

8. 高温物体在低温介质中冷却，已知温度  $\theta$  与时间  $t$  的关系为  $\theta = \theta(t)$ ，给出  $t_0$  时冷却速度的定义式.

\*9. 讨论下列函数在点  $x = 0$  处的连续性与可导性：

$$(1) y = |\sin x| ; \quad (2) y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



# 部分习题答案详解

## 第一章 函数与极限

### 习题 1-1

2. (1) 解：因为  $\begin{cases} 25-x^2 \geq 0 \\ x^2-9 \neq 0 \end{cases}$ ，所以

$$-5 \leq x \leq 5 \text{ 且 } x \neq \pm 3$$

故  $[-5, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, 5]$ .

4. (1) 解：  $f(-x) = 2(-x) - 3(-x)^3 = -(2x - 3x^3) = -f(x)$

所以  $f(x)$  是奇函数.

6. (1) 解：  $y = 3^u$ ,  $u = x^2$ .

10. 解：设总造价为  $R$ ，底面边长为  $x$ ，水池高为  $y$ ，单位面积造价为 1，则

$$R = 2x^2 + \frac{4V}{x}$$

11. 解：设个人月  $x$  收入为  $x$ ，月纳税金额为  $y$ ，则

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 3500 \\ (x - 3500) \times 3\%, & 3500 < x \leq 5000 \\ 45 + (x - 5000) \times 10\%, & 5000 < x \leq 8000 \\ 345 + (x - 8000) \times 20\%, & 8000 < x \leq 9000 \end{cases}$$

### 习题 1-2

2. 解：  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

故  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

3. 解：  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$

故  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

4. 解：  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$ ， $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2$

故  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ .

### 习题 1-3

1. (1) 解:  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 5) = 1^2 - 4 \times 1 + 5 = 2$  ;

(3) 解:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$ .

3. (1) 解:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)} = \frac{a-1}{3a^2}$  ;

(3) 解:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x^2}}{2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$ .

4. (1) 解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)} \right)$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$ .

### 习题 1-4

1. (1) 解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$  ;

(3) 解:  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{(x+2)(x-3)} = -\frac{1}{5}$  ;

(5) 解:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin \frac{\pi}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} \cdot \pi = \pi$  ;

(7) 解:  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \left( -\frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} \right) = -1$ .

2. (1) 解:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^5 = e^5$  ;

(2) 解:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^{3x} \right]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}$  ;

$$(5) \text{ 解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^3 = e^3;$$

$$(8) \text{ 解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2-x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2-x}\right)^{2-x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2-x}\right)^{-2} = e;$$

$$(9) \text{ 解: } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = e.$$

### 习题 1-5

1. (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x}{x^2} = \infty$ , 所以为无穷大;

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} 3 \sin x \cos x = 0$ , 所以为无穷小.

3. (1) 解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2};$

(3) 解:  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0;$

(5) 解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3.$

4. (1) 解: 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x(x + 1) = 2$$

故当  $x \rightarrow 1$  时,  $x^2 - 1$  与  $\frac{x-1}{x}$  是同阶无穷小.

### 习题 1-6

2. 解:  $\Delta y = f(2+0.5) - f(2) = 0.75.$

4. 解: 
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

左右极限存在, 但不相等, 故  $x=0$  是函数  $y = \arctan \frac{1}{x}$  的第一类间断点.

6. (1) 解:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{6}{3} = 2;$

(3) 解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1;$

(5) 解:  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x-1}{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1}{x+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$

(7) 解:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \ln \arcsin x = \ln \frac{\pi}{6}$ .

### 复习题一

一、1.  $\times$ ;  $f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = -x^2 \sin x = -f(x)$ , 故是奇函数.

2.  $\times$ ; 如:  $f(x) = |x|$  是分段函数, 但没有间断点.

二、1. 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = \sin 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

故选 C;

6. 由于  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$ , 极限不存在, 故选 D.

7. 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$ , 故选 B.

10. 由于  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( -\frac{x+2}{1+x+x^2} \right) = -1$ , 故选 D.

三、1. 解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n}{5n^3 + 4n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{n^2}}{5 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \frac{2}{5}$ ;

3. 解:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{3}{4}$ .

四、1. 解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{\sin 8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{8x} = \frac{7}{8}$ .

五、1. 解:  $y = e^u, u = \sin v, v = 3x$ .

八、解:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2.1x + 84) = 84$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4.2x + 420) = 420$ .

由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  在点  $x = 0$  处不连续, 冰水混合物在 0 摄氏度时只吸收热量, 不改变温度.