绪 论

数学不是为了研究而进行研究，而是为了应用而进行研究；喜欢研究是因为数学中有无穷的乐趣，是因为数学本身是件极美妙的事儿.

——亨利 · 庞加莱

数学是研究现实世界中的数量关系与空间形式的一门学科. 由于实际需要，数学在古代就产生了，现在已发展成一个分支众多的庞大系统. 大致来说，数学分为初等数学和高等数学. 初等数学基本上是常量的数学；而高等数学包含了丰富的内容，比如研究线性方程组及其相关问题的线性代数，研究方程求根问题的微分方程，研究随机现象的概率论与数理统计. 本教材以研究变速运动及曲边形的求积问题为代表，也属于高等数学的范畴.

在本书中，读者将从微积分学的核心概念——极限的认识开始，逐步了解微积分的发展与应用. 极限是由公元前古希腊的“穷竭法”思想发展而来，人们用来求圆的面积和立体的体积. 我国春秋战国时代学者惠施称：“一尺之锤，日取其半，万世不竭”，也是极限思想的体现. 至公元三世纪，三国魏人刘徽的“割圆术”更成为千古绝技，其提出的“割之弥细，失之弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”正是积分思想的雏形. 微积分思想经过漫长时期的酝酿，终于从牛顿和莱布尼兹的动态分析方法中脱颖而出. 其间也因为微积分的不严密和巨大影响招来了严厉的诘问，比如来自英国哲学家贝克莱对牛顿推导中“瞬”“0”的不合逻辑进行了攻击，从而引发了第二次数学危机. 但是经过牛顿和莱布尼兹等著名科学家的努力（主要是柯西用极限的方法定义了无穷小量），微积分理论得以发展和完善，从而使数学大厦变得更加辉煌美丽！微积分被科学家喻为人类思维最伟大的成果之一. 近百年来，微积分已成为世界各大学的一门重要的基础课，且为高等教育一个非常有效的重要工具.

微积分来源于实践，也应用于实践，在自然科学、工程技术、经济学乃至社会科学中都有着重要的应用. 纵观微积分的发展，其主要解决的就是本教材将要给大家介绍的四个核心问题：

（1）运动中速度、加速度与距离之间的虎丘问题，尤其是非匀速运动，使瞬时变化率的研究成为必要的问题之一；

（2）求曲线上的切线问题；

（3）类似于确定炮弹的最大射程，求行星轨道的近日点、远日点等提出的求函数极大值、极小值问题；

（4）千百年来人们一直研究的长度、面积、体积问题.

问题（1）、（2）、（3）的研究引出了微分的概念，问题（4）的研究引出了积分的概念. 自牛顿和莱布尼兹之后，微积分得到了突飞猛进的发展，人们将微积分应用到自然学科的各个方面，建立了不少以微积分方法为主的分支学科，如常微分方程、偏微分方程、级数等，本教材也有初步的介绍，读者可以根据情况选学.

第一章　微积分的理论基础——极限

在高等数学中，几乎所有的概念都是通过极限来定义的，或是用极限来研究的．因此，极限概念的学习就显得很重要．

我国古代在对极限概念的研究中有一个大家所熟悉的例子——圆周率 π 的计算．圆周率 π 就是平面上圆的周长与直径的比值，但是 π 的计算却很复杂，直到今天仍有不少数学家热衷于 π 的数值计算．我国古代数学家刘徽（约 225—295）的“割圆术”中 π 的数值计算一直被认为是极限概念的典型例子．设单位圆的面积是 π，假设单位圆的内接正 n 边形的面积为 s_n，当边数逐渐增多的时候，内接正 n 边形的面积 s_n 就越来越接近于该单位圆的面积．在学了极限概念后，就可以说圆的内接正 n 边形面积的极限就是圆的面积．大约公元 3 世纪，古代数学家刘徽利用圆的内接正 192 边形的面积近似地计算出 π 的数值 3.14，进而又计算出 $\pi \approx 3.141\,6$．大约在公元 5 世纪，我国著名数学家祖冲之（429—500）通过计算得出了 π 的 7 位小数的数值 $\pi \approx 3.141\,592\,6$．我国古代数学家关于 π 的计算的这些结论在世界上一直处于领先地位，直到一千多年之后，国外才有了相应的数据．

第一节　预备知识

微积分是以函数为研究对象、以极限为研究手段的数学学科．函数作为研究客观世界变化规律最基本、最重要的数学工具之一，在学习极限之前有必要对其基本知识进行复习和梳理，为后继学习打下基础．在中学阶段的学习中，我们已经清楚地知道了函数的基本概念、基本性质以及反函数等相应概念，这里不再重述，本节重点给读者介绍一些在今后的学习中常见的概念及经济应用中常用的函数．

一、邻　域

在初等数学中，通常用区间来表示函数自变量变化范围的集合，区间的端点一般来说是常数，比如 $[a,b]$ 或 (a,b)．而实数集 $\mathbf{R}$ 的区间表示为 $(-\infty,+\infty)$，这里的 ∞（读作“无穷大”）只是一个数学符号，是不能进行运算的，因为它是一个变量．在高等数学中，需要定义以点 a 为圆心，半径无限接近于零的区间（用记号 δ 表示半径，$\delta>0$）．注意，这里的 δ 也是一个变量，表示无限接近于零的变量（后面章节将定义其为无穷小），称这样的区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的邻域，记作

$$U(a,\delta)=\left\{x\,\middle|\,a-\delta<x<a+\delta\right\}.$$

在实际问题中，有时此类邻域中不能包含其圆心 a，称这样的邻域为去心邻域，记为

$$\mathring{U}(a,\delta)=\left\{x\,\middle|\,a-\delta<x<a+\delta, x\neq a\right\}.$$

二、分段函数

首先引入基本初等函数、复合函数以及初等函数的定义.

定义 1.1　称幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数这五类函数为基本初等函数.

定义 1.2　假设函数 $y=f(u)(u\in U)$，函数 $u=\varphi(x)(x\in D,u\in U_1)$，若 $U_1\subset U$，则称

$$y=f(\varphi(x))\quad(x\in D)$$

为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，其中 u 称为中间变量.

定义 1.3　由基本初等函数经有限次的四则运算和复合运算，并能用一个数学解析式表示的函数为初等函数.

在实际生活中，类似于电费、水费、出租车车费等，就不能用一个数学解析式来表示自变量与因变量之间的依赖关系，将这样的函数关系定义如下：

定义 1.4　若函数 $y=f(x)$ 在定义域的不同区间（或者是不同的点）上有不同的表达式，就称为分段函数.

例如，绝对值函数（见图 1.1）

$$y=|x|=\begin{cases}x,x\geqslant 0\\-x,x<0\end{cases}.$$

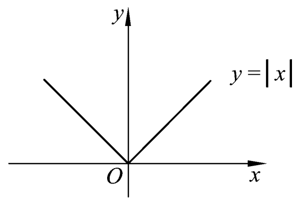

图 1.1

又如，符号函数（见图 1.2）

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1,x<0\\0,x=0\\1,x>0\end{cases}.$$

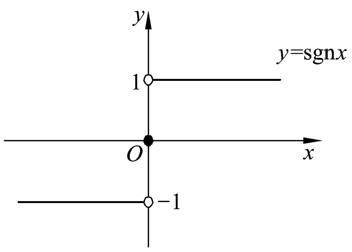

图 1.2

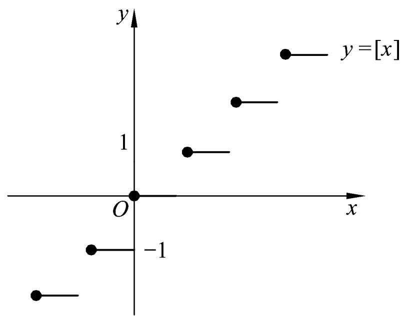

图 1.3

再如，取整函数（见图 1.3）

$$y=[x],$$

其中 y 为不大于 x 的最大整数.

取整函数也称为高斯函数，是以“数学王子”高斯（见图 1.4）的名字命名的．取整函数是连接连续变量与离散变量的一个重要的桥梁，读者可以在后继学习中体会到．

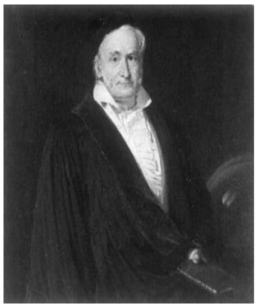
图 1.4　C. F. Gaus（1777—1855）

三、经济学中常用的函数

数学来源于实践也应用于实践，用数学方法解决实际问题，或者说把实际问题化成数学问题，就是寻找函数关系建立数学模型的过程．下面介绍一些在经济学研究中经常用到的几个函数，以帮助解决经济学应用问题．

1. 需求函数与供给函数

在当今商品经济的社会里，一种商品的市场需求量主要受商品价格的影响，因此，可以把需求量看作以价格为自变量的函数．若设 D 为需求量，p 为价格，则有函数关系

$$D = D(p).$$

一般地，价格下降会使需求量增加，价格上升会使需求量减少，即需求函数是价格的单调递减函数．在实际应用中需作出需求函数的图形，我们称其为需求曲线．根据对需求函数的认识，我们说商品的价格也是与市场的需求情况有着密切的关系．实际上，需求函数 $D = D(p)$ 的反函数就是价格函数，记作

$$p = D^{-1}(D).$$

供给是与需求相对应的概念．需求是相对于消费者而言的，而供给则是相对于生产者而言的．供给量是指生产者在适当的价格条件下，可能出售的产品数量，其中包括已有的存货数量和新提供的产品数量.我们对于供给量也可以建立以价格为自变量的函数关系,假设 S 为供给量，$p(p>0)$ 为价格，则

$$S = S(p)$$

称为供给函数．对供给函数而言，价格上升往往会促使供给量也上升，价格下降促使供给量也下降，因此供给函数一般来说是单调递增函数．供给函数的图形称为供给曲线．

需求函数与供给函数密切相关．若市场上需求量与供给量相等，即该商品的供需达到平衡，则此时的商品价格称为均衡价格．此时的需求量或供给量称为均衡商品量．

2. 成本函数、收益函数与利润函数

在实际经济问题中，除了需求量、供给量与价格之间的关系外，还有一个关系也是非常重要的，那就是成本函数．生产产品需要消耗经济资源，如劳动力和生产资料等，这一切构成了成本．成本 C 是产量 Q 的函数，它包括固定成本 C_0 和可变成本 $C_1(Q)$，所以有

$$C(Q) = C_0 + C_1(Q).$$

而 $\dfrac{C(Q)}{Q}$ 称为平均成本函数．

收益是指生产者生产的商品售出后的收入．生产者销售某种商品的收益取决于该商品的销量和价格．如果 $p(Q)$ 表示价格是销量的函数，那么收益函数为

$$R(Q)=Q\cdot p(Q)\text{，}$$

平均收益为

$$\overline{R}(Q)=\frac{R(Q)}{Q}.$$

利润是指生产者的收益减去成本后的剩余部分，如果收益 R 的成本 C 都看成产量 Q 的函数，那么利润也是产量的函数，用 $L(Q)$ 表示，即

$$L(Q)=R(Q)-C(Q).$$

3. 单利、复利和连续复利问题

在社会经济活动中，向银行存款或贷款是常见的金融活动，而存款、贷款都是与利息密切相关地．一般地，利息的计算方式有单利和复利两种．

单利是在原来的本金上计算利息，其公式为

$$\text{利息}=\text{本金}\times\text{利率}\times\text{计息次数}.$$

若设初始本金为 p，利率为 r，计息次数为 t，则第 t 期后本利和 S 为

$$S=p(1+rt).$$

复利是将本金与到期利息相加，并入一起作为下次本金来重新计算，也就是通常所说的“利滚利”．若设初始本金为 p，利率为 r，计息次数为 t，则第 t 期后本利和公式为

$$S=p(1+r)^t.$$

单利和复利是金融活动中的传统计息方式，其计息间隔往往为一年一次计息，发展到今天人们更加关心的是当计息间隔无限缩短的时候，即计息次数无限增大的时候，这种计息方式我们称为连续复利．曾经有银行为了吸引顾客存钱，打出广告“我们每时每刻都在为您计算利息”，听起来是不是很诱人呢？结果究竟会是怎样的呢？学习极限之后再揭晓答案．

习题 1.1

1．某通信公司从一条东西流向的河南岸 A 点向河北岸 B 点铺设地下光缆．已知从点 A 向东直行 1000 m 到 C 点，而 C 点距其正北方向的 B 点也恰为 1000 m．根据工程需要，铺设线路是先从 A 点向东铺设 $x(0\leqslant x\leqslant 1)$ m，然后直接从河底直线铺设到河对岸的 B 点．已知地下每米的铺设费用为 16 元，河底每米的铺设费用为 20 元，试求铺设总费用 $C(x)$ 的表达式．

2．生产与销售某产品总的收入 R 是产量 x 的二次函数，经统计得知：当产量 $x=0,2,4$ 时总收入 $R=0,6,8$，试确定总收入 R 与产量 x 的函数关系．

3．某厂生产某种产品的固定成本为 10000 元，每生产一单位产品，成本增加 100 元，求该厂的总成本函数及平均成本函数．

4．设某商品的需求量 D 是价格 p 的线性函数 $D=a-bp$，已知该商品的最大需求量为 10000 件，最高价格为 10 元/件，并假定市场均衡，求该商品的收益函数．

第二节　数列的极限

一、数列的概念

什么是数列？我国古代，有这样一段关于数列研究的历史．公元前四世纪，哲学家庄子（约公元前 369—公元前 286）在其名著《庄子 · 天下篇》中有这样一句话：“ 一尺之棰，日取其半，万世不竭 ”．用现代数学的方式可以表达为

第 1 天取 $x_1=\dfrac{1}{2}$；

第 2 天取 $x_2=\dfrac{1}{2^2}$；

……

第 n 天取 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$；

……

如上所示，可以令以正整数为自变量的函数 $y=f(n)$，当 n 依次取 $1,2,3,\cdots$ 时所得到的数值

$$x_1=f(1),\ x_2=f(2),\ x_3=f(3),\ \cdots,\ x_n=f(n),\ \cdots$$

称为无穷数列，简称数列．数列中的每个数称为数列的项． $x_n=f(n)$ 称为数列的通项．数列一般记为 $\{x_n\}$．

例 1.1　通项为 $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ 的数列 $\{x_n\}$：

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{2}{3},\ x_3=\frac{3}{4},\ \cdots,$$

依此类推，可以表示成：

$$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots\right\}.$$

可以看出，随着下标 n 越来越大，对应项 x_n 就越来越接近于常数 1.

二、数列极限的概念与性质

根据“ 一尺之棰，日取其半，万世不竭 ”这句话，若理论条件允许，“ 万世不竭 ”表示这

个过程可以无休止地进行下去，也就是说，n 可以趋于无穷大．问题是，当 n 趋于无穷大时，其通项 x_n 有什么变化趋势？可以发现：当 n 无限增大时， x_n 无限接近于常数 0．又如，引言中当单位圆内接正 n 边形的边数 n 无限增大时，内接正 n 边形的面积 s_n 无限接近于单位圆的面积，即常数π．因此，我们称数列在变化过程中无限接近于的这个常数为数列的极限．

定义 1.5　在数列 $\{x_n\}$ 中，当 n 无限增大时，如果通项 x_n 无限接近于一个确定的常数 a，则称 a 为数列的极限．记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a(n\to\infty),$$

此时也称数列 $\{x_n\}$ 是收敛的，否则称数列 $\{x_n\}$ 是发散的．从前面的讨论中，由该定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

例 1.2　判断下列数列是否收敛：

（1） $\{x_n\}=\{(-1)^{n-1}\}$；　　（2） $\{x_n\}=\{1+n^2\}$；

（3） $\{x_n\}=\left\{1-\frac{1}{3^n}\right\}$；　　（4） $\{x_n\}=\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$.

解　数列（1）按通项公式展开为

$$\{1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots\},$$

可以看出，该数列各项取常数 1 或 -1，与无限趋于一个确定的常数矛盾，故该数列发散．

数列（2）中，虽然通项也有无限增大的趋势，但却不是趋于常数，故数列发散．

数列（3）展开为

$$\left\{1-\frac{1}{3},1-\frac{1}{3^2},1-\frac{1}{3^3},\cdots,1-\frac{1}{3^n},\cdots\right\},$$

其通项无限接近于一个确切的常数 1，故数列收敛，记为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-3^n}=1.$$

同理，数列（4）展开为

$$\left\{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,\frac{(-1)^{n-1}}{n},\cdots\right\},$$

其通项无限接近于常数 0，故数列收敛，记为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=0.$$

从极限定义及例 1.2 的分析，容易得出收敛数列具有如下性质．

性质 1　如果数列收敛，则该数列的极限是唯一的．

此外，根据函数的概念，可以把数列看成自变量 n 与因变量 a_n 的一种函数依赖关系，也就是说将数列看成一种特殊的函数．这样，对于收敛数列通项 x_n，即函数值一定存在正数 M，使其对一切正整数 n，恒有 $|x_n|\leqslant M$，这样的数列是有界的．

性质 2　如果数列收敛，则该数列有界．

数列收敛则该数列有界，反之，有界的数列是否收敛呢？什么样的数列收敛呢？本书将在后面的章节中进行讨论，本节先来学习数列极限的一些计算方法.

三、数列极限的计算

例 1.3　求数列$\{x_n\}$：$x_n=\sqrt[n]{2}$的极限.

解　类似于例 1.2 中数列的展开，通过计算，

$$x_{10}=\sqrt[10]{2}=1.0718，$$

$$x_{100}=\sqrt[100]{2}=1.0070，$$

$$x_{1000}=\sqrt[1000]{2}=1.0007，$$

$$x_{5000}=\sqrt[5000]{2}=1.0001，$$

……

随着n的无限增大，x_n无限接近于 1，则由定义知数列$\{x_n\}$的极限是 1，即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1.$$

事实上这是可以证明的．更一般的，对于数$a(a>0)$，也有相应的结论

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ \ (a>0).$$

例 1.4　求数列$\{x_n\}$的极限，其中$x_n=\sqrt[n]{n}$.

解　观察数值

$$x_{10}=\sqrt[10]{10}=1.2589，$$

$$x_{100}=\sqrt[100]{100}=1.0071，$$

$$x_{1000}=\sqrt[1000]{1000}=1.0069，$$

$$x_{10000}=\sqrt[10000]{10000}=1.0009，$$

……

可以发现，这个通项值无限接近 1 而不会低于 1，可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

以上两个例题的结论在今后的学习中可直接使用.

通过前面的讨论，发现数列的极限可以通过计算数值结果进行观察．此外，还可以利用四则运算来进行数列极限的计算．接下来，介绍数列极限的四则运算法则.

数列极限的四则运算　设$n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别收敛于常数a和b，则：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\pm b$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\cdot b$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{a}{b}\ (b\neq 0)$.

实际上，四则运算法则可以记成“和、差的极限等于极限的和、差”“乘积的极限等于极限的乘积”“商的极限等于极限的商”.

例 1.5　求下列数列的极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n^2-1}$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

解　（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n^2}}{3-\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{2+0}{3-0}=\dfrac{2}{3}$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-0}{\dfrac{1}{2}}=1$.

本章第四、第五两节还将继续介绍求数列极限的其他计算方法.

四、斐波拉契数列

首先做一个拼图游戏，准备两个直角边分别为 3 和 8 的直角三角形以及两个上下底分别为 5 和 8 的直角梯形，如图 1.5 拼成一个边长为 8 的正方形和长宽分别为 5，13 的长方形. 计算拼好后的两个图形的面积，问题出来了，相同的几个小图形所拼成的两个大图形的面积居然不相等，$64\neq 65$？少了的 1 个面积到哪儿去了？

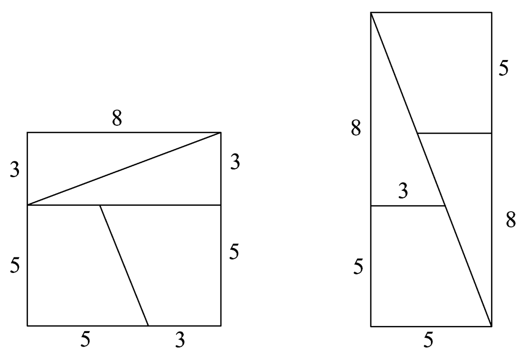

图 1.5

这是由 3, 5, 8, 13 这组数字得到的特殊规律还是一般规律？现在就来认识一个特殊的数列——斐波拉契数列．斐波拉契数列源于有趣的兔子问题．

兔子问题　假设每对兔子每月能生下一对小兔子（一雌一雄），该对小兔子从第三个月开始每月都生下一对小兔．请问：若不计病死，一对小兔子一年后能繁殖到多少对兔子？

由兔子问题所提出的假设，我们可以对应求出每月兔子对数，如表 1.1 所示.

表 1.1

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
兔子（对）	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

可以发现：

每月兔子对数＝上月兔子对数＋上上个月兔子对数．

若用 F_n 表示 n 个月后的兔子对数，则有 $F_0 = F_1 = 1$，当 $n > 1$，有

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

我们称具有这样规律并且推广到无穷多项的数列为斐波拉契数列．数列中的数称为斐波拉契数，比如刚才游戏中的 3, 5, 8 就是一组相邻的斐波拉契数．

通过递推关系 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，还可以得出斐波拉契数列的通项公式：

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

这个通项公式的奇特之处在于将有理数和无理数巧妙地结合在一起．除此之外，它还有许多神奇之处．比如，读者试着计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n},$$

可以得到什么结果？通过前面介绍的极限计算方法，容易得出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618.$$

这就是著名的黄金比．

事实上，还可以发现任何相邻的 3 个斐波拉契数列具备性质：

$$F_n^{\ 2} - F_{n-1}\cdot F_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

比如在刚才的拼图游戏中，选取出的数 5, 8, 13，有

$$8^2 = 64,\quad 5\times 13 = 65,$$

那么多出的 1 个面积究竟在哪儿了？我们通过建立直角坐标系，就能发现在长方形图形中的 A, B, C 三点是不共线的，其间存在一条狭小的细缝，而该细缝的面积正好是 1（见图 1.6）．利用斐波拉契数列的这条性质，选择的 3 个相邻的斐波拉契数越大，拼成的图形中间那条缝隙就越细，就越不容易被发现．

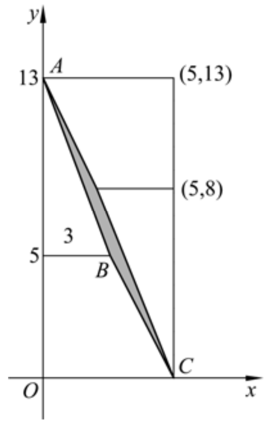

图 1.6

斐波拉契数列的几何特征与数值特征体现在生活的方方面面，小到植物的生长，大到太阳系，都能找到它的存在，更多神奇的现象留给读者去发现．

习题 1.2

1．观察下列数列，指出当 $n \to \infty$ 时它们是否有极限？有极限时指出其极限值:

（1） $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}$ ；　　（2） $\{x_n\} = \left\{\left(\dfrac{8}{7}\right)^{n-1}\right\}$ ；

（3） $\{x_n\} = \left\{\left(\dfrac{7}{8}\right)^{n-1}\right\}$ ；　　（4） $\{x_n\} = \{n+n^2\}$.

2．计算下列数列的极限．

（1） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{5n-1}$ ；　　（2） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}$ ；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{2^n}$ ；　　（4） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{2n^2-1}$ ；

（5） $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$ ；　　（6） $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$ ；

（7） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$ ；　　（8） $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{10^2}+\dfrac{3}{10^3}+\cdots+\dfrac{3}{10^n}\right)$.