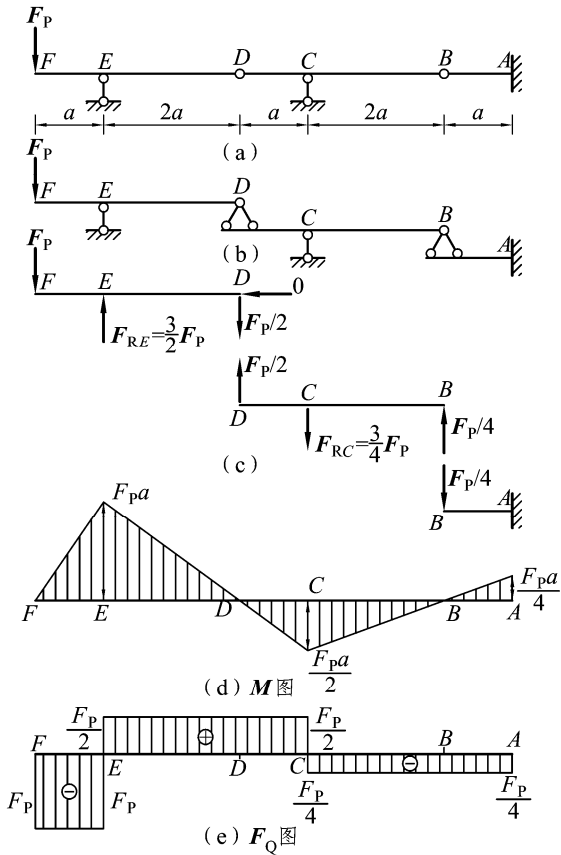


图 3.11

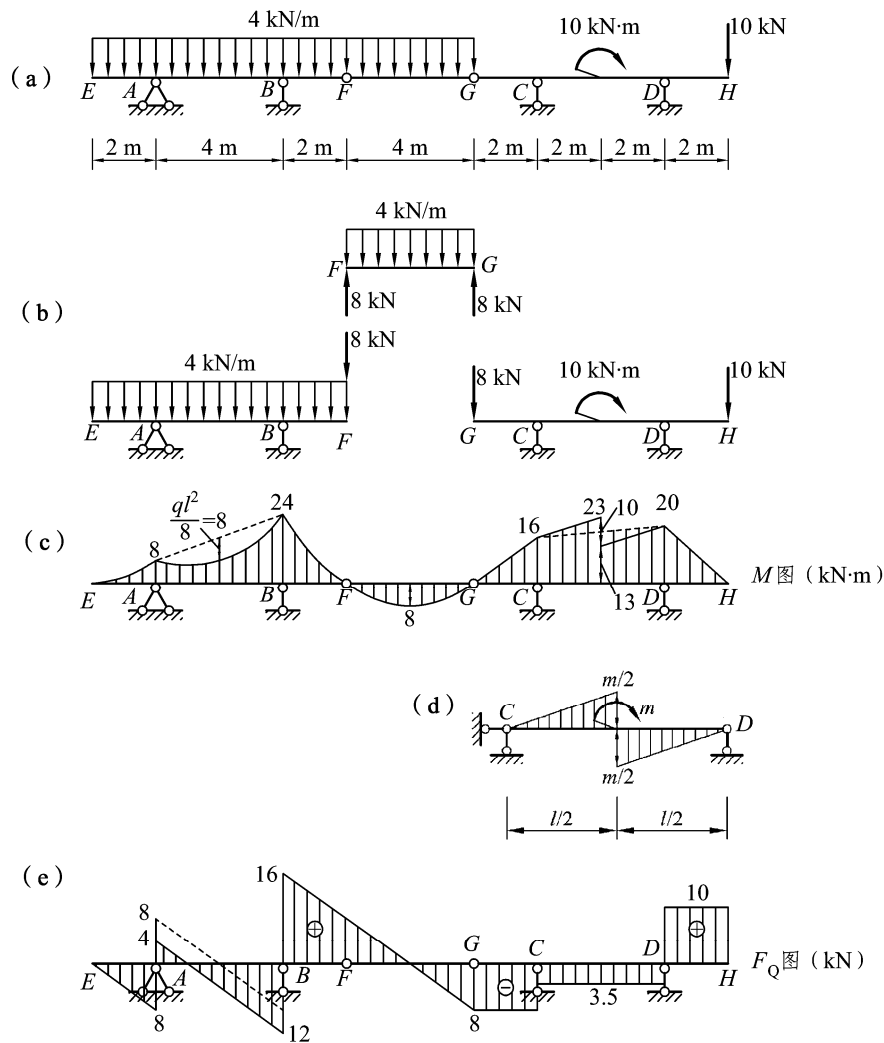


图 3.12

(2) 用上述叠加法作各梁段的 M 图。

① 附属梁 FG 受满布均布荷载作用, M 图为一抛物线, 如图 3.12 (c) 所示。

② 基本梁 EF , 先用截面法求出控制截面即支座 A 、 B 截面的弯矩:

$$M_A = -\frac{4 \times 2 \times 2}{2} = -8 \text{ (kN} \cdot \text{m)} \text{ (上侧受拉)}$$

$$M_B = -\frac{4 \times 2 \times 2}{2} - 8 \times 2 = -24 \text{ (kN} \cdot \text{m)} \text{ (上侧受拉)}$$

将 A 、 B 两截面弯矩纵标顶点连一虚线, 再以该虚线为基线叠加简支梁 AB 在满布均布荷载作用下的抛物线上去。两个伸臂部分即为受满布均布荷载作用的悬臂梁, 直接绘出其抛物线。
 EF 梁 M 图如图 3.12 (c) 所示。

③ 基本梁 GH ，先用截面法求出支座 C 、 D 截面的弯矩，即

$$M_C = -8 \times 2 = -16 \text{ (kN}\cdot\text{m)} \text{ (上侧受拉)}$$

$$M_D = -10 \times 2 = -20 \text{ (kN}\cdot\text{m)} \text{ (上侧受拉)}$$

将 C 、 D 两截面弯矩纵标顶点连一虚线，再以该虚线为基线叠加简支梁 CD 中部集中外力偶矩作用下的弯矩图[见图 3.12 (d)]上去；两个伸臂部分无荷载作用，直接连一直线， GH 梁 M 图如图 3.12 (c) 所示。

(3) 根据 $F_Q = dM/dx$ 的关系，由弯矩图的斜率作剪力图。

① EA 段。 M 图为二次抛物线，故相应的剪力图为斜直线。在 E 处， $F_Q = 0$ ；在 A 左侧处， $F_{QA}^L = -4 \times 2 = -8 \text{ kN}$ 。然后将 E 、 A 两截面剪力纵标顶点连一直线即得 EA 段剪力图。

② AB 段。因该段的弯矩图可看做是两个图形的叠加，因此该段剪力图也可由相应的两个 F_Q 图叠加而得。先作出简支梁均布荷载作用下的剪力图，即 AB 段弯矩图中抛物线的斜率，并以虚线表示[见图 3.12 (e) 中虚线所示]，左、右两端剪力值分别为 $\pm \frac{ql}{2} = \pm 8 \text{ kN}$ ；再以虚线为基线，在竖直方向叠加一个由杆端弯矩 M_A 、 M_B 作用下的剪力图，即 AB 段弯矩图中虚线的斜率，其值为 $-\frac{24-8}{4} = -4 \text{ kN}$ 。

由此可得 A 右侧截面、 B 左侧截面的剪力值分别为

$$F_{QA}^R = 8 - 4 = 4 \text{ (kN)}, \quad F_{QB}^L = -8 - 4 = -12 \text{ (kN)}$$

然后将其连成直线即得 AB 段剪力图。

③ BG 段。 M 图为二次抛物线，故相应的剪力图为斜直线。在 B 右侧处， $F_{QB}^R = 8 + 4 \times 2 = 16 \text{ kN}$ ；在 G 左侧处， $F_{QG} = -8 \text{ kN}$ 。然后将 B 、 G 两截面剪力纵标顶点连一直线即得 BG 段剪力图。 GC 段剪力为常值， $F_{QGC} = -8 \text{ kN}$ 。

④ CD 段。虽然该段的弯矩图在外力偶矩作用点处有突变，但该段除中点作用有外力偶矩外，没有其他荷载作用，所以该段剪力仍保持为常数，即

$$F_{QCD} = -\frac{23-16}{2} = -3.5 \text{ (kN)}$$

全梁的剪力图如图 3.12 (e) 所示。

第三节 静定平面刚架

刚架是由直杆组成的具有刚性结点的结构。当各杆轴线与荷载均在同一平面时，称为平面刚架。平面刚架的特点如下：

(1) 杆件少，内部空间大，便于利用。

(2) 刚结点处各杆不能发生相对转动，因而各杆件的夹角始终保持不变。

(3) 刚结点处可以承受和传递弯矩，因而在刚架中弯矩是主要内力。

(4) 刚架中的各杆通常情况下为直杆，制作加工较方便。

正是以上特点，刚架在工程中得到广泛的应用。静定平面刚架常见的形式有：悬臂刚架[见图 3.13 (a)]、简支刚架[见图 3.13 (b)]、三铰刚架[见图 3.13 (c)]、复合刚架[见图 3.13 (d)]等。

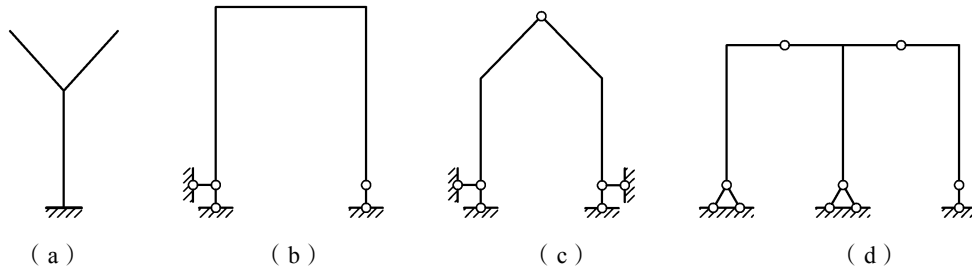


图 3.13

一、刚架的内力计算

刚架中的杆件多为梁式杆，杆截面中同时存在弯矩、剪力和轴力。计算的方法与梁完全相同，只需将刚架的每一根杆看做是梁，逐杆用截面法计算控制截面的内力，然后逐杆绘制内力图。

在刚架中，通常规定使刚架内侧受拉的弯矩为正（不便区分内外侧时，可假设任一侧受拉为正），弯矩图绘在杆件受拉边而不注正负号。其剪力和轴力正负号规定与梁相同，剪力图和轴力图可绘在杆件的任一侧，但必须注明正负号。

为了明确地表示刚架上不同截面的内力，尤其是为区分汇交于同一结点的各杆端截面的内力，使之不致混淆，我们在内力符号后面引用两个脚标：第一个表示内力所属截面；第二个表示该截面所属杆件的另一端。例如： M_{AB} 表示 AB 杆 A 端截面的弯矩， F_{QAC} 则表示 AC 杆 A 端截面的剪力，等等。

以下通过例题介绍具体计算方法：

图 3.14 (a) 为静定简支刚架，由横梁 CD 和立柱 AC 组成，其中结点 C 为刚结点。可以看出，由于刚结点的存在，使结构较易形成几何不变体系，并具有较大的内部空间，便于使用。

(1) 计算支座反力。此结构为一简支刚架，反力只有三个，考虑刚架的整体平衡，求各支座反力。

由 $\sum F_x = 0$ ，得

$$F_{Ax} = 15 \text{ kN} (\leftarrow)$$

由 $M_A = 0$ ，有

得 $15 \text{ kN} \times 2 \text{ m} - F_{Dy} \times 4 \text{ m} = 0$,
 $F_{Dy} = 7.5 \text{ kN} (\uparrow)$

由 $\sum F_y = 0$, 得

$$F_{Ay} = 7.5 \text{ kN} (\downarrow)$$

各支座反力如图 3.14 (b) 所示。

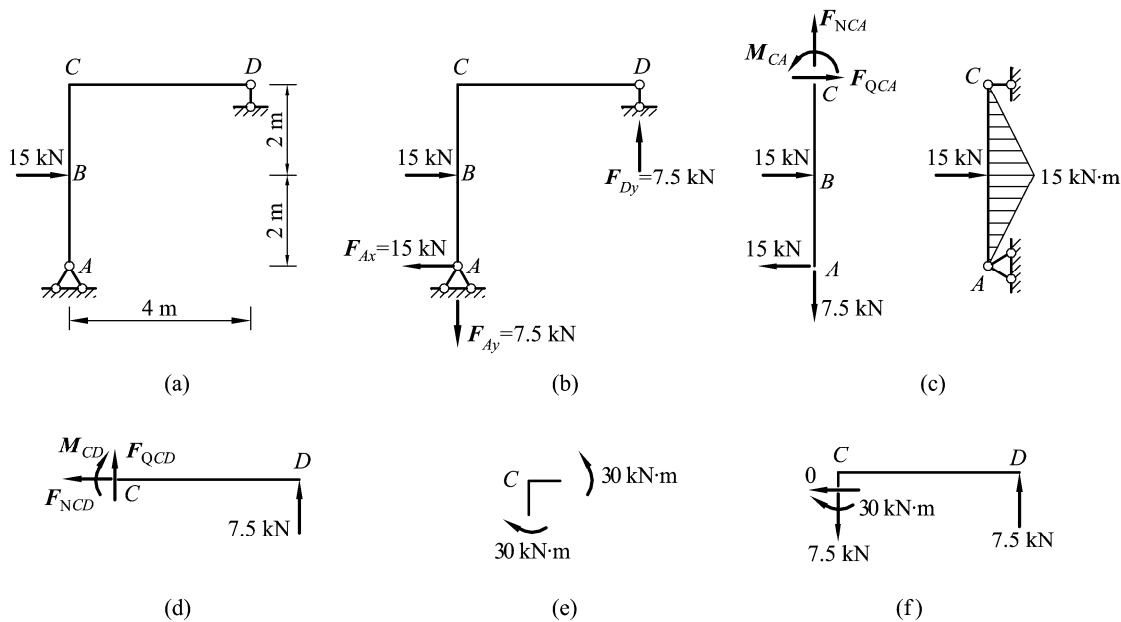


图 3.14

(2) 绘制弯矩图。首先逐杆分段计算控制截面的弯矩，然后再利用作图规律和叠加法作弯矩图。

该刚架可分为 AC 和 CD 两杆段，对每一个杆段用静力平衡方程求得杆端截面的弯矩值。然后根据各杆的荷载情况再分别绘图：对于无荷载杆段，只需定出两杆端（控制）截面的弯矩值，即可连成直线图形；对于承受荷载的杆段，则可利用相应简支梁的弯矩图进行叠加。

CD 杆段：该杆段上无荷载，弯矩图为直线。先求出该杆两端截面的弯矩值，再连成直线图形。 D 端铰处截面无外力偶作用，故

$$M_{DC} = 0$$

C 端截面的弯矩可用截面法取截面 C 右边部分为隔离体，如图 3.14 (d) 所示，由 $\sum M_C = 0$ ，算得

$$M_{CD} = 7.5 \times 4 = 30 \text{ (kN} \cdot \text{m)} \text{ (下侧受拉)}$$

将 CD 杆段两端截面的弯矩值定出并连成直线图形，如图 3.15 (a) 所示。

AC 杆段：该杆段中点作用一集中荷载，可用叠加法来绘其弯矩图。为此，先求出该杆两端截面的弯矩， A 端铰处截面无外力偶作用，故

$$M_{AC} = 0$$

C 端截面的弯矩可用截面法取截面 C 下边部分为隔离体，如图 3.14 (c) 所示，由 $\sum M_C = 0$ ，有

$$15 \times 4 - 15 \times 2 - M_{CA} = 0$$

算得 $M_{CA} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (右侧受拉)

将两端截面的弯矩值定出并连以虚线，再以此虚线为基线，叠加如图 3.14 (c) 所示相应简支梁中点集中荷载作用的弯矩图。在跨中 B 截面的弯矩值为

$$M_B = \frac{1}{2} M_{CA} + \frac{F_P l}{4} = \frac{1}{2} \times 30 + \frac{15 \times 4}{4} = 30 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$$

整个刚架的弯矩图如图 3.15 (a) 所示。

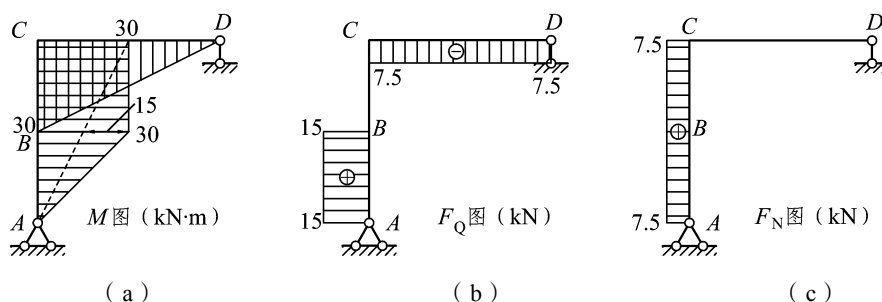


图 3.15

此外，注意到在刚结点 C 处，根据刚结点 C 的力矩平衡条件 $M_{CA} = M_{CD} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。于是，计算上述杆端弯矩 M_{CA} 值时，可以截取刚结点作为隔离体，如图 3.14 (e) 所示，当已知 M_{CD} 后由刚结点 C 的力矩平衡条件，即可求得 M_{CA} 。由此得出如下结论：在两杆相交的刚结点上无外力偶作用时，两杆杆端弯矩等值、同侧受拉，即这两杆的杆端弯矩大小相等、方向相反，弯矩图同侧。

(3) 绘制剪力图和轴力图。作剪力图时同样逐杆考虑。根据荷载和已求出的反力，利用截面法和反力不难求得各控制截面的剪力。

本例中 CD 杆段为无荷载区段，故剪力为一常数，只需求出该区段中任一截面的剪力值便可作出剪力图。由图 3.14 (d) 所示的隔离体，可求得

$$F_{QDC} = F_{QCD} = -7.5 \text{ kN}$$

CA 杆有荷载作用，故分为 CB、BA 两个区段，该两区段中任一截面的剪力值由图 3.14 (c) 所示的隔离体，可分别求得

$$F_{QCB} = 15 - 15 = 0, F_{QAC} = 15 \text{ kN}$$

绘出轴力图如图 3.15 (b) 所示。

用同样方法可绘出轴力图。本例中两杆的轴力都为常数，由图 3.14 (c)、(d) 所示的隔

离体，可分别求得

$$F_{NCD} = 0, \quad F_{NCA} = 7.5 \text{ kN}$$

绘出剪力图如图 3.15 (c) 所示。

(4) 校核。内力图作出后应进行校核。对于弯矩图，通常是检查刚结点处是否满足力矩平衡条件。

校核剪力图和轴力图的正确性，可取刚架的任何部分为隔离体检查 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 的平衡条件是否得到满足。例如：可截取如图 3.14 (f) 所示隔离体，由

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & 0 &= 0 \\ \sum F_y &= 0, & -7.5 \text{ kN} + 7.5 \text{ kN} &= 0 \\ \sum M_C &= 0, & 7.5 \text{ kN} \times 4 \text{ m} - 30 \text{ kN} \cdot \text{m} &= 0 \end{aligned}$$

可知所得剪力图和轴力图无误。

二、各类平面刚架弯矩图绘制示例

绘制弯矩图时，上述四类刚架将有各自的特点，以下将分别概述及示例。

1. 悬臂刚架

悬臂刚架是静定平面刚架的基本形式之一，绘制悬臂刚架弯矩图时，可以不求反力，而由自由端开始逐杆绘制。

例 3.6 试作出图 3.16 (a) 所示悬臂刚架弯矩图。

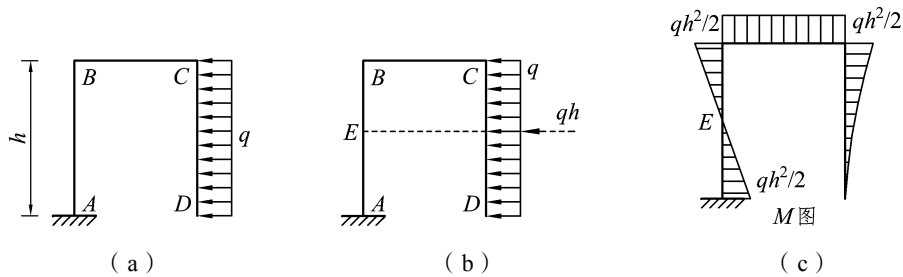


图 3.16

解 该悬臂刚架，可不求支座反力，根据荷载直接画弯矩图。

(1) 对于 CD 杆件，弯矩图与悬臂梁类似， D 为自由端，弯矩为零；根据悬臂梁在均布荷载作用下的弯矩，可知 $M_{CD} = qh^2/2$ (右侧受拉)，由此作出抛物线，如图 3.16 (c) 所示。

(2) 对于 BC 杆件，根据刚结点 C 的力矩平衡条件，可知 $M_{CB} = M_{CD} = qh^2/2$ (外侧受拉)；同时该段剪力为零，因此弯矩为常数，其值等于 $qh^2/2$ (外侧受拉)，弯矩图为与杆轴线平行的直线。

(3) 对于 AB 杆件，根据刚结点 B 的力矩平衡条件，可知 $M_{BA} = M_{BC} = qh^2/2$ (外侧受拉)；

荷载合力的作用线通过 E 点, 如图 3.16 (b) 所示, E 点弯矩为零。而 AB 杆件上无外力作用, 弯矩图为一常数, 因此可求出 $M_{AB} = qh^2/2$ (右侧受拉), 将 M_{BA} 与 M_{AB} 两纵距直线相连, 即得最后的弯矩图, 如图 3.16 (c) 所示。

综上所述, 绘制悬臂刚架弯矩图时要注意判断杆件有无剪力, 若剪力为零, 弯矩为常数 (BC 段), 剪力为常数, 弯矩图一斜直线 (BA 段); 另外, 在集中力的延长线所对应的截面 (E 截面), 弯矩为零。

2. 简支型刚架

简支刚架是静定平面刚架的基本形式之一, 绘制简支型刚架弯矩图时, 往往只需求出一个作用于杆件垂直方向的反力, 然后由支座端开始逐杆绘制。

例 3.7 试作图 3.17 (a) 所示简支型刚架弯矩图。

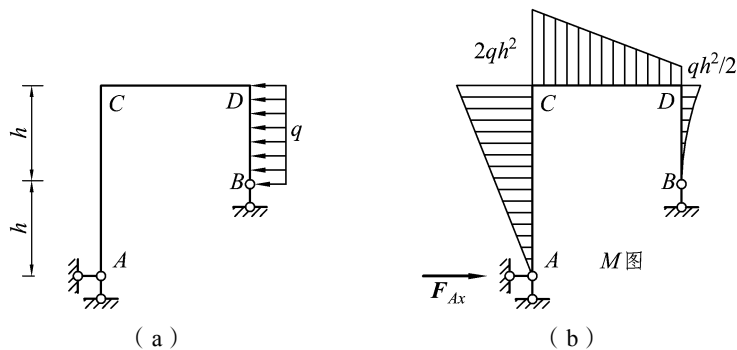


图 3.17

解 先分析刚架中各杆件的受力。显然 DB 杆件的弯矩只与外荷载有关, 而与 B 处的支座反力无关; AC 杆件的弯矩与 A 点的水平支座反力 F_{Ax} 有关, 与竖向支座反力无关; CD 杆件没有荷载, 根据刚结点的特点, 只要知道 M_{CA} 和 M_{DB} , 即可直接画出 CD 段的弯矩图。

(1) 在所有支座反力中, 只有 A 点的水平支座反力 F_{Ax} 需要求出。由 $\sum F_x = 0$, 求得

$$F_{Ax} = qh(\rightarrow)$$

(2) 求各杆端截面的弯矩。

AC 杆件: C 端弯矩, $M_{CA} = 2qh^2$ (外侧受拉); A 端弯矩, $M_{AC} = 0$ 。

DB 杆件: D 端弯矩, $M_{DB} = qh^2/2$ (外侧受拉); B 端弯矩, $M_{BD} = 0$ 。

CD 杆件: 根据刚结点的力矩平衡条件, 可得 $M_{CA} = M_{CD}$, $M_{DB} = M_{DC}$ 。

(3) 将各杆端弯矩连以直线、曲线, 作出最后的弯矩图, 如图 3.17 (b) 所示。

在作静定刚架的内力图时, 通常不一定需要画出所有杆件和结点的隔离体图, 有时也可以直接利用力学基本概念快捷地进行。例如: 在绘制该刚架的弯矩图时, 根据 A 支座竖向反力不会使 AC 杆产生弯矩的特征, AC 杆的弯矩图形可一目了然; A 支座的水平反力易求得, 乘以杆长即得杆端弯矩 M_{CA} , 并有 $M_{CA} = M_{CD}$; 同样, B 支座反力不会使 DB 杆产生弯矩, 只有均布荷载产生弯矩, D 端弯矩为 $M_{DB} = qh^2/2$, 根据 D 结点的力矩平衡的条件可求得杆端

弯矩 M_{DC} ，然后将各杆端弯矩连以直线、曲线，则得到刚架的最终弯矩图。

3. 三铰刚架

三铰刚架是静定平面刚架的基本形式之一，其支座反力数为四个，支座反力的求法主要是充分利用平衡条件来进行计算，分析时经常采用先整体后拆开的方法。整体有三个平衡方程，为了求解四个反力，还需增补一个方程，为此将结构拆开考虑，取结构的一半作为研究对象，利用铰结点的弯矩为零，就可以全部求解。支座反力求得以后，其弯矩图的绘制与以前所述的方法完全相同。

例 3.8 作图 3.18 (a) 所示三铰型刚架弯矩图。

解 图中刚架在 B 点处是以滑动支座与大地相连接的，属于三铰刚架中特殊的情况。其计算方法与三铰刚架相同。

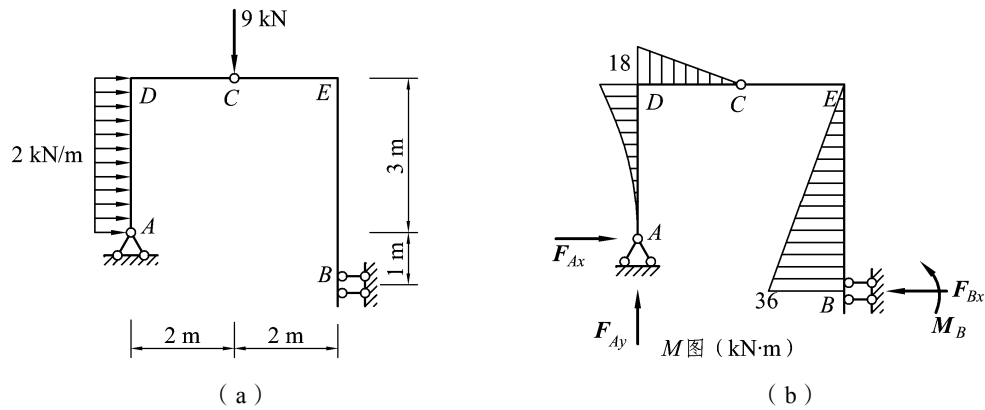


图 3.18

(1) 计算支座反力。由整体结构的平衡方程 $\sum F_y = 0$ ，求得

$$F_{Ay} = 9 \text{ kN} (\uparrow)$$

将三铰刚架拆开，取结构的左半部分为隔离体，由 $\sum M_C = 0$ ，求得

$$F_{Ax} = 3 \text{ kN} (\rightarrow)$$

再由整体结构的平衡方程 $\sum F_x = 0$ ，求得

$$F_{Bx} = 9 \text{ kN} (\leftarrow)$$

由整体结构的平衡方程 $\sum M_A = 0$ ，求得

$$M_B = 36 \text{ kN} \cdot \text{m} (\curvearrowright)$$

(2) 支座反力求得以后， M 图的绘制与以前所述的方法完全相同。由此可画出结构的 M 图，如图 3.18 (b) 所示。注意到 CE 段剪力为零，弯矩应为常数，而铰 C 处弯矩应为零，因此 CE 段的弯矩都应为零。

4. 复合刚架

由基本部分与附属部分组成的刚架为复合刚架。复合刚架的计算原则与多跨静定梁完全相同，即先算附属部分，后算基本部分。

例 3.9 作图 3.19 (a) 所示复合刚架的弯矩图。

解 对于复合刚架，首先要分清其基本部分和附属部分。观察图示刚架，右边为三铰刚架，属于基本部分，左边 AD 为附属部分。计算从附属部分开始。

(1) 取 AD 部分为隔离体，如图 3.19 (b) 所示。

由 $\sum M_D = 0$ ，得 $F_{Ay} = 1 \text{ kN}(\uparrow)$ ；

由 $\sum F_x = 0$ ，得 $F_{Dx} = 1 \text{ kN}(\leftarrow)$ ；

由 $\sum F_y = 0$ ，得 $F_{Dy} = 1 \text{ kN}(\downarrow)$ 。

F_{Dx} 、 F_{Dy} 求出以后，将其反向传于右边的三铰刚架上，如图 3.19 (b) 所示。

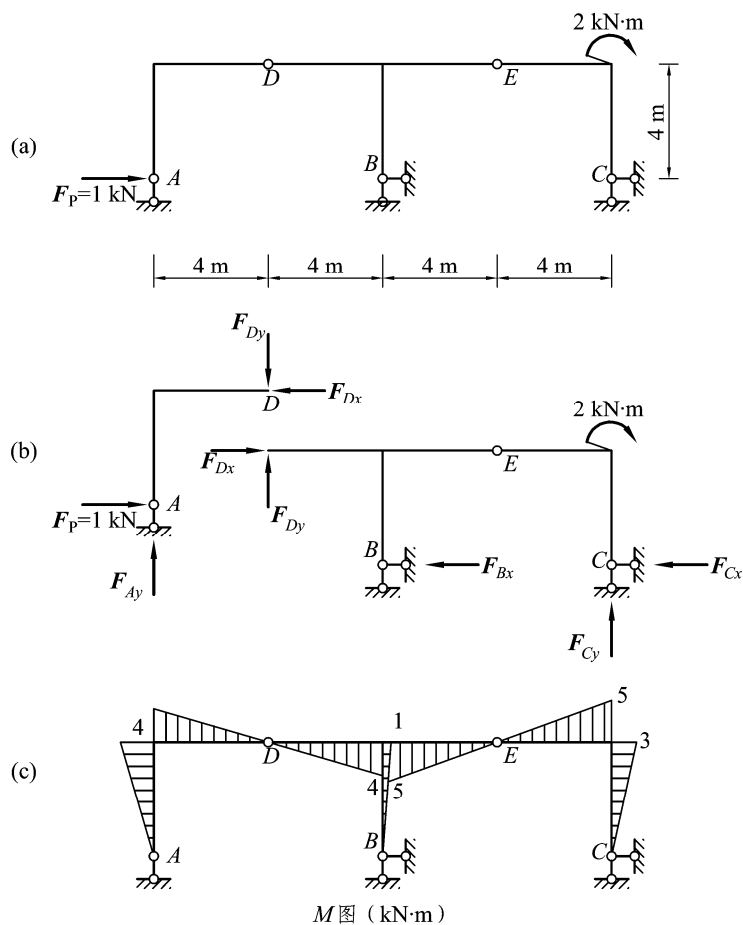


图 3.19

(2) 取右边三铰刚架部分为研究对象，由三铰刚架整体的平衡方程 $\sum M_B = 0$ ，得

$$F_{Cy} = 1.25 \text{ kN}(\uparrow)$$

再将三铰刚架拆开，取结构的右半部分 EC 为隔离体，由 $\sum M_E = 0$ ，得

$$F_{Cx} = 0.75 \text{ kN}(\leftarrow)$$

由三铰刚架整体的平衡方程 $\sum F_x = 0$ ，得

$$F_{Bx} = 0.25 \text{ kN}(\leftarrow)$$

支座反力求出后，用截面法计算各杆端弯矩，作出刚架的弯矩图，如图 3.19 (c) 所示。

三、内力图的形状特征小结

由弯矩、剪力与荷载的微分关系可知，内力图的形状特征主要有以下几点：

(1) 无荷载区段， M 为直线，如图 3.20 所示。

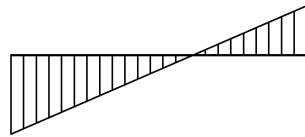


图 3.20

(2) 受均布荷载 q 作用时， M 为抛物线，且凸向与 q 方向一致，如图 3.21 所示。

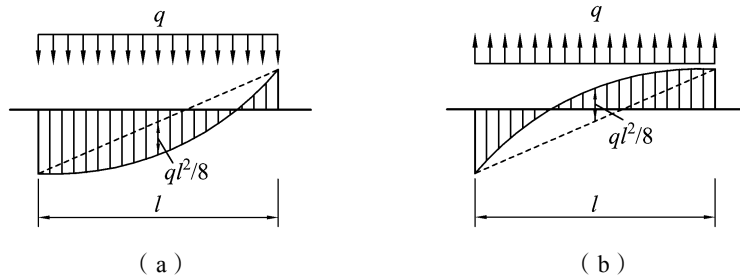


图 3.21

(3) 在横向集中力 F_P 作用点处，弯矩图有尖角，尖角方向与 F_P 方向相同，如图 3.22 所示。在 F_P 作用点处剪力图有突变（在该点的左、右截面有增量），突变值为 F_P 。

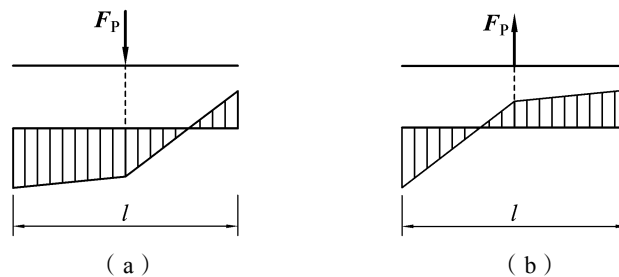


图 3.22

(4) 集中力偶 m 作用点处，弯矩图有突变（在该点的左、右截面有增量），突变值为 m ，且左右两直线相互平行，没有斜率的变化，故剪力图无变化，其弯矩图如图 3.23 所示。

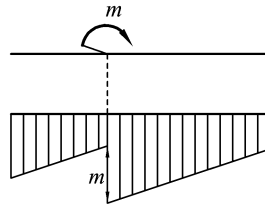


图 3.23

(5) 在自由端、铰结点、铰支座处的截面上无集中力偶作用时，该截面弯矩等于零，如图 3.24 所示。

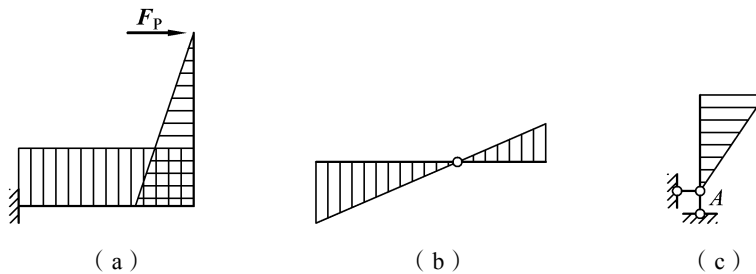


图 3.24

(6) 集中力 F_P 与某杆轴线重合时，弯矩为零，如图 3.25 所示。

(7) 剪力 F_Q 为常值时， M 图为斜线；剪力 F_Q 为零时， M 为常值， M 图为与杆轴线平行的直线。图 3.26 所示刚架， AB 段剪力 F_Q 为常值时， M 图为斜线； BC 段剪力 F_Q 为零时， M 图为没有斜率变化的常直线。

(8) 当由平衡力系组成的荷载作用在静定结构的某一本身为几何不变的部分上时，则只有此部分受力，其余部分的反力内力皆为零。图 3.27 所示结构，平衡力系作用在几何不变部分 $BCDE$ 上则只有该局部有内力，其余部分内力必为零。

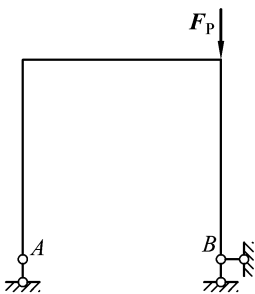


图 3.25

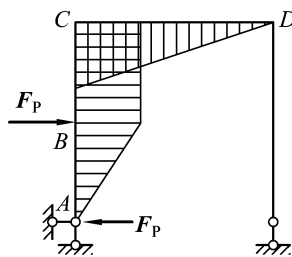


图 3.26

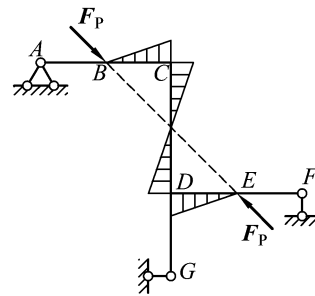


图 3.27

第四节 三铰拱

拱式结构在房屋建筑、地下建筑、桥梁及水工建筑中都常采用。从几何构造上讲，拱式结构可以分为无多余约束的三铰拱[见图 3.28 (a)、(b)]和有多余约束的两铰拱和无铰拱[见图 3.28 (c)、(d)]。前者属于静定结构，而后者则属于超静定结构。

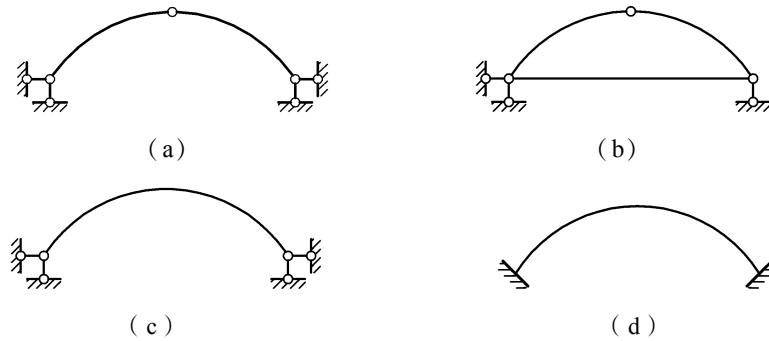


图 3.28

拱式结构的基本特点是：杆轴为曲线，而且在竖向荷载作用下支座将产生水平反力。这种水平反力又称为推力。拱结构与梁结构的区别不仅在于外形不同，更重要的还在于受竖向荷载作用时是否产生水平推力。如图 3.29 所示的两个结构，虽然它们的杆轴都是曲线，但图 3.29 (a) 所示结构在竖向荷载作用下不产生水平推力，其弯矩与相应（同跨度、同荷载）简支梁的弯矩相同，所以这种结构不是拱结构而是曲梁；图 3.29 (b) 所示结构，由于其两端都有水平支座链杆，在竖向荷载作用下将产生水平推力，所以属于拱式结构。由于水平推力的存在，拱中各截面的弯矩将比相应的曲梁或简支梁的弯矩要小，并且会使整个拱体主要承受压力。因此，拱式结构可用抗压强度较高而抗拉强度较低的砖、石、混凝土等建筑材料来建造。

从建筑学的角度，拱式结构有利于营造曲线美，并能提供较大的净空使用高度。拱式结构的缺点是需要支座提供较大的水平向推力。当支座处地基的水平抗力较弱时，只能采用带有水平拉杆的拉杆拱[见图 3.28 (b)]，此时支座水平推力将由拉杆提供，拱体的受力情况仍与一般三铰拱相同，但拉杆的设置可能影响净空使用高度。工程中也有采用连续拱的形式，使中间支座两边的水平推力相互抵消。因拱的外形较复杂、跨度常较大，施工要相对困难一些。

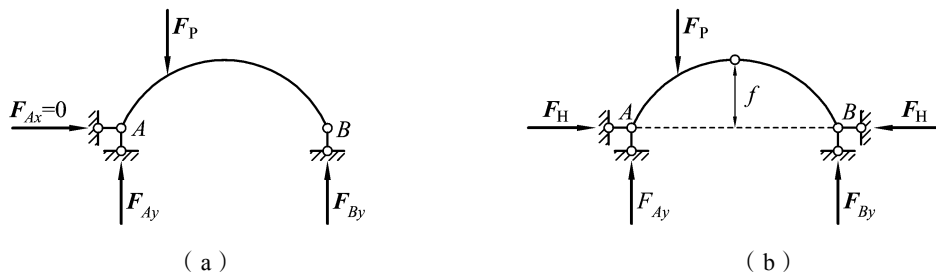


图 3.29

拱体各横截面形心的连线称为拱轴线。拱的两端与支座联结处称为拱趾，拱趾位于同一标高的拱称为平拱，位于不同标高的拱称为斜拱。拱轴的最高点称为拱顶，三铰拱的中间铰一般设在拱顶处。两拱趾的水平距离 l 称为跨度，由拱顶至两拱趾连线的竖向距离 f 称为拱高或矢高。拱高与跨度之比 f/l 称为拱的高跨比（矢跨比），它对拱的内力有重要影响。在实际工程中，拱的高跨比通常在 $1 \sim 1/10$ 。

一、三铰拱的计算

现以土建结构中最为常见的承受竖向荷载作用且两拱趾位于同一水平线上的三铰拱[见图 3.30(a)]为例，介绍三铰拱的受力分析方法和受力特性，并与相应的简支梁[见图 3.30(b)]加以比较。

1. 支座反力的计算公式

首先，分析三铰拱的支座反力。三铰拱共有四个支座反力，可以利用三个整体平衡方程，再加上顶铰处弯矩为零的条件，即取左（或右）半拱为隔离体，根据中间铰处力矩平衡方程，建立一个补充方程，从而求出所有的反力。

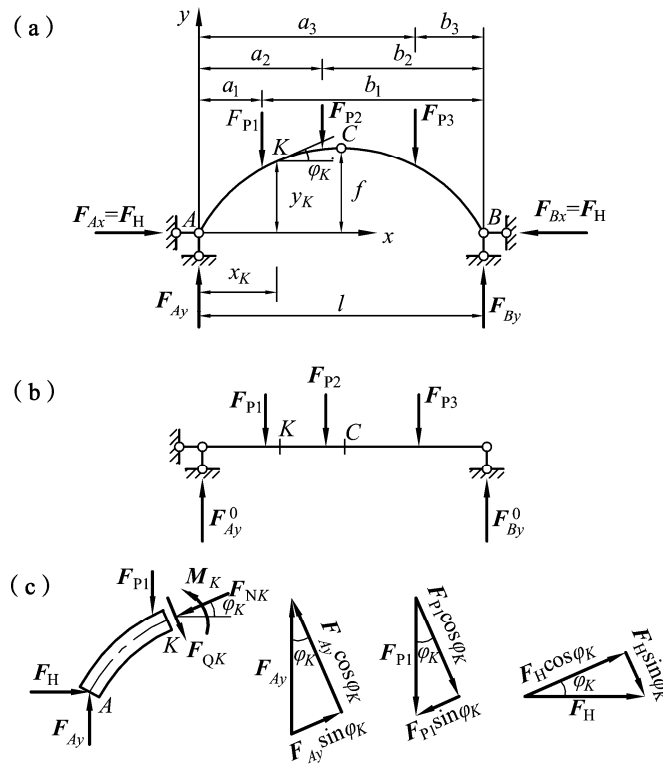


图 3.30

当仅有竖向荷载作用时，由整体平衡条件 $\sum F_x = 0$ ，可得

$$F_{Ax} = F_{Bx} = F_H$$

F_H 表示支座水平推力的数值。若两拱趾位于同一水平线上，支座水平推力沿支座连线作用。于是，利用整体平衡方程 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum M_A = 0$ 即可直接解得两支座的竖向反力 F_{Ay} 和 F_{By} 。可见，此时三铰拱支座竖向反力的计算与相应简支梁支座反力 F_{Ay}^0 和 F_{By}^0 的计算完全相同，即

$$F_{Ay} = F_{Ay}^0 \quad (3-4)$$

$$F_{By} = F_{By}^0 \quad (3-5)$$

现记图 3.30 (b) 简支梁相应三铰拱顶铰位置的 C 截面弯矩为 M_C^0 ，代表了 C 点一侧支座反力和竖向荷载对 C 点力矩的代数和。由于图 3.30 (a) 的三铰拱与上述简支梁的荷载和竖向反力均相同，所以当取拱顶铰 C 一侧，即取左（或右）半拱为隔离体时，由 $\sum M_C = 0$ 可得

$$M_C^0 - F_H f = 0$$

于是有

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} \quad (3-6)$$

这就是三铰平拱在竖向荷载作用下支座水平推力的计算公式。

由以上的分析可知：

(1) 在给定的荷载作用下，三铰拱的支座反力仅与三个铰的位置有关，而与拱轴的形状无关。

(2) 在竖向荷载的作用下，三铰平拱的支座竖向反力与相应简支梁反力相同，而水平推力 F_H 与拱高（矢高） f 成反比。 f 越大即拱越陡时 F_H 越小；反之， f 越小即拱越平坦时 F_H 越大。若 $f = 0$ ，则 $F_H = \infty$ ，此时三个铰在一直线上，属于瞬变体系。

2. 内力的计算公式

计算内力时，应注意到拱轴为曲线这一特点，所取截面应与拱轴正交，即与拱轴的切线相垂直，见图 3.30 (c)。任一截面 K 的位置取决于该截面形心的坐标 (x_K, y_K) 以及该处拱轴切线的倾角 φ_K 。

弯矩是以使拱体的内侧受拉为正，反之为负。取 AK 段为隔离体[见图 3.30 (c)]，由 $\sum M_K = 0$ ，有

$$F_{Ay} x_K - F_{Pl}(x_K - a_1) - F_H y_K - M_K = 0$$

得截面 K 的弯矩：

$$M_K = [F_{Ay} x_K - F_{Pl}(x_K - a_1)] - F_H y_K$$

根据 $F_{Ay} = F_{Ay}^0$ ，可见式中方括号内之值等于相应简支梁[见图 3.30 (b)]截面 K 的弯矩

M_K^0 ，所以上式可改写为

$$M_K = M_K^0 - F_H y_K \quad (3-7)$$

即拱内任一截面的弯矩，等于相应简支梁对应截面的弯矩减去由于拱的水平推力 F_H 所引起的弯矩 $F_H y_K$ 。由此可知，因推力的存在，三铰拱中的弯矩比相应简支梁的弯矩小得多。

在计算 K 截面的剪力 F_{QK} 和轴力 F_{NK} 时，取 AK 段为隔离体[见图 3.30(c)]，可将 A 支座反力和作用于隔离体上的外荷载沿 K 点拱轴线的切线和法线方向进行分解[见图 3.30(c)]，再分别由这两个方向上力的平衡条件求得截面上的剪力和轴力：

$$\begin{aligned} F_{QK} + F_{P1} \cos \varphi_K + F_H \sin \varphi_K - F_{Ay} \cos \varphi_K &= 0 \\ F_{NK} + F_{P1} \sin \varphi_K - F_{Ay} \sin \varphi_K - F_H \cos \varphi_K &= 0 \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} F_{QK} &= (F_{Ay} - F_{P1}) \cos \varphi_K - F_H \sin \varphi_K \\ F_{NK} &= (F_{Ay} - F_{P1}) \sin \varphi_K + F_H \cos \varphi_K \end{aligned}$$

式中 $(F_{Ay} - F_{P1})$ 等于相应简支梁在截面 K 处的剪力 F_{QK}^0 ，于是上式可改写为

$$F_{QK} = F_{QK}^0 \cos \varphi_K - F_H \sin \varphi_K \quad (3-8)$$

$$F_{NK} = F_{QK}^0 \sin \varphi_K + F_H \cos \varphi_K \quad (3-9)$$

由式(3-7)、(3-8)、(3-9)可知，三铰拱的内力不但与荷载及三个铰的位置有关，而且与各铰间拱轴线的形状有关。

有了上述公式，则不难求得竖向荷载作用下任一截面的内力，从而作出三铰拱的内力图。若荷载不是竖向作用或三铰拱为斜拱，则式(3-5)~式(3-10)并不适用，此时应根据平衡条件直接计算三铰拱的反力和内力。

3. 三铰拱的合理拱轴线

对于三铰拱来说，在一般情况下截面上因有弯矩、剪力和轴力作用而处于偏心受压状态，其正应力分布不均匀。但是，若在给定荷载作用下，可以选取一根适当的拱轴线，使拱上各截面只承受轴力，而弯矩为零（剪力也为零）。这时，任一截面上的正应力分布将是均匀的，因而拱体材料能够得到充分地利用，这样的拱轴线称为**合理拱轴线**。

拱内任一截面的弯矩计算式(3-7)表明，当拱的跨度和荷载为已知时， M_K^0 虽不随拱轴线改变而变化，而 $-F_H y_K$ 则与拱的轴线有关（注意：前已指出推力 F_H 的数值与三个铰的位置有关，而与各铰间的轴线形状无关）。因此，可以在三个铰之间恰当地选择拱的轴线形式 $y = y(x)$ ，使拱中各截面的弯矩 M 都为零。为了求出合理轴线方程，由式(3-7)根据各截面弯矩都为零的条件应有

$$M = M^0 - F_H y = 0$$

由此得

$$y = \frac{M^0}{F_H} \quad (3-10)$$

上式表明，在竖向荷载作用下，三铰拱合理拱轴线的纵坐标 y 与相应简支梁弯矩图的竖标成正比。当荷载已知时，只需求出相应简支梁的弯矩方程，然后除以常数 F_H ，便得到合理拱轴线方程。

例 3.10 试求图 3.31 (a) 所示对称三铰拱在图示满跨竖向均布荷载作用下的合理拱轴线。

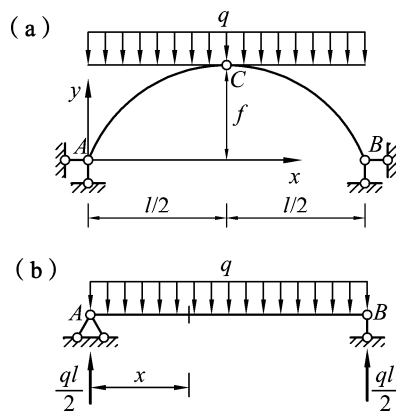


图 3.31

解 作出图 3.31 (b) 所示相应简支梁的弯矩方程：

$$M^0 = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{1}{2}qx(l-x)$$

由式 (3-6) 求得水平推力为

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{ql^2}{8f}$$

由式 (3-10) 得到合理拱轴线方程为

$$y = \frac{M^0}{F_H} = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

由此可见，在满跨竖向均布荷载作用下，三铰拱的合理拱轴线是抛物线。对于非竖向荷载作用，式 (3-10) 不再适用，可由平衡条件直接解算合理轴线。工程中常以主要荷载作用下的合理轴线作为拱轴线，在其他荷载作用下仍会有弯矩产生。

如图 3.32 所示，对称三铰拱在拱上填料重量作用下的合理拱轴线为列格氏悬链线。

图 3.33 所示三铰拱在垂直于拱轴线的均布荷载（例如水压力）作用下的合理拱轴线为圆弧线。拱上各截面的轴力 F_N 为常数，其值为荷载 q 乘以半径 R 。

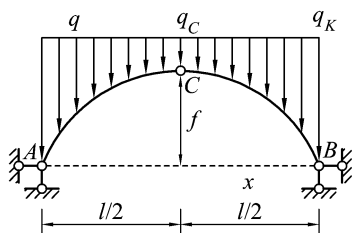


图 3.32

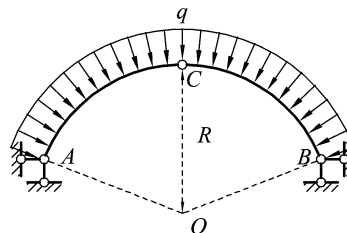


图 3.33

第五节 静定平面桁架

静定平面桁架是由若干直杆构成，且所有杆件的两端均用铰连接组成的静定结构。对实际桁架进行分析计算时，常需要简化成理想桁架，即对桁架的计算简图引入下列假定：

- (1) 所有结点都是无摩擦的理想铰。
- (2) 各杆的轴线都是直线，并通过铰的几何中心。
- (3) 荷载和支座反力都作用在结点上，并且在桁架的同一平面内。

理想桁架的各杆件只承受轴向力，因此，这类杆件也称为二力杆。在轴向受拉或受压的杆件中，由于轴力沿杆长不变，而截面上的应力均匀分布且同时达到极限值，故材料能得到充分的利用。

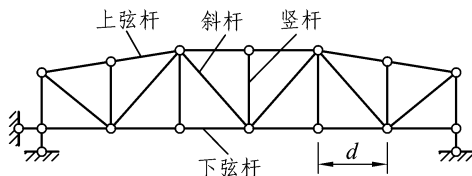
实际的桁架通常不能完全符合上述理想情况。例如：桁架的结点具有一定的刚性，各杆之间的夹角几乎不可能变动；另外，各杆轴无法绝对平直，结点上各杆的轴线也不一定全交于一点，荷载并非都作用在结点上等。因此，在荷载作用下，桁架中某些杆件必将发生弯曲而产生弯矩和剪力，并不能如理想情况只产生轴力。通常把按桁架理想情况计算出来的内力称为主内力，由于理想情况不能完全实现而产生的附加内力称为次内力（对应的应力称为次应力）。一般次内力较小，影响可忽略不计，本节只限于讨论桁架理想情况下的主内力。

按几何构造方面的特点，常见的桁架一般可分为以下三类：

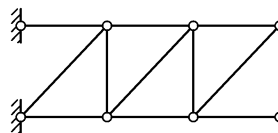
简单桁架：由基础或一个基本铰接三角形开始，逐次增加二元体所组成的桁架，见图 3.34 (a)、(b)。

联合桁架：由几个简单桁架，按两刚片规则或三刚片规则所组成的桁架，见图 3.34 (c)。

复杂桁架：不属于前两种的桁架，见图 3.34 (d)。



(a)



(b)

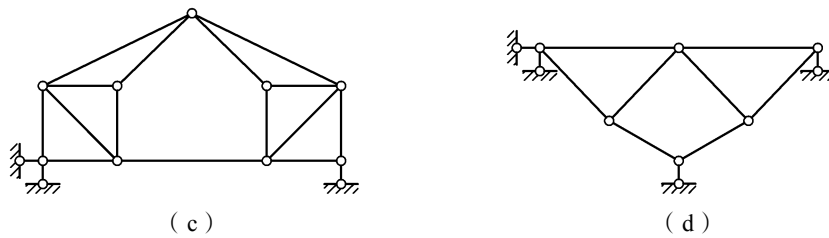


图 3.34

桁架的杆件，依其所在位置不同而分为弦杆与腹杆两类。弦杆有上弦杆和下弦杆之分，腹杆又分为竖杆和斜杆，见图 3.34 (a)。弦杆上相邻两结点间的区间称为节间，其间距 d 称为节间长度。

解算桁架内力计算的方法有：结点法、截面法、联合法。

一、结点法

所谓结点法，就是取桁架的结点为隔离体，利用结点的静力平衡条件来计算杆件内力的方法。因为桁架的各杆只承受轴力，作用于任一结点的各力组成一个平面汇交力系，所以可就每一个结点列出两个平衡方程 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 来计算各杆内力。

在实际计算中，为了简便起见，取结点计算时，应力求作用于该结点的未知力不超过两个。在简单桁架中，实现这一点并不困难，因为简单桁架是从基础或一个基本铰接三角形开始，依增加二元体所组成，其最后一个结点只包含两根杆件。分析这类桁架时，可先由整体平衡条件求出反力，然后再从最后一个结点开始，按照几何组成的相反方向，依次考虑各结点的平衡，可在每个结点出现的未知内力不超过两个的情况下，直接求出各杆的内力。

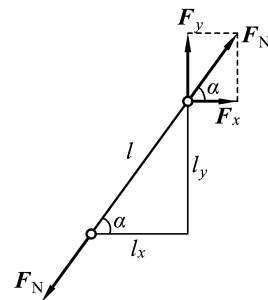


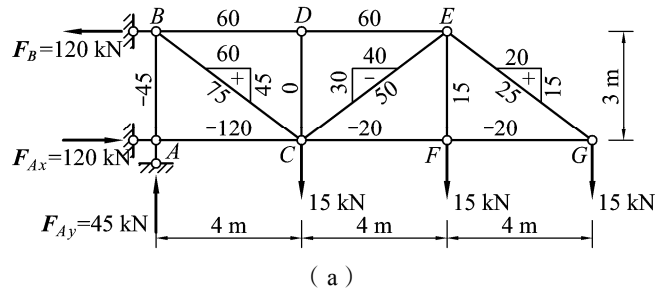
图 3.35

在建立结点平衡方程式时，经常需要把斜杆的轴力 F_N 分解为水平分力 F_x 和竖直分力 F_y ，此三个力与杆长 l 及其水平投影 l_x 和竖向投影 l_y 存在以下比例关系（见图 3.35）：

$$\frac{F_N}{l} = \frac{F_x}{l_x} = \frac{F_y}{l_y} \quad (3-11)$$

由此，在 F_N 、 F_x 和 F_y 三者中，任知其中一个便可推算出其余两个，而无需应用三角函数计算。

例 3.11 试用结点法求图 3.36 (a) 所示桁架的各杆内力。



(a)

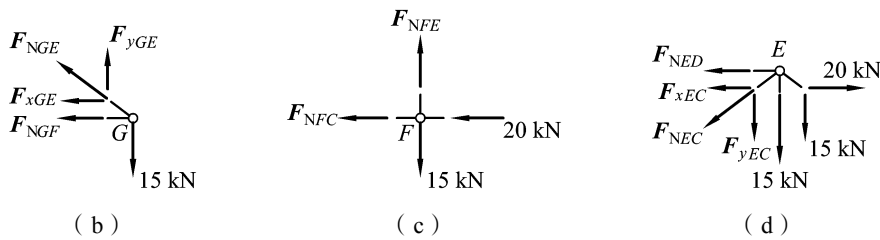


图 3.36

解 (1) 求支座反力。以桁架的整体为隔离体, 由 $\sum M_A = 0$, 得

$$15 \times 4 + 15 \times 8 + 15 \times 12 - F_B \times 3 = 0$$

$$F_B = 120 \text{ kN}(\leftarrow)$$

由 $\sum F_y = 0$, 得

$$F_{Ay} = 45 \text{ kN}(\uparrow)$$

由 $\sum F_x = 0$, 得

$$F_{Ax} = 120 \text{ kN}(\rightarrow)$$

(2) 计算各杆内力。反力求出后, 可截取结点计算各杆的内力。最初寻找只包含两个未知力的结点, 然后依次进行。现从结点 G 开始, 其隔离体图如图 3.36 (b) 所示。计算时, 通常假定杆件的未知内力为拉力, 若所得结果为负, 则表明为压力。为了计算方便, 将斜杆内力 F_{NGE} 的水平 and 竖向分力 F_{xGE} 和 F_{yGE} 作为未知力考虑。由 $\sum F_y = 0$ 可得

$$F_{yGE} = 15 \text{ kN}$$

并可由比例关系式 (3-11) 求得

$$F_{xGE} = 15 \times \frac{4}{3} = 20 \text{ (kN)}, \quad F_{NGE} = 15 \times \frac{5}{3} = 25 \text{ (kN) (拉力)}$$

再由 $\sum F_x = 0$, 可得

$$F_{NGF} = -F_{xGE} = -20 \text{ kN (压力)}$$

然后, 取结点 F 计算, 此时 $F_{NGF} = -20 \text{ kN}$ 作为已知力作用于结点 F 上, 其隔离体如图 3.36 (c) 所示, 列平衡方程 $\sum F_y = 0$, 得

$$F_{NFE} = 15 \text{ kN (拉力)}$$

由 $\sum F_x = 0$, 得

$$F_{NFC} = -20 \text{ kN (压力)}$$

然后, 再取结点 E 计算, 此时 $F_{xGE} = 20 \text{ (kN)}$ 、 $F_{yGE} = 15 \text{ kN}$ 、 $F_{NEF} = 15 \text{ kN}$ 作为已知力作用于结点 E 上, 隔离体如图 3.36 (d) 所示, 斜杆内力 F_{NEC} 的水平 and 竖向分力 F_{xEC} 和 F_{yEC} 作为未

知力考虑。列平衡方程 $\sum F_y = 0$ ，得

$$F_{yEC} = -30 \text{ kN}$$

并可由比例关系式 (3-11) 求得

$$F_{xEC} = -30 \times \frac{4}{3} = -40 \text{ (kN)}, \quad F_{NEC} = -30 \times \frac{5}{3} = -50 \text{ (kN) (压力)}$$

再由 $\sum F_x = 0$ ，得

$$F_{NED} = -60 \text{ kN (压力)}$$

然后，依次取结点 D 、 C 计算，每次都只有两个未知力，故不难求解。到结点 B 时只有一个未知力 F_{NBA} ，最后到结点 A 时，各力都已求出，故此结点的平衡条件是否都满足可作为校核。

为了清晰起见，将此桁架各杆内力的大小和性质标注在图 3.36 (a) 中。若同时将各杆的分力一并标注，则平衡关系更为清晰。读者也可尝试从图上逐点推算各杆内力，以简化计算。

桁架中内力为零的杆件称为零杆。如例 3.11 中的 DC 杆件就是零杆，出现零杆的情况可归结如下：

(1) 两杆结点上无荷载作用时[见图 3.37 (a)]，则该两杆的内力都等于零。

(2) 三杆结点上无荷载作用时[见图 3.37 (b)]，其中有两杆在一直线上，则另一杆必为零杆。在同一直线上的两杆，内力相等、符号相同。

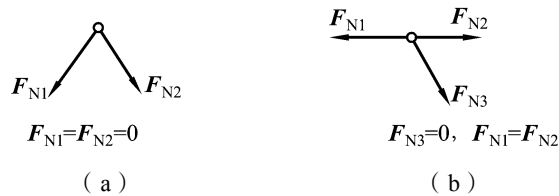


图 3.37

在分析桁架时，可先利用上述原则找出零杆，这样可使计算简化。但应注意，零杆与荷载是对应的。

应用以上结论，不难判断图 3.38 (a)、(b) 所示桁架中，以虚线表示的各杆均为零杆。

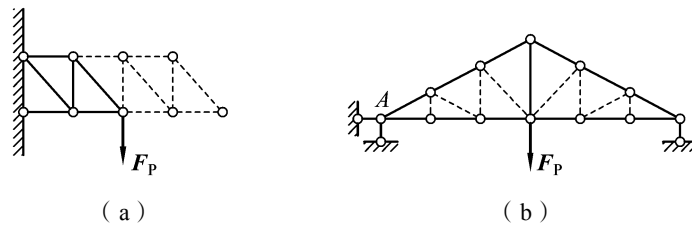


图 3.38

若桁架处于对称或反对称的受力状态，在分析时只需计算半边桁架杆件的内力，另外

半边杆件的内力可以根据对称或反对称的性质得到。此外，利用受力状态对称或反对称的特点也常可使计算进一步简化。例如：图 3.39 (a) 所示的桁架，受对称荷载作用，处于对称受力状态（杆 45 是零杆），故杆 43 与 47 的轴力应大小相等，且性质相同，但由结点 4 的平衡条件 $\sum F_y = 0$ ，又要求两斜杆的轴力性质相反，则处于对称位置上的这两根斜杆既要满足对称受力性质，又要满足平衡条件，因而可以判定 $F_{N43} = F_{N47} = 0$ 。如果结点 4 上也作用有竖向荷载[见图 3.39 (b)]，则可以利用两斜杆内力相等的特点，由结点 4 的平衡条件 $\sum F_y = 0$ ，求出两杆轴力的竖向分力均为 40 kN，故 $F_{N43} = F_{N47} = 50$ kN；如果将作用于结点 6 上的荷载改为竖直向上，且大小不变[见图 3.39 (c)]，则桁架处于反对称的受力状态，应有 $F_{N35} = -F_{N57}$ （轴力大小相等，性质相反）。但由结点 5 的平衡条件 $\sum F_x = 0$ ，又要求两杆的轴力性质相同，则这两杆既要满足反对称受力性质，又要满足平衡条件，因而可以判定 $F_{N35} = -F_{N57} = 0$ 。

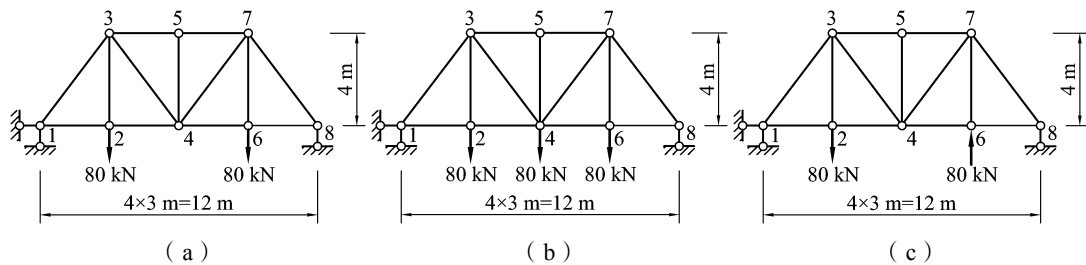


图 3.39

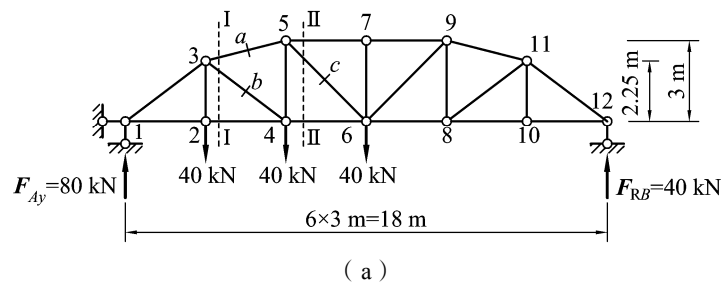
二、截面法

在桁架分析中，有时仅需或者是先需求出某一（或某些）指定杆件的内力，这时一般用截面法比较方便。截面法指用适当的截面，截取桁架中包含两个以上结点的部分为隔离体，此时作用在隔离体上的各力通常构成平面一般力系，可以建立三个平衡方程。因此，只要隔离体上的未知力不超过三个，一般都可以利用这三个平衡方程解得。

为简化内力计算，在应用截面法分析静定桁架时应注意以下两点：

- (1) 选择恰当的截面和适宜的平衡方程，尽量避免方程的联立求解。
- (2) 利用刚体力学中力可沿其作用线移动的特点，按照解题需要可将杆件的未知轴力移至恰当的位置进行分解，以简化计算。

例 3.12 求出图 3.40 (a) 所示桁架杆件 *a*、*b*、*c* 三杆的内力。



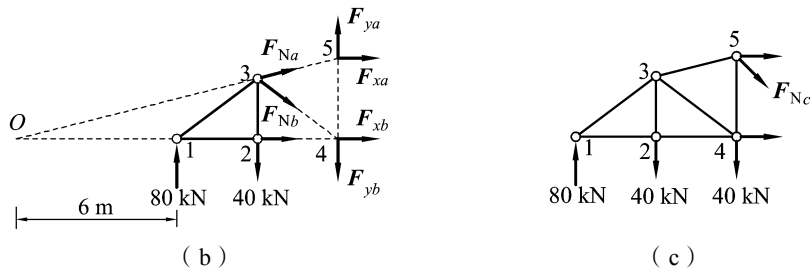


图 3.40

解 (1) 求支座反力。以桁架的整体为隔离体, 由 $\sum M_A = 0$, 得

$$40 \times 3 + 40 \times 6 + 40 \times 9 - F_{RB} \times 18 = 0$$

$$F_{RB} = 40 \text{ kN}(\uparrow)$$

由 $\sum F_y = 0$, 得

$$F_{Ay} = 80 \text{ kN}(\uparrow)$$

(2) 计算各杆内力。

为求 a 、 b 杆内力, 作截面 I—I 并取左边部分为隔离体, 见图 3.40 (b)。求杆 a 的内力 F_{Na} 时, 对 b 杆与 24 杆的交点 4 取力矩平衡方程, 则该方程中只含有 F_{Na} 一个未知轴力, 可以求解 F_{Na} 。但此时未知力 F_{Na} 对 4 点的力臂计算比较麻烦, 为此可如图将 F_{Na} 在结点 5 处分解为水平和竖直方向两个分力 F_{xa} 和 F_{ya} , 其竖向分量 F_{ya} 对 4 点无力矩产生, 而水平分量 F_{xa} 对 4 点的力臂容易按照几何关系确定。由力矩平衡方程 $\sum M_4 = 0$, 有

$$80 \times 6 - 40 \times 3 + F_{xa} \times 3 = 0$$

得

$$F_{xa} = -120 \text{ kN}$$

再由 F_{Na} 与 F_{xa} 之间的比例关系, 求得

$$F_{Na} = \frac{\sqrt{3^2 + (3-2.25)^2}}{3} F_{xa} = \frac{3.092}{3} \times (-120) = -123.69 \text{ (kN)} \text{ (压力)}$$

求杆 b 内力 F_{Nb} 时, 取 a 杆与 24 杆的交点 O 取力矩平衡方程。先由几何关系确定 O 点的位置如图 3.40 (b) 所示, 并将 F_{Nb} 在结点 4 分解为水平和竖直方向两个分力 F_{xb} 和 F_{yb} [见图 3.40 (b)], 其水平分量 F_{xb} 对 4 点无力矩产生, 而竖向分量 F_{yb} 对 O 点的力臂容易按照几何关系确定。由力矩平衡方程 $\sum M_O = 0$, 有

$$-80 \times 6 + 40 \times 9 + F_{yb} \times 12 = 0$$

得

$$F_{yb} = 10 \text{ kN}$$

再由 F_{Nb} 与 F_{yb} 之间的比例关系, 求得

$$F_{Nb} = \frac{\sqrt{3^2 + 2.25^2}}{2.25} F_{yb} = \frac{3.75}{2.25} \times 10 = 16.67 \text{ (kN) (拉力)}$$

为求 c 杆内力 F_{Nc} ，作截面 II—II 并取左边部分为隔离体[见图 3.40 (c)]。因 46 杆和 57 杆都位于水平方向，两杆内力均无竖向分力，由竖向力平衡方程 $\sum F_y = 0$ ，有

$$80 - 2 \times 40 + F_{yc} = 0$$

得

$$F_{yc} = F_{Nc} = 0$$

在用截面法求桁架内力时，在其他比较复杂的桁架中，所作截面常切断四根或四根以上的杆件，在此情形下，只要被切断的各杆中，除一根欲求杆外，其余各杆均汇交于一点，则取该点为力矩中心，即可由力矩平衡方程求出不交于力矩中心那根欲求杆的内力。另外，根据计算需要，所作截面可为任何形状，直的或弯曲的。图 3.41 (a) 所示的桁架，欲求 1 杆内力 F_{N1} ，可作 I—I 截面，以左部为隔离体[见图 3.41 (b)]，由 $\sum M_{K_1} = 0$ ，即得 F_{N1} 。欲求 2 杆内力 F_{N2} ，可作 II—II 截面，以下部为隔离体[见图 3.41 (c)]，将 F_{N2} 移至 K_1 ，并将其分解为水平和竖直两个分力，由 $\sum M_{K_2} = 0$ ，水平分力 F_{x2} 通过力矩中心 K_2 ，由此可求得竖直分力 F_{y2} ，进而求得 F_{N2} 。

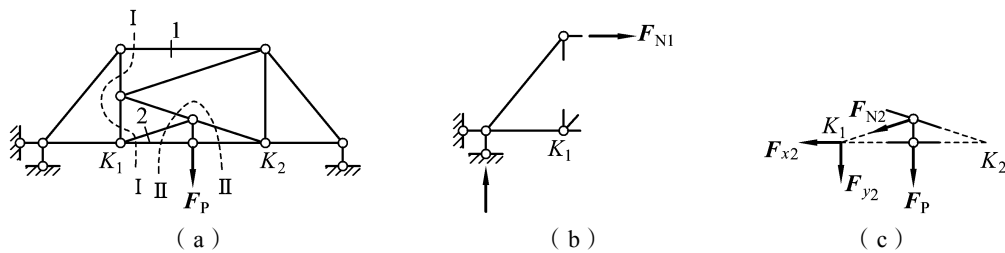


图 3.41

同样，在用截面法求桁架内力时，所作截面切断四根或四根以上的杆件，若只要被切断的各杆中，除一根欲求杆件以外，其他各杆均互相平行，则欲求杆件的内力就可以用投影平衡方程求出。如图 3.42 所示桁架，欲求斜杆 a 的内力，取截面 I—I 以上部分为隔离体，并用 $\sum F_x = 0$ ，即可求得 a 杆的水平分力，进而求得 F_{Na} 。

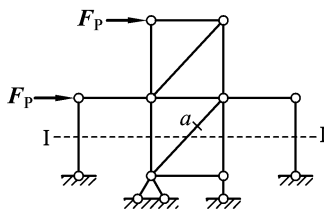


图 3.42

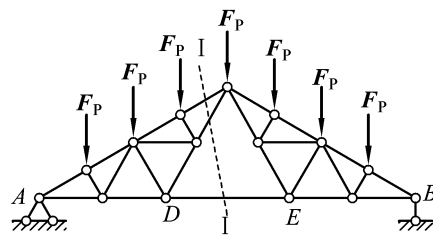


图 3.43

上面分别介绍了结点法和截面法。对于简单桁架，当要求全部杆件内力时，用结点法是适宜的；若只求个别杆件的内力，则往往用截面法较方便。对于联合桁架，若只用结点法将会遇到未知力超过两个的结点，故宜先用截面法将联合杆件的内力求出。例如图 3.43 所示桁

架，先由截面 I—I 求出联合杆件 DE 的内力，然后再对各简单桁架进行分析，较为简便。

例 3.13 试求图 3.44 (a) 所示桁架中 a 、 b 、 c 、 d 杆件的内力。

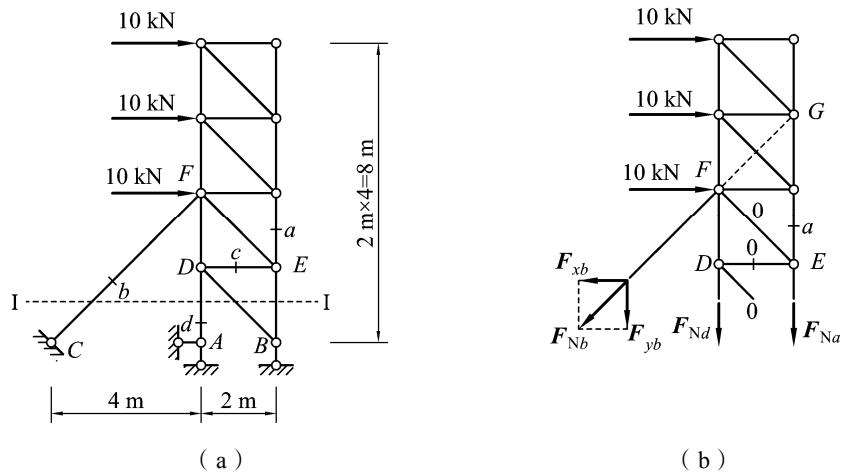


图 3.44

解 首先，按结点法观察支承点 B ，知 BD 杆为零杆；再由结点 D 可得 $F_{Nc} = 0$ ，且 EF 杆也为零杆。为求 a 、 b 、 d 杆内力，作 I—I 截面，并取以上部分为隔离体，如图 3.44 (b) 所示。由 $\sum F_x = 0$ ，得

$$F_{xb} = 30 \text{ kN}$$

所以 $F_{Nb} = 30\sqrt{2} = 42.4 \text{ (kN)}$ (拉力)

为求 d 杆内力，将 b 杆和 a 杆的交点 G 点作为力矩中心，由 $\sum M_G = 0$ ，得

$$F_{Nd} = 0$$

为求 a 杆内力，将 b 杆和 d 杆的交点 F 点作为力矩中心，由 $\sum M_F = 0$ ，得

$$F_{Na} = -\frac{10 \times 2 + 10 \times 4}{2} = -30 \text{ (kN)} \text{ (压力)}$$

第六节 组合结构

组合结构是由只承受轴力的二力杆和承受弯矩、剪力、轴力的梁式杆件所组成的，常用于房屋建筑中的屋架、吊车梁以及桥梁的承重结构。例如图 3.45 (a) 所示的三铰屋架和图 3.45 (b) 所示的下撑式五角形屋架就是较常见的静定组合结构，称为组合式屋架。其上弦杆都是由钢筋混凝土制成，主要承受弯矩和剪力；下弦及腹杆则用型钢制成，主要承受轴力。

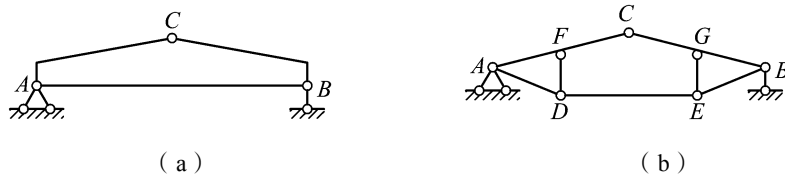


图 3.45

组合结构中的二力杆为直杆，如图 3.46 (a) 所示，两端铰结、无横向荷载作用；梁式杆（受弯杆）为承受横向荷载作用的直杆或折杆[见图 3.46 (b)、(c)]以及带有不完全铰的两端铰结杆件[见图 3.46 (d)]等。由于组合结构充分发挥了二力杆（桁架）与梁式杆（受弯杆）各自的优点，故常能承受较大的荷载。

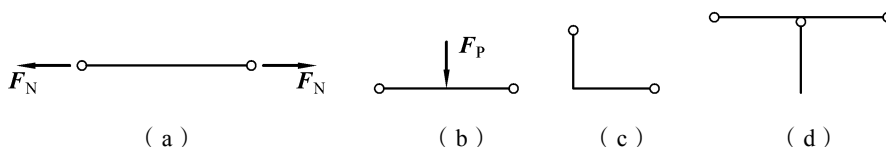


图 3.46

计算组合结构的关键问题是区分两类杆件。使用结点法和截面法时一定要注意所截断的杆件是梁式杆还是二力杆。若截断的是二力杆，则桁架的所有计算方法和结论全可以应用；但如果所截断的杆件中有梁式杆，则不能使用桁架的计算结论。因此，为不使隔离体上的未知力过多，应尽可能避免截断梁式杆。分析这类结构的步骤一般是先求出反力，然后计算各二力杆（链杆）的轴力，再将其轴力作用于梁式杆上计算梁式杆内力。当然，如梁式杆件的弯矩图很容易先行绘出时，则不必拘泥于上述步骤。

例 3.14 试对图 3.47 (a) 所示组合结构进行内力分析，作出 M 图，并求二力杆轴力。

解 分析整体结构，显然 AC 柱是基本部分， DB 杆件为附属部分， CD 为链杆。计算从附属部分开始。

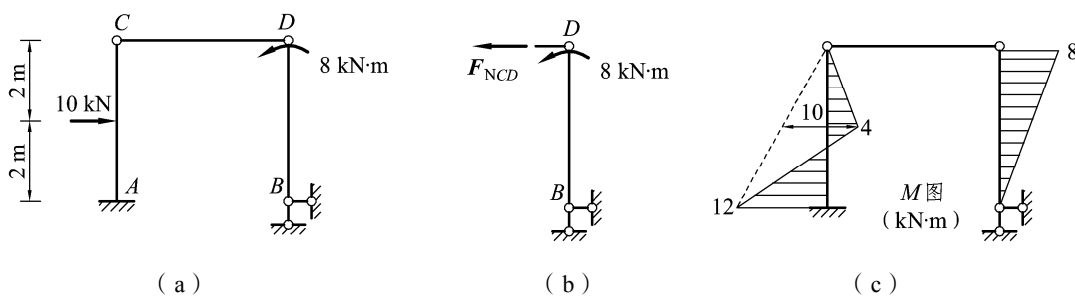


图 3.47

(1) 计算链杆轴力。先将 CD 杆截断，取 DB 杆件为隔离体，如图 3.47 (b) 所示。由 $\sum M_B = 0$ ，可得二力杆 CD 杆的轴力为

$$F_{NCD} = -2 \text{ kN (压力)}$$

(2) 作梁式杆件的内力图。 DB 杆为梁式杆, D 端作用一外力矩, 可直接作出其弯矩图。再将 CD 杆的轴力 $F_{NCD} = -2 \text{ kN}$ 作用于 AC 部分, 作出其弯矩图。最后的弯矩图如图 3.47 (c) 所示。

例 3.15 试分析图 3.48 (a) 所示组合结构的内力。

解 (1) 先由结构的整体平衡求得支座反力:

$$F_{Ay} = 90 \text{ kN}(\uparrow), \quad F_{RB} = 30 \text{ kN}(\uparrow)$$

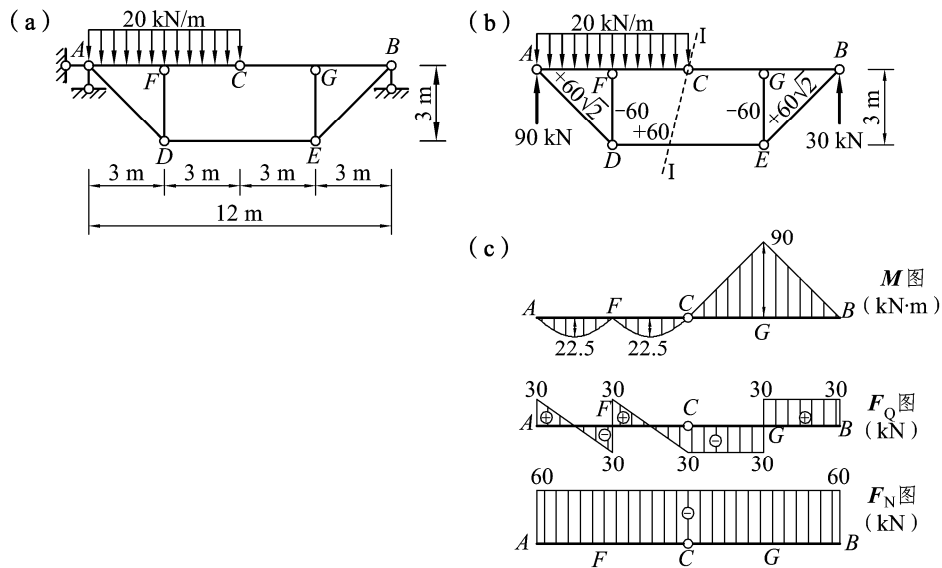


图 3.48

(2) 计算链杆轴力。作截面 $I-I$, 截开铰 C 和链杆 DE [见图 3.48 (b)], 取其右半部分为隔离体, 由 $\sum M_C = 0$, 得

$$F_{NDE} \times 3 - 30 \times 6 = 0$$

故

$$F_{NDE} = 60 \text{ kN} \text{ (拉力)}$$

再由结点 D 及 E 的平衡条件, 可求得其余链杆的内力, 如图 3.48 (b) 所示。

(3) 作梁式杆件的内力图。梁式杆 F 、 G 点的弯矩分别为

$$M_F = 90 \times 3 - F_{yAD} \times 3 - \frac{20 \times 3 \times 3}{2} = 0$$

$$M_G = 30 \times 3 - F_{yBE} \times 3 = -90 \text{ (kN}\cdot\text{m)} \text{ (上侧受拉)}$$

于是根据叠加法作出梁式杆的 M 图, 并由弯矩图的斜率作剪力图, 根据隔离体的平衡条件作轴力图, 如图 3.48 (c) 所示。

第七节 静定结构的一般性质

(1) 在几何组成方面，静定结构是没有多余约束的几何不变体系。在静力学方面，静定结构的全部反力和内力均可由静力平衡条件求得，且其解答是唯一的确定值。

(2) 由于只用静力平衡条件即可确定静定结构的反力和内力，因此其反力和内力只与荷载以及结构的几何形状、尺寸有关，而与构件所用材料及其截面形状和尺寸无关，即与截面刚度无关。

(3) 温度变化、支座位移、材料收缩和制造误差等非荷载因素均不引起静定结构的反力和内力。

例如：图 3.49 (a)、(b) 分别表示三铰刚架在支座位移和温度变化作用时的情况，图中虚线表示刚架受上述非荷载因素作用后的位移。从直观的角度分析，如图 3.49 (a) 所示三铰刚架，当支座 B 支座位移时，整个刚架将随之发生虚线所示的刚体位移，而不产生反力和内力。又如图 3.49 (b) 所示温度变化作用，当两侧温度变化不同时，杆件可自由伸长和弯曲而发生如图中虚线所示的变形，也不会产生反力和内力。

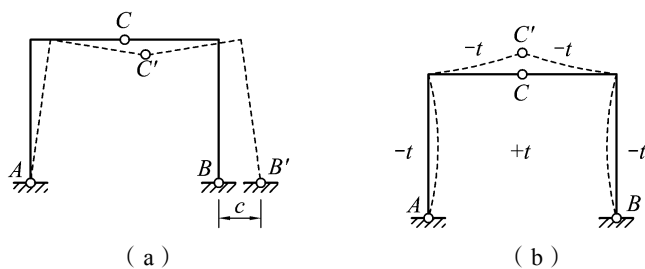


图 3.49

(4) 平衡力系作用于静定结构中某一几何不变或可独立承受该平衡力系的部分上时，则只有该部分受力，而其余部分的反力和内力均为零。

例如：图 3.50 (a)、(b) 所示的静定刚架，各有一组平衡力系作用于几何不变部分 CD 上，因而仅在 CD 部分上有内力存在，图中绘出了刚架的弯矩图形。图 3.50 (c) 中，荷载与刚架 A 支座的竖向反力构成了平衡力系，所以仅 AC 杆中有轴力存在，其余部分反力和内力均为零。

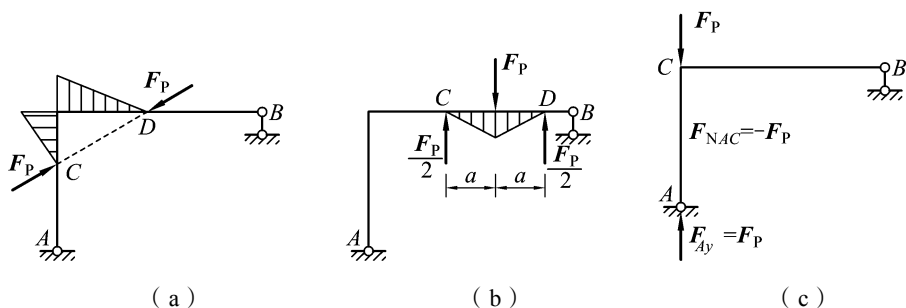


图 3.50

(5) 当作用于静定结构中某一几何不变部分上的荷载作等效变换时, 则只有该部分的内力发生变化, 而其余部分的反力和内力均不变。

例如: 将图 3.51 (a) 中静定梁 CD 杆上的均布荷载用等效集中荷载代替, 如图 3.51 (b) 所示, 由两者的弯矩图形的对比可以看出, 仅 CD 杆的弯矩发生了变化, 其余部分的弯矩不变。

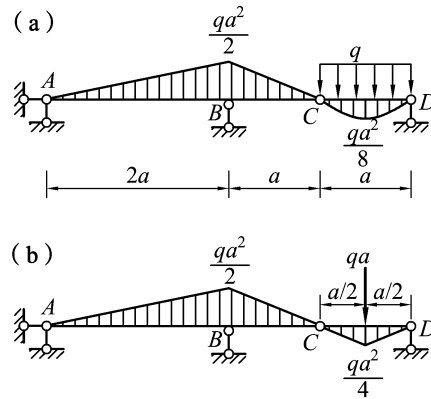


图 3.51

(6) 静定结构中的某一几何不变部分作构造改变时, 其余部分的反力和内力均不变。

例如: 图 3.52 (a) 中的静定桁架, 下弦受节间荷载作用, 为改善下弦的受力状况, 可用两个小桁架代替原桁架下弦杆, 如图 3.52 (b) 所示。此时桁架的反力和其余杆件的内力均不变。因为此时其余部分的平衡均能维持, 而两小桁架在原荷载和约束力构成的平衡力系作用下也能保持平衡, 所以上述构造改变后, 其余部分的内力状态不变。

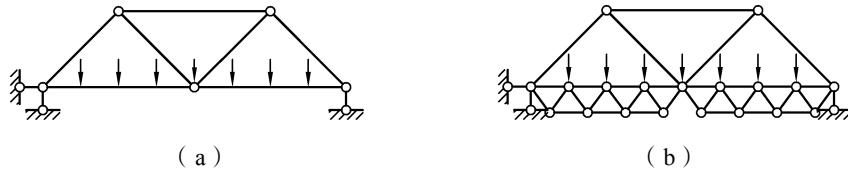
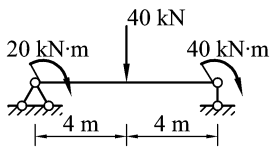


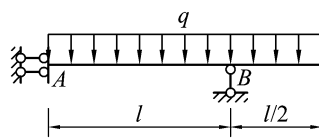
图 3.52

习 题

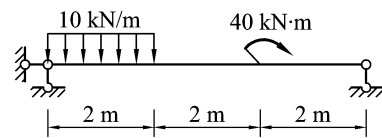
3.1 ~ 3.3 试作图示单跨梁的内力图。



题 3.1 图



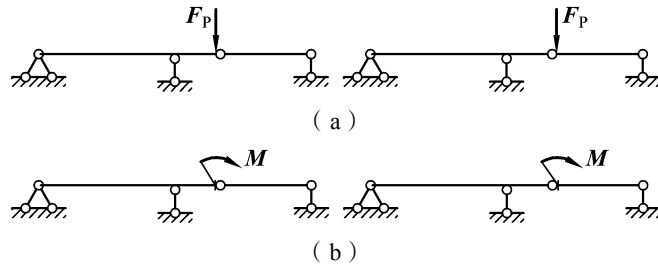
题 3.2 图



题 3.3 图

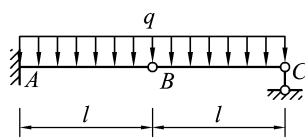
3.4 图示多跨静定梁承受左图和右图的荷载时(即集中力或集中力偶分别作用在铰左侧

和右侧)弯矩图是否相同?试绘出各弯矩图的形状。

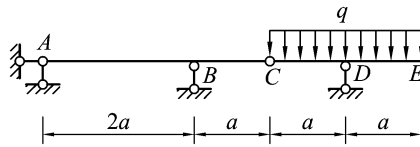


题 3.4 图

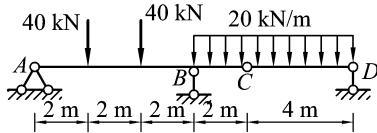
3.5 ~ 3.8 试作图示多跨静定梁的内力图。



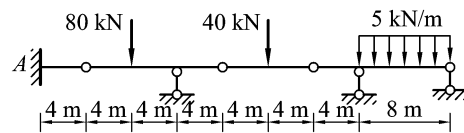
题 3.5 图



题 3.6 图

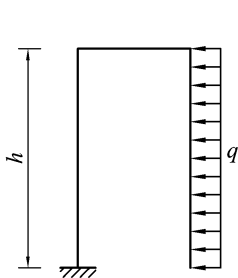


题 3.7 图

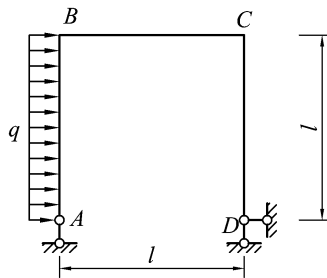


题 3.8 图

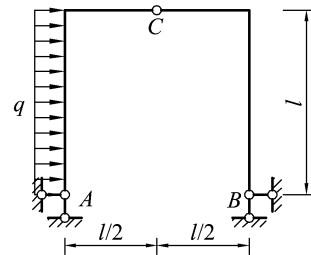
3.9 ~ 3.11 试作图示刚架的 M 、 F_Q 及 F_N 图。



题 3.9 图

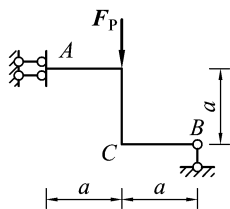


题 3.10 图

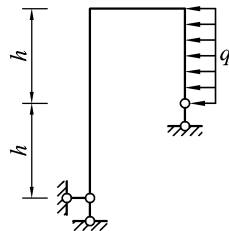


题 3.11 图

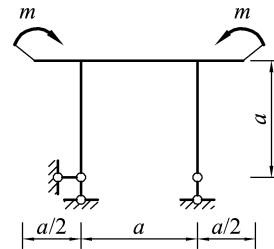
3.12 ~ 3.19 试作图示刚架的 M 图。



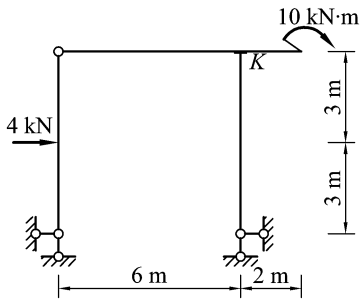
题 3.12 图



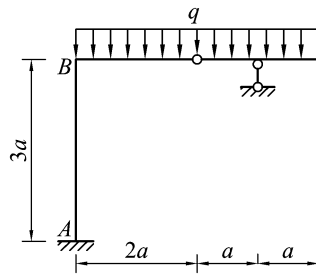
题 3.13 图



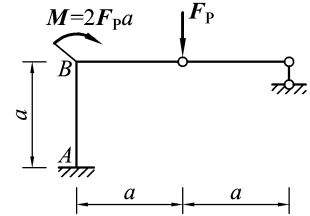
题 3.14 图



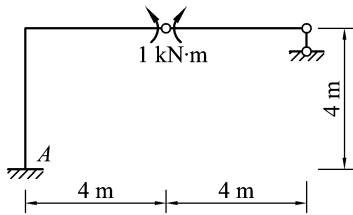
题 3.15 图



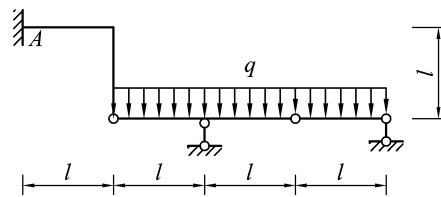
题 3.16 图



题 3.17 图

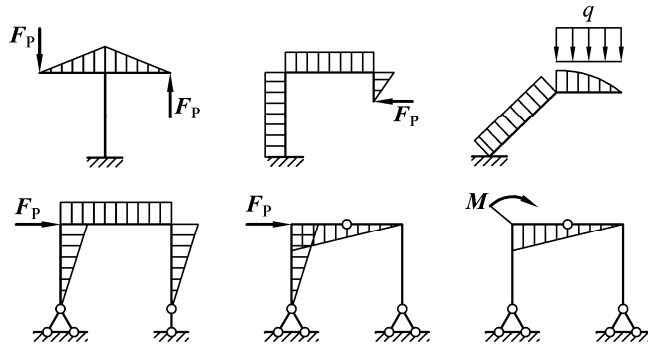


题 3.18 图



题 3.19 图

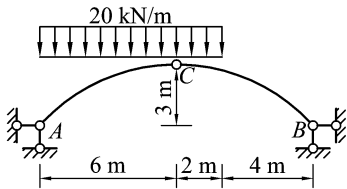
3.20 图示各弯矩图是否正确？如有错误，试加以改正。



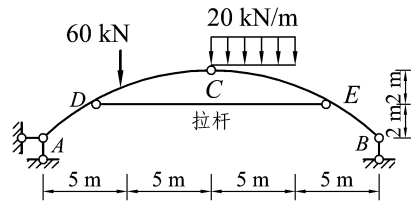
题 3.20 图

3.21 求图示三铰拱的支座反力。

3.22 求图示带拉杆的静定拱的支座反力及拉杆 DE 的内力。



题 3.21 图

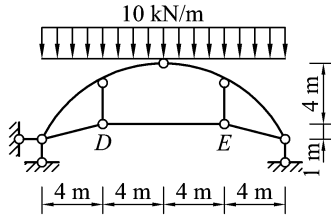


题 3.22 图

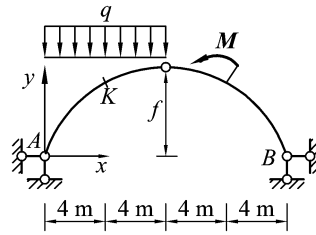
3.23 求图示结构拉杆 DE 的内力。

3.24 计算图示抛物线三铰拱 K 截面的内力 M_K 、 F_{NK} ，拱轴方程为： $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$ 。

已知： $q = 10 \text{ kN/m}$, $f = 8 \text{ m}$, $M = 32 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。

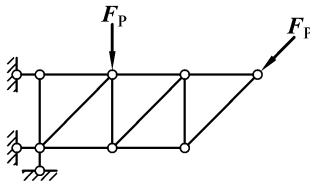


题 3.23 图

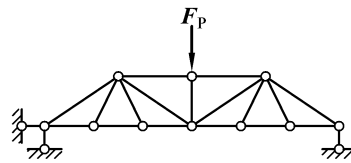


题 3.24 图

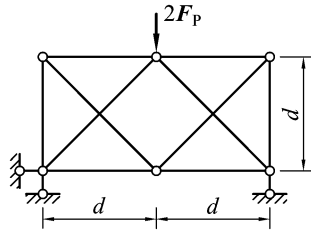
3.25 ~ 3.28 试指出图示桁架中的零杆。



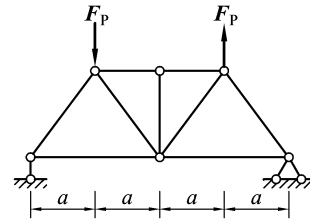
题 3.25 图



题 3.26 图

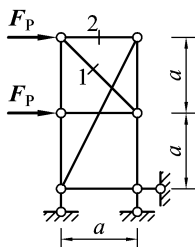


题 3.27 图

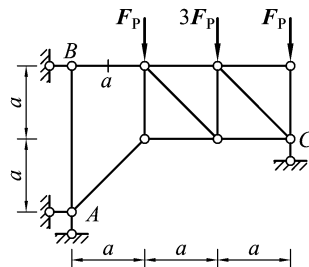


题 3.28 图

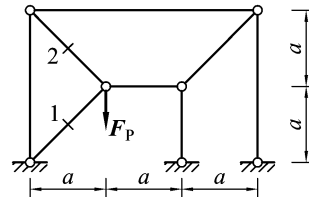
3.29 ~ 3.37 用截面法计算图示桁架中指定杆件的内力。



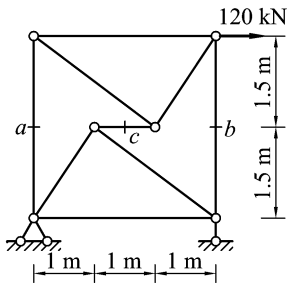
题 3.29 图



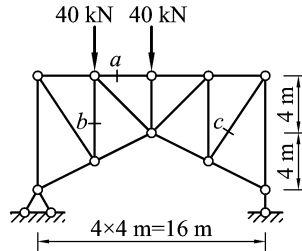
题 3.30 图



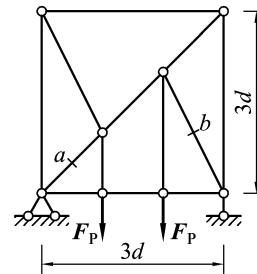
题 3.31 图



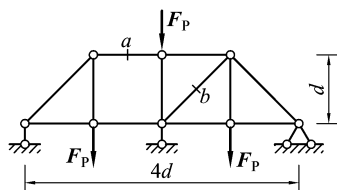
题 3.32 图



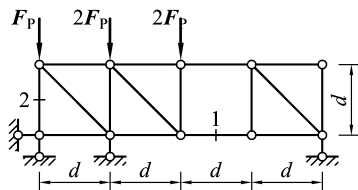
题 3.33 图



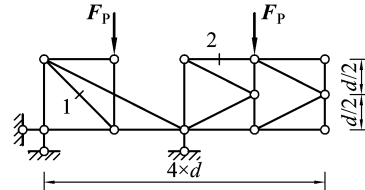
题 3.34 图



题 3.35 图

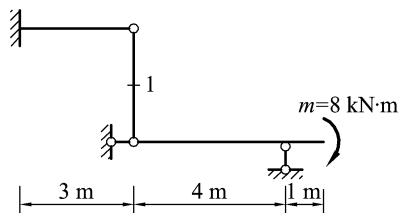


题 3.36 图

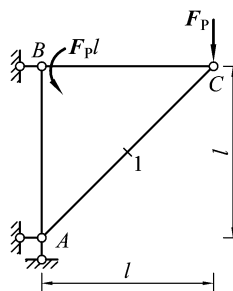


题 3.37 图

3.38 ~ 3.39 试求图示组合结构中指定杆件的轴力。



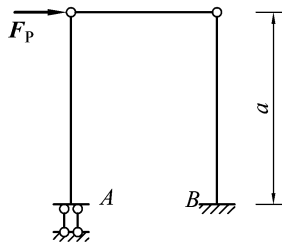
题 3.38 图



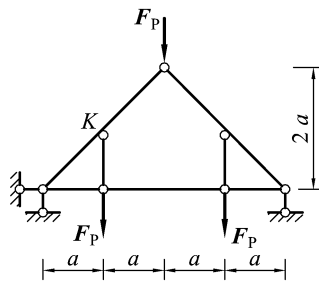
题 3.39 图

3.40 试作图示组合结构的弯矩图，并求二力杆件的轴力。

3.41 试求图示结构 K 截面的弯矩 M_K 。

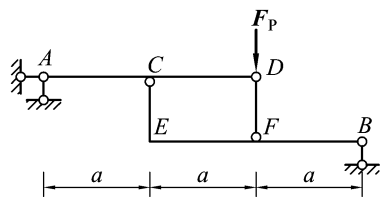


题 3.40 图

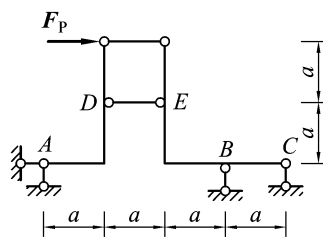


题 3.41 图

3.42 ~ 3.43 作图示结构的 M 图。



题 3.42 图



题 3.43 图

习题参考答案

3.1 左端弯矩 $20 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (下侧受拉), 右端弯矩 $40 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (上侧受拉)

- 3.2 $M_A = \frac{3ql^2}{8}$ (下侧受拉)
- 3.3 距左端 2 m 处弯矩为 0
- 3.4 (a) 相同; (b) 不同
- (a) 左、右图附属部分 M 图为 0, 基本部分上侧受拉, M 图在上侧
- (b) 左图附属部分 M 图为 0, 基本部分上侧受拉, M 图在上侧; 右图附属部分、基本部分均下侧受拉, M 图在下侧
- 3.5 $M_{AB} = ql^2$ (上侧受拉)
- 3.6 由铰 C 传递的竖向力为 0, ABC 上无荷载, 内力为 0; $M_D = -\frac{qa^2}{2}$ (上侧受拉)
- 3.7 $M_B = -120 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (上侧受拉)
- 3.8 $M_A = -120 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (上侧受拉)
- 3.9 横梁弯矩 $\frac{qh^2}{2}$ (上侧受拉)
- 3.10 $M_{CB} = ql^2$ (外侧受拉), $M_{BC} = \frac{ql^2}{2}$ (外侧受拉)
- 3.11 $F_{Ax} = \frac{3ql}{4}$ (\leftarrow), $F_{Bx} = \frac{ql}{4}$ (\leftarrow)
- 3.12 $M_{CB} = F_p a$ (下侧受拉)
- 3.13 横梁左端弯矩 $\frac{qh^2}{2}$ (上侧受拉), 横梁右端弯矩 $2qh^2$ (上侧受拉)
- 3.14 横梁各处弯矩为 m (下侧受拉), 两竖柱弯矩为 0
- 3.15 右柱上端 $M_K = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (右侧受拉)
- 3.16 $M_{AB} = 2qa^2$ (左侧受拉)
- 3.17 $M_{BA} = 3F_p a$ (左侧受拉)
- 3.18 $M_A = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (右侧受拉)
- 3.19 $M_A = \frac{ql^2}{2}$ (下侧受拉)
- 3.20 略
- 3.21 $F_{Ax} = 93.33 \text{ kN}$ (\rightarrow), $F_{Ay} = 106.67 \text{ kN}$ (\uparrow)
- 3.22 $F_{Ay} = 82.5 \text{ kN}$ (\uparrow), $F_{NDE} = 262.5 \text{ kN}$ (拉)
- 3.23 $F_{NDE} = 80 \text{ kN}$ (拉)
- 3.24 $M_K = 36 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (内侧受拉), $F_{QK} = 0$
- 3.25 2 根
- 3.26 4 根
- 3.27 6 根
- 3.28 3 根
- 3.29 $F_{N1} = \sqrt{2}F_p$ (拉), $F_{N2} = -2F_p$ (压)
- 3.30 $F_{Na} = 5F_p$ (拉)

- 3.31 $F_{N1} = 0$, $F_{N2} = \sqrt{2}F_p$ (拉)
- 3.32 $F_{Na} = 60 \text{ kN}$ (拉), $F_{Nb} = -60 \text{ kN}$ (压), $F_{Nc} = 120 \text{ kN}$ (拉)
- 3.33 $F_{Na} = -60 \text{ kN}$ (拉), $F_{Nb} = -66.67 \text{ kN}$ (压), $F_{Nc} = 36.06 \text{ kN}$ (拉)
- 3.34 $F_{Na} = -\frac{\sqrt{2}}{3}F_p$ (拉), $F_{Nb} = -\frac{\sqrt{5}}{3}F_p$ (压)
- 3.35 $F_{Na} = -F_p$ (压), $F_{Nb} = 0$
- 3.36 $F_{N1} = 0$, $F_{N2} = F_p$ (拉)
- 3.37 $F_{N1} = \sqrt{2}F_p$ (拉), $F_{N2} = -\frac{F_p}{2}$ (压)
- 3.38 $F_{N1} = -2 \text{ kN}$ (拉)
- 3.39 $F_{N1} = 0$
- 3.40 $M_A = 0$, $M_B = F_p a$ (内侧受拉), 二力杆 $F_N = -F_p$ (压)
- 3.41 $M_K = \frac{1}{2}F_p a$ (下侧受拉)
- 3.42 $M_C = \frac{1}{3}F_p a$ (下侧受拉), $M_F = \frac{2}{3}F_p a$ (下侧受拉)
- 3.43 $M_B = 2F_p a$ (下侧受拉), $M_D = F_p a$ (右侧受拉), $F_{NDE} = 2F_p$ (拉)



目 录

