眼科病床的合理安排

摘　要：

本文运用排队论、马氏链、计算机随机模拟和目标规划等模型解决了眼科病床的合理安排模型.

第一问，首先将该医院的眼科病床安排系统视为排队模型. 其次通过拟合优度检验等方法确定了排队系统中的病人到达时间间隔等参数的理论分布，从而确定了$M/G/79/\infty/\infty$的排队模型，接着考虑病人类型的非强占优先约束，引入马尔科夫模型及状态转移方程来刻画. 考虑到内部参数的随机性，通过计算机仿真模拟的方法求出排队系统的相关运行评价指标，其中平均等待队长为 97.128 人，平均等待时间为 11.177 天. 最后利用这些指标建立了模糊综合评价模型，评价结果显示，现有病床安排规则效率较低.

第二问，以提高病床安排效率为宗旨，建立了具有随机因素的优化模型，并利用计算机模拟仿真算法，提出了新的手术时间分配方案，给出了基于每个病人的实时入院时间安排. 最后通过模糊评价模型验证了新方案较现有方案的优势，新方案的平均等待队长为 50.5 人，平均等待时间为 5.81 天.

第三问，以当前住院病人和等待病人的统计数据为输入变量，通过模拟每天病人的出院及外伤病人的到达等过程预测了门诊病人的等待时间区间. 同时，以缩短时间区间范围、提高预测精度为目标建立了区间选择模型.

第四问，首先给出了周六、周日不做手术的手术时间分配标准，进而求出了每个病人的实时入院时间安排. 其次建立了以手术安排时间为决策变量，以模糊综合评价函数值最低为目标的优化模型，判断该医院是否需要调整手术时间安排. 结果显示，不需要调整手术时间安排.

第五问，建立了五个并联的服务系统，并建立了以不同病患类型的规模为主要约束，所有病人的平均逗留时间最短为目标的优化模型，以求得各类患病类型的病床分配比例. 通过 Lingo 编程求得白内障（单眼）、白内障（双眼）、青光眼、视网膜疾病、外伤五类病患的病床分配分别为：19、20、6、21、13（张）.

本模型结合 Matlab、Excel 和 Lingo 等软件，主要使用了排队论、随机模拟等方法，再结合多种随机数学模型，多角度研究了眼科病床的合理安排问题. 本文不仅评价了现有的眼科病床安排系统，还通过优化模型给出了相对较优的病床安排标准，为该医院病

床安排提供了科学的理论依据.

关键词：排队论；计算机模拟；马尔科夫过程；优化；综合评价

1　问题重述

医院就医排队是大家都非常熟悉的现象，它以这样或那样的形式出现在我们面前. 例如，患者到门诊就诊、到收费处划价、到药房取药、到注射室打针、等待住院等，这些都需要排队等待接受某种服务.

我们考虑某医院眼科病床的合理安排的数学建模问题.

该医院眼科门诊每天开放，住院部共有病床 79 张. 该医院眼科手术主要分为四大类：白内障、视网膜疾病、青光眼和外伤. 附录中给出了 2008 年 7 月 13 日至 2008 年 9 月 11 日这段时间里各类病人的情况.

白内障手术较简单，而且没有急症. 目前，该院是每周一、周三做白内障手术，此类病人的术前准备时间只需 1 ~ 2 天. 做两只眼的病人比做一只眼的要多一些，大约占到 60%. 如果要做双眼，则是周一先做一只，周三再做另一只.

外伤疾病通常属于急症，病床有空时立即安排住院，住院后第二天便会安排手术.

其他眼科疾病比较复杂，有各种不同情况，但大致住院以后 2 ~ 3 天就可以接受手术，主要是术后的观察时间较长. 这类疾病手术时间可根据需要安排，一般不安排在周一、周三. 由于急症数量较少，建模时这些眼科疾病可不考虑急症.

该医院眼科手术条件比较充分，在考虑病床安排时可不考虑手术条件的限制，但考虑到手术医生的安排问题，通常情况下白内障手术与其他眼科手术（急症除外）不安排在同一天做. 当前，该住院部对全体非急症病人是按照 FCFS（First come, First serve）规则安排住院，但等待住院病人队列却越来越长，医院方面希望能通过数学建模来帮助他们解决该住院部的病床合理安排问题，以提高医院资源的有效利用率.

问题一：试分析确定合理的评价指标体系，用以评价该问题的病床安排模型的优劣.

问题二：试就该住院部当前情况，建立合理的病床安排模型，以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院. 并对建立的模型利用问题一中的指标体系做出评价.

问题三：作为病人，自然希望尽早知道自己大约何时能住院，所以能否根据当时住院病人及等待住院病人的统计情况，在病人门诊时即告知其大致入住时间区间.

问题四：若该住院部周六、周日不安排手术，请重新回答问题二，医院的手术时间安排是否应做出相应调整.

问题五：有人从便于管理的角度提出建议，在一般情形下，医院病床安排可采取使各类病人占用病床的比例大致固定的方案，试就此方案，建立使得所有病人在系统内的平均逗留时间（含等待入院及住院时间）最短的病床比例分配模型.

2　问题分析

2.1　问题一的分析

问题一要求我们分析并且确定合理的评价指标体系，并运用该评价指标体系来评价该问

题的病床安排模型的优劣. 显而易见，该问题是要我们建立一个评价模型. 因此，首先，我们从问题可以分析得出，眼科病床的安排是一个排队模型，并且除“外伤”类眼科疾病之外都遵守“先到先服务”的规则. 所以，我们先从问题所给的数据入手，分析历史数据中各类病人的等待住院时间、术后观察时间、治疗总时间等数据，然后通过该数据，得到排队模型中各个病人到达的时间分布及服务时间分布. 其次，依靠这些分布，我们建立排队论的理论模型，并求解出病床安排的排队模型的各类指标：队长、等待队长、平均等待时间等. 由于该排队模型只是一个理论模型，为了验证该理论模型的合理性和正确性，我们继续采取随机模拟的方法来模拟该排队模型，以及模拟排队模型的指标. 得到这些指标之后，为了综合评价该医院病床安排的合理性，最后，我们基于排队模型的各项指标，采取模糊评价法建立综合评价模型. 因此，该医院病床安排的优劣与否，可以通过排队模型的分指标以及综合评价模型的综合指标来评价 (见图 2.1).

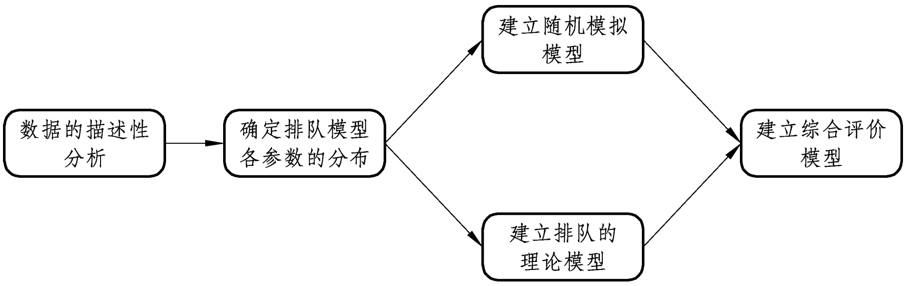

图 2.1　问题一的流程图

2.2　问题二的分析

问题二要求我们根据医院当前的住院情况，建立一个合理的病床安排模型，以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院. 因此，我们期望先建立一个优化模型，通过优化模型求解出一个最优或者较优的方案来安排床位. 由于随机因素占有较大的比例，初步认为该方案求解存在很大的困难.

因此，我们从问题一所得到的优劣评价结果出发，期望发现该医院在某方面存在的弊端. 根据最初的数据分析，我们大体上认为，该弊端主要出现在病人住院到病人第一次手术时间的安排上. 因此，我们可以通过对弊端的修改，建立一个优先标准. 然后基于上述方案，通过计算机模拟，模拟出排队模型中的各类运行指标，再通过第一问的综合评价模型，与医院原有的病床安排模型进行比较.

2.3　问题三的分析

问题三需要我们根据当时住院病人以及等待病人的统计情况，告知门诊病人的住院时间区间. 因此，我们期望先通过用计算机模拟的形式，模拟出一系列病人的等待时间，并使这些等待时间构成一个区间. 但是这些区间因为计算机模拟的不稳定性也会出现不稳定的波动，因此，我们再建立一个区间的选择模型，以构造出更好和更加精确的区间，并以此来预报门诊病人的入住时间区间.

2.4 问题四的分析

问题四是问题二的延续. 题目要求我们在周六、周日不安排手术，因此，我们需把该要求加入到问题二中建立的一个标准之中. 然后与第二问相似地，用模拟的方法求得该床位安排模型的各项指标.

接着，我们考虑是否需要调整手术时间. 这里，我们通过建立优化模型来判断，并以问题一中的综合评价函数值最低作为本优化模型的目标，决策变量为手术时间的安排. 若求得的最优时间安排与医院所给的时间安排不同，那么医院的手术时间安排需要调整.

2.5 问题五的分析

问题五同样是一个优化模型，该模型的目标是让所有病人的平均等待时间最短. 因此，我们认为，该优化模型的约束有病患规模约束、非负约束、总数约束三种. 又由于，若给各类病人分配病床，那么该医院的排队模型则变换为多系统多服务台的模型，并且系统与系统之间不相互影响. 因此，我们打算采用历史数据以及计算机模拟的方法来计算该优化模型中的指标，然后用 Lingo 得到一个最优的病床比例分配模型.

3 模型假设

（1）由于历史数据足够多，故假设由历史数据可以反映未来病患到达的规律.

（2）当前，该住院部对全体非急诊病人是按照 FCFS（First come, First serve）规则安排住院的.

（3）白内障手术安排在周一、周三，其他眼科疾病一般不安排在这两天.

（4）病人若在该医院门诊，那么必须在该医院住院并做手术.

（5）住院部的所有病床都可以正常工作.

（6）术前准备时间不能做过大的调整.

（7）一张病床只服务一个病人，不考虑同时服务多个病人的情形.

4 符号说明

$wait_i$：第 i 个病人的等待入院时间；

$enter_i$：第 i 个病人的入院时间；

$outpatient_i$：第 i 个病人的门诊时间；

$wait1_i$：第 i 个病人的第一次手术等待时间；

$operation1_i$：第 i 个病人的第一次手术时间；

$operation2_i$：第 i 个病人的第二次手术时间；

$watch_i$：第 i 个病人的术后观察时间；

$leave_i$：第 i 个病人的术后出院时间；

$P_n(t_1,t_2)$：在时间段 $[t_1,t_2)$ $(t_2>t_1)$ 内有 n $(n\geqslant 0)$ 个病人到达的概率；
λ：在单位时间内平均到达的病人个数；
L_q：系统中排队等待服务的病人数，即等待队长；
L_n：正在医院住院的病人数；
W_q：一个病人在系统中排队等待住院的时间，即等待时间；
ρ：系统服务强度；
f：综合评价函数；
x_{ij}：第 i 类病患在第 j 天入院的人数；
y_{ij}：第 i 类病患在第 j 天出院的人数；
w_i：第 i 类病患的病床安排比例；
ϖ_i：第 i 类病患占总数的比例.

5 问题一的模型建立与求解

问题一要求分析确定合理的评价指标体系，并用以评价该问题的病床安排模型的优劣. 我们认为由以下四个步骤组成：

步骤一：数据的描述分析，其目的是研究数据的基本特点.

步骤二：医院病床的排队模型的建立，其目的是通过排队系统模型来描述各类指标以及状态转移方程.

步骤三：建立计算机模拟模型，以此来计算该排队模型中的各类运行指标.

步骤四：建立综合评价模型，并通过该模型对步骤三得到的指标进行多指标综合评价，以判断该病床安排模型的优劣.

5.1 数据的描述性分析

5.1.1 表格的基本分类

本文从题目所给的数据观察到该数据分为三个部分：

第一个表格：从 2008 年 7 月 13 日开始的门诊病人所入院治疗的各个阶段的时间数据，并且这些病人都已出院.

第二个表格：2008 年 8 月 15 日到 2008 年 9 月 9 日的 79 个病人，这些病人都已入院并接受手术，但都在术后观察阶段，没有出院. 因此，该表格只有病人的门诊、入院、手术时间.

第三个表格：2008 年 8 月 30 日到 2008 年 9 月 11 日的部分病人，他们都因医院床位已满而不能入院，因此，该表格只有这些病人的门诊时间.

5.1.2 相关指标的定义

为了能够更好地了解该医院的病床安排状况，本文对题目所给表格中的所有相关数据进行了描述性分析. 首先，我们把该数据导入 Excel 表格之中，通过 INT 函数计算出各个病人

的等待入院时间、第一次手术等待时间、术后观察时间等.

这些指标的计算公式如下（其中下标 i 表示第 i 个病人）:

定义 1（等待入院时间）:

等待入院时间($wait_i$)=入院时间($enter_i$) – 门诊时间($outpatient_i$).

定义 2（第一次手术等待时间）:

第一次手术等待时间($wait1_i$) = 第一次手术时间($operation1_i$) – 入院时间($enter_i$).

定义 3（术后观察时间）:

术后观察时间($watch_i$) = 出院时间($leave_i$) – 第一次手术时间(或第二次手术时间)($operation1_i$ / $operation2_i$).

定义 4（医院服务时间）:

医院服务时间($service_i$) = 出院时间($leave_i$) – 入院时间($enter_i$).

通过上式，我们可以得到上述数据的图像，如图 5.1 ~ 5.3 所示.

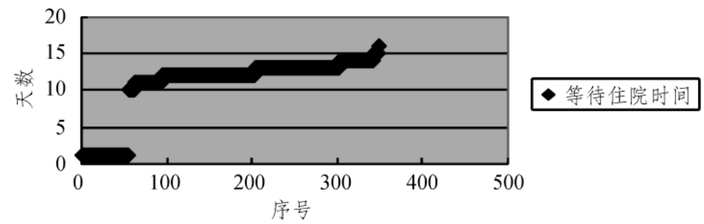

图 5.1　等待住院时间数据图

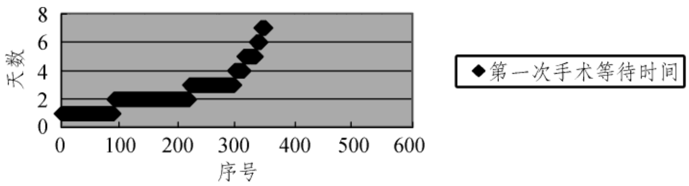

图 5.2　第一次等待时间数据图

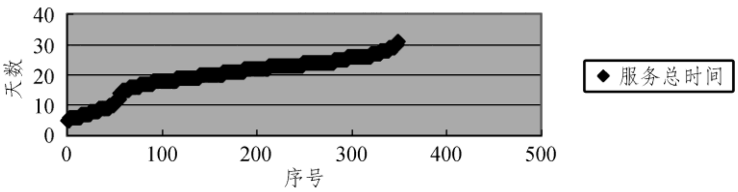

图 5.3　服务总时间图

从图 5.1 可以看出，病人的等待住院时间在 1 天的基本都是患有外伤的（急诊），而患有其他眼科疾病的病人的等待住院时间都在 10 天以上. 这可以说明，该表中的数据都符合题中所给的病床安排规则，没有发现特殊的、错误的病床安排事件. 同时，等待时间偏长也表明目前排队系统效率偏低.

通过上述数据描述图可以看到，病人等待住院时间、手术时间等数据都因个体、病情的差异而出现了显著的随机性变化，并且部分数据的变化幅度较大.

为了更好地刻画这些数据的随机性特点，结合本题题意，我们接下来考虑具有优先等级的排队模型.

5.2 医院病床安排的排队模型

排队是日常生活中常见的一种现象. 在医院病床安排模型中，病人与病床构成了“被服务者”和“服务设施”. 当病人进入服务系统后若病床没有空余，病人不能立即得到服务——手术，因此，就出现了排队现象.

根据本问题特点，该医院病床安排排队系统具有以下特点：

（1）输入过程：

① 病人的总体是无限的，并且病人的到来方式可以假设为一个一个地到来. 即在一个很小的时间区间里，病人总是单个人到来.

② 病人相继到达的时间是随机型的，并服从一定的随机分布.

③ 病人的到达是相互独立的.

④ 输入过程是平稳的.

（2）排队规则：

该排队模型具有以下规则：

① 全体非急诊病人是按照 FCFS（First come, First serve）规则安排住院的.

② 外伤疾病通常属于急症，病床有空时立即安排住院.

因此，在该排队模型中，排队病人分成了两个等级：非急诊病人与急诊病人. 其中急诊病人享有更高的优先权，该排队模型属于非强占有限制排队模型.

（3）服务机构：

① 按题中所说：该医院眼科门诊每天开放，住院部共有病床 79 张，即有 79 张病床为病人服务；并且可以认为，该病床的服务是互不干涉的相互独立的服务台. 因此，该服务系统的服务台数量为 79.

② 由于一张病床只能容纳一个病人，所以该服务机构的服务方式为只对单个病人进行服务.

③ 在该排队模型中，服务时间是随机型的. 并且从历史数据来看，服务时间的分布是平稳的，分布的期望值、方差等参数都不受时间影响.

这些特点以及相关的参数在后续小节中进行更详细的阐述（见图 5.4）.

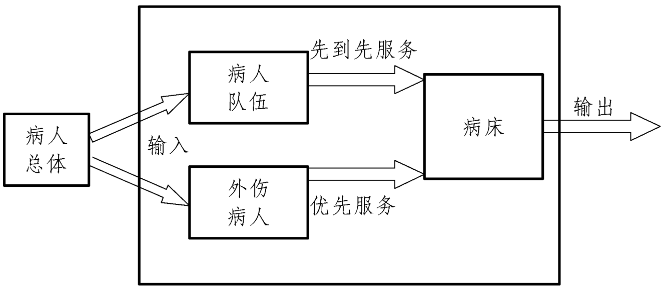

图 5.4　病床安排服务系统

5.2.1　排队模型中各类参数分布的确定

本文研究排队系统中到达时间间隔和服务时间等参数的分布，以此来确定排队论模型的类型.

1）到达时间间隔分布的确定

设 N_t 表示在时间段 $[0,t)$ 内到达的病人数，$P_n(t_1,t_2)$ 表示在时间段 $[t_1, t_2)$ $(t_2>t_1)$ 内有 n $(n\geqslant 0)$ 个病人到达的概率，即

$$P_n(t_1,t_2)=P\{N(t_2)-N(t_1)=n\}.$$

在一般的排队论模型中，$P_n(t_1,t_2)$ 要服从泊松过程，因此首先要验证病人的到达流属于泊松流. 下面通过拟合优度检验进行验证：

Step1：首先由样本给出 λ 的最大似然估计 $\hat{\lambda}$. 由于在泊松过程中，$E[N(t)]=\lambda t$, $D[N(t)]=\lambda t$，则可以通过该式，求得泊松过程中的参数 λ. 由于参数 λ 代表在单位时间内平均到达的病人个数，由 $E[N(t)]=\lambda t$，取单位时间 $t=1$，可以得出参数 $\lambda=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}N_i}{n}$. 针对本文数据，通过 Excel 求解得到 $\lambda=8.69$.

Step2：计算 p_i 的最大似然估计 $\hat{p}_i=p_i(\hat{\lambda})$.

Step3：计算检验统计量 $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\dfrac{(n_i-n\hat{p}_i)}{n\hat{p}_i}$，并且 χ^2 统计量在原假设 H_0（病人到达时间服从泊松分布时）成立时近似服从自由度为 $k-r-1$ 的 χ^2 分布，于是构造假设检验的拒绝域为 $\{\chi^2\geqslant\chi^2_{1-\alpha}(k-r-1)\}$.

通过上述步骤，我们计算出表 5.1 所示的数据.

表 5.1　拟合优度检验数据表

i	n_i	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$(n_i-n\hat{p}_i)/n\hat{p}_i$
3	2	0.018403	1.122584	0.685792
4	2	0.039981	2.438814	0.078955
5	5	0.069486	4.238658	0.136751
6	7	0.100639	6.13899	0.120759
7	8	0.124936	7.621118	0.018836
8	6	0.135712	8.278439	0.627085
9	11	0.131038	7.993293	1.130984
10	3	0.113872	6.946172	2.241849
11	5	0.089959	5.487476	0.043305
12	4	0.065145	3.973847	0.000172
13	3	0.043547	2.656364	0.044454
14	2	0.02703	1.648843	0.074787
15	2	0.01566	0.95523	1.142704
16	1	0.008505	0.518809	0.4463
合计	61	0.983912	60.01864	6.792733

若取显著性水平 $\alpha=0.05$，则 $\chi^2_{1-\alpha}(k-r-1)=\chi^2(14)=23.6848$. 本题中，$\chi^2=6.792733$

<23.6848，故接受原假设，则可以认为病人的到达形成泊松流.

2）服务时间分布的确定

下面我们对病人服务时间的分布进行研究. 通过历史数据绘制图表 5.5.

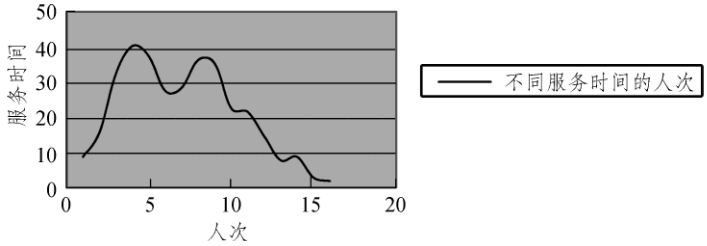

图 5.5　不同服务时间的人次折线图

从该图可以看出，病人的服务时间不服从负二项分布或爱尔朗分布，并且通过假设检验（原假设为病人的服务时间服从泊松流）得到的 χ^2=38.84176，远远大于接受原假设的条件.

为了得到服务时间的经验分布，首先需要统计出病人被服务的全部时间 t，并用集合 T 表示，其中 $t \in T = \{0,1,2,3,\cdots\}$，然后统计出各项时间发生的次数 N_t. 由大数定律，因为历史数据足够多，则用频率估计概率：

$$p_t = \frac{N_t}{N}，其中 N = \sum_{t=1} N_t$$

可以求得各个时间内服务人数的一个概率分布列. 因此，单位时间内平均被服务的病人个数为 $u = \sum_{t=1} p_t N_t$.

3）医院排队模型运行指标的选择

与此同时，除了确立排队系统的特点及参数外，在排队系统中，主要是研究排队系统运行的效率，估计服务质量，确定系统参数的最优值，以决定系统结构是否合理，并研究设计改进措施. 因此，研究排队问题，首先要确定用以判断系统运行优劣的基本量化指标，然后求出这些指标的概率分布和数字特征[1].

在本文的医院病床安排排队模型中，主要考虑病人与医院双方的满意度问题. 对于医院来说，自然希望自己的收益更高，因此，病床的被占用率越高，表示医院可以通过病人住院收取更多的费用，其满意度就会高. 对于病人来说，当他在该医院确诊之后，自然会关注自己是否能马上住院，因此往往关注前面排队的病人数和自己入院需要等待的时间. 因此，在该医院排队模型中，我们主要考虑以下指标：

（1）等待队长：指在系统中排队等待服务的病人数，其期望值记作 L_q，即 $L_s = L_q + L_n$，其中 L_n 为正在医院住院的病人数，L_s 为队长.

（2）等待时间：指一个病人在系统中排队等待住院的时间，其期望值记作 W_q，即 $W_s = W_q + \tau$，其中 τ 为住院服务时间，W_s 为逗留时间.

（3）系统服务强度：指病床被占用的概率，用 ρ 表示.

5.2.2 非强制优先制 $M/G/79/\infty/\infty$病床排队模型

1）病床排队的基本模型

病床安排模型是一个单队、并列的多服务台情形. 医院在安排病床时，认为病人的到来数量是无限的，并且可以认为系统的容量没有限制，即病人在该医院门诊后，不会因为等待队长过长而转移到其他医院住院.

由 5.2.1 节中各类参数分布的确定可知，在医院排队模型中，病人的到达服从泊松流，而服务时间又服从一般分布，并且服务台总数为 79 台. 因此，我们采取排队论中的一般服务时间模型 $M/G/79/\infty/\infty$模型.

2）非强制优先制因素的考虑

因为外伤病人大多属于急诊病人，一旦病床有空，就会立即安排其入院，因此外伤病人享有比其他病人更高的优先权.

当一个外伤病人在门诊确诊之后，需要入院接受手术治疗，而病床都有其他病人，他不能强占病床，只能排在无优先权病人的前面. 另外，如果还有其他的外伤病人比其早到，则应继续采取 FCFS 原则，他只能排在这些外伤病人的后面. 因此，外伤病人的到来可以用图 5.6 描述.

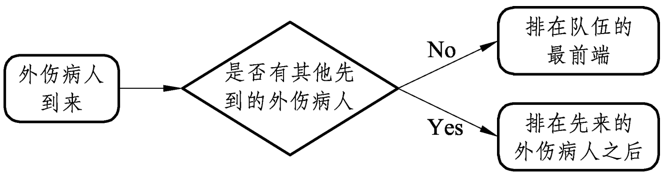

图 5.6 外伤病人优先排队模型

通过上述分析，我们最终建立了非强制优先制 $M/G/79/\infty/\infty$病床排队模型.

该模型中，各种状态转移方程如下所示.

设在任意时刻 t 的系统状态为 n 的概率为 $P_n(t)$，在上面的模型中，可以求得单位时间内平均到达的病人个数 λ 和单位时间内平均被服务的病人个数 u. 因此，该系统状态的转移方程如下：

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + uP_1 = 0, \\ \lambda P_{n-1} + u(n+1)P_{n+1} - (\lambda + nu)P_n = 0, & n \geqslant 1, \\ cuP_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + cu)P_n, & n > c. \end{cases}$$

这是关于 P_n 的差分方程，它表明各个状态间的转移关系. 通过上述方程，可以求得医院病床不同人数的状态间的稳定状态.（可以用图例 5.7 表示如下）

注：$P_n(t)$是一个关于时间的变量，并且优先原则需依靠 $P_n(t)$来体现.

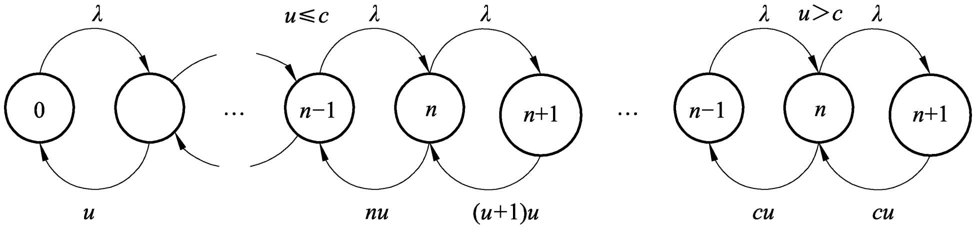

图 5.7 各类状态转移图

在 5.2.1 节中，我们得到了 $\lambda = 8.69$. 然后通过服务时间的一般分布求出其期望值，从而可以计算出平均服务时间 $\bar{\tau}$，再通过 $u = \frac{1}{\tau}$ 可以算出 $u = 0.11$.

通过上述模型中参数的求解，我们可以得到该状态转移方程：

$$\begin{cases} -8.69P_0 + 0.11P_1 = 0, \\ 8.69P_{n-1} + 0.11(n+1)P_{n+1} - (8.69 + 0.11n)P_n = 0, & n \geqslant 1, \\ 79 \times 0.11P_{n+1} + 8.69P_{n-1} = (8.69 + 79 \times 0.11)P_n, & n > c. \end{cases}$$

该排队模型可以用图 5.8 描述如下.

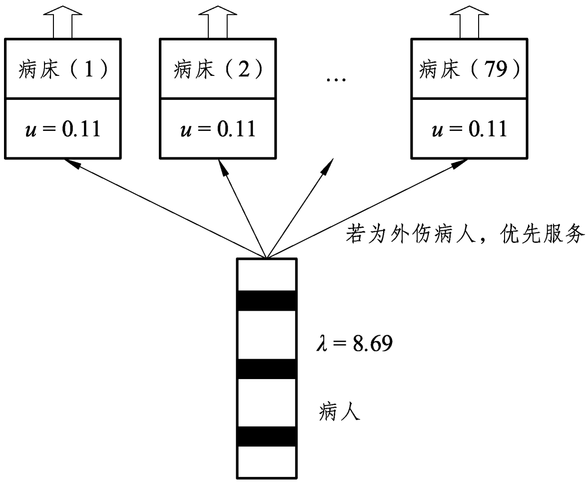

图 5.8　病床安排的排队模型图

3）马尔科夫状态转移模型的建立

由于该非强制优先制 $M/G/79/\infty/\infty$ 病床排队模型是一个具有随机因素影响的动态系统，系统在每个时期所处的状态都是随机的，从这个时期到下个时期的状态都按照一定的概率进行转移，并且下个时期的状态只取决于这个时期的状态和转移概率，与以前各时期的状态无关，因此这个系统的性质具有马尔科夫性.

可以把病人的等待作为第一种状态，病人的入院作为第二种状态，病人的出院作为第三种状态. 记 $a_{ki}(n)$ 表示第 k 类病患第 i 种状态的概率，p_{kij} 表示第 k 类病患的状态转移概率，并且 p_{kij} 是一个关于状态 n 的函数，即 $p_{kij} = p_{kij}(n)$. 因此，状态为 $n+1$ 的状态概率可由全概率公式得到：

$$\begin{cases} a_{k1}(n+1) = a_{k1}(n)p_{k11} + a_{k2}(n)p_{k21} + a_{k3}(n)p_{k31}, \\ a_{k2}(n+1) = a_{k2}(n)p_{k12} + a_{k2}(n)p_{k22} + a_{k3}(n)p_{k32}, \\ a_{k3}(n+1) = a_{k3}(n)p_{k13} + a_{k2}(n)p_{k23} + a_{k3}(n)p_{k33}, \end{cases}$$

并且，由于出院的状态不会对病人的入院和等待造成任何影响，因此 $p_{k31}, p_{k32} = 0$；出院以后不会再入院，因此 $p_{k33} = 1$.

又因为这是一个非强制优先制模型，当外伤病人来医院门诊时，其他病人需要让其优先入院，该优先行为可以如下体现：

$$当 n \geqslant 1 时，\quad p_{512} \geqslant \sum_{k=1}^{4} p_{k12}.$$

意思是说，当状态为 1 时，第五类（外伤）病人从等待到入院的概率要大于其他病人从等待到入院的概率之和.

由于在上述模型中，随机因素占有很大的比例，并且 $M/G/79/\infty/\infty$ 的非强占优先制排队模型目前也没有成熟的求解方法，因此可以考虑引入计算机模拟的算法来求解本问题.

5.3 计算机模拟

在医院病床安排的系统中，出现了很多具有随机因素的变量. 例如：病人的到来人数和时间（在 5.2 中，我们已经证明了病人的到来人数服从泊松流）；另外，病人的患病类型也属于随机变量. 除此之外，每个病人的等待时间以及服务时间都具有不确定因素. 因此，为了更准确地评价该系统，我们将采用模拟的方法对病人的病床安排模型进行求解.

计算机模拟的主要过程是通过计算机产生随机数，并由此模拟排队模型中的各类随机因素，从而可以更加准确地确定排队模型中的各项运行指标.

5.3.1 随机因素概率分布的确定

为了找到各个指标的分布，我们通过题中所给的数据，利用数理统计的方法分别统计出每类病患者的人数，简记为 n_i，其中 $i=1,2,3,4,5$ 分别为患有白内障（单眼）、白内障（双眼）、青光眼、视网膜疾病、外伤的人数，则患病的总人数记为 $n=\sum_{i=1}^{5} n_i$. 因此，由大数定律，用频率来估计概率，每类患病的概率为

$$p_i = \frac{n_i}{n}.$$

通过以上概率，我们可以得到每类患病的概率分布（见表 5.2）.

表 5.2 各类病患的概率分布

统计数据	白内障（单眼）	白内障（双眼）	青光眼	视网膜疾病	外伤
n_i	100	133	63	170	64
p_i	0.1887	0.2509	0.1188	0.3208	0.1208

同理，通过这种方法，我们可以模拟出各类病患的等待时间以及服务时间的分布.（由于方法类似，则模型不在此重复，数据表格见附件）

5.3.2　计算机模拟流程（见图 5.9）

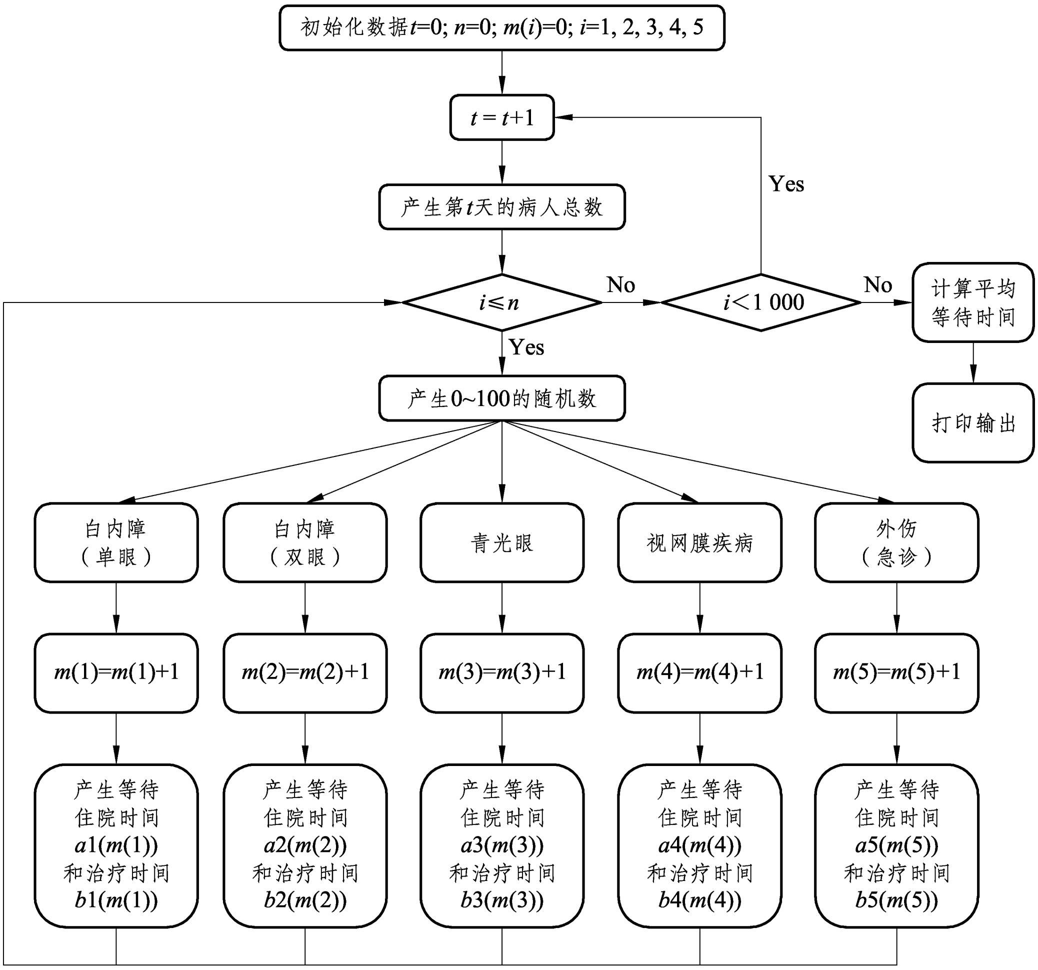

图 5.9　病床安排的模拟模型

5.3.3　排队系统运行指标的确定

我们首先通过模拟得到每类病患的等待时间 a_i 和服务时间 b_i，然后通过下式计算得到总的病患者的平均等待时间和平均服务时间：

$$W_q = \sum_{i=1}^{5} p_i \times a_i \text{ ,}\quad \overline{\tau} = \sum_{i=1}^{5} p_i \times b_i .$$

得到了等待时间之后，由于本模型属于随机排队模型，因此，可以用 Little 公式：

$$L_q = \lambda \times W_q$$

计算出该模型的平均等待队长，其中 λ 表示单位时间内顾客到达的平均数. 与此同时，该系统的服务强度 ρ 也可以用 $\rho = \dfrac{\lambda}{cu}$ 求出.

通过 Matlab 编程，最终求得表 5.3 所示的结果.

表 5.3 各类排队运行指标的模拟结果

λ	u	$\overline{\tau}$	W_q	L_q	ρ
8.69	0.11	10.03	11.177	97.128	1

从表 5.3 可以看出，该医院的等待队长太长，以至于该医院的病床一直处于服务期，服务强度达到最高. 每位病人几乎要等 11.177 天才能住院. 因此，该医院的病床安排并不是很合理.

5.3.4 历史数据检验分析

由于历史数据较多，而且该医院的病床安排模型运行时间较长，因此，我们可以认为历史数据能够反映该排队系统的运行特征. 本节将利用实际数据检验计算机模拟的正确性.

在 5.1 节中，我们令等待住院时间为 $wait_i = enter_i - outpatient_i$，可以求出该等待住院时间的期望：

$$E[wait_i] = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n} \times wait_i)\text{；}$$

同理，也可以求得服务时间的期望：

$$E[sevice_i] = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n} \times sevice_i).$$

通过 Excel 表格中的函数功能，我们求得表 5.4 所示的数据.

表 5.4 平均等待时间与服务时间结果对比

项　目	平均等待时间（天）	平均服务时间（天）
历史数据结果	10.71	10.00
计算机模拟结果	11.18	10.03
变动比例	4.3%	0.3%

将历史数据结果和计算机模拟结果进行比较，可以发现两者差距不是很大，可以认为模拟结果合理.

5.4 综合评价模型的建立

多指标综合评价在用计算机模拟得到排队模型的一般研究指标之后，我们可以对该医院的病床安排模型有一个大致的、分指标的评判，但是本文更希望建立一个更加有适用性的综合评价模型.

在上文中，我们分析了该病床安排模型中需要考虑的三个指标——等待队长、等待时间、服务强度，而这些指标都没有一个客观、准确的评价标准来刻画优劣与否，因此这些指标的好坏与否都具有一定的模糊性. 所以，本文引入模糊评价的方法可以模糊地确定各类指标的

好坏，并把这些指标进行定量分析. 然后通过对指标的线性加权的评价方法来综合评价该病床安排模型的合理性.

为了建立一个合理的综合评价模型，我们首先采用模糊评价的方法量化各类评价指标.

5.4.1 各类指标的隶属化

对于一个病床安排模型，我们要考虑两方面的因素：病人和医院. 对于病人来说，病人最在乎的是等待队长和平均等待时间，这两者越大，病人会越不满意. 对于医院来说，服务强度越大，说明医院的生意越好，因此医院越满意. 所以我们认为，等待队长和平均等待时间以及服务强度可以综合评价该医院的病床安排情况.

然后，我们对各项指标进行处理，本文采用模糊隶属函数对指标进行统一处理. 下面以等待队长为例. 我们定义当等待队长取下列值时，病人的不满意度也随之如下变化，如表 5.5 所示.

表 5.5 病人对于等待队长的不满意度刻画

不满意度	很满意	满意	较满意	不太满意	很不满意
等待队长（≤）	10	20	30	40	50

注：当队长大于 50 人时，可以认为病人已经“麻木”，他们的态度也是很不满意.

为了连续量化指标，这里选取偏大型柯西分布和对数函数作为隶属函数：

$$f(x)=\begin{cases}[1+\alpha(x-\beta)^{-2}]^{-1}, 1\leqslant x\leqslant 3,\\ a\ln x+b, \qquad 3\leqslant x\leqslant 5,\end{cases}$$

其中，α, β, a, b 为待定常数.

当很满意时，隶属度为 0，即 $f(10)=0$;

当较满意时，隶属度为 0.8，即 $f(30)=0.8$;

当很不满意时，隶属度为 1，即 $f(50)=1$.

由于在上述定义中，自变量与因变量的数量级之比有 50 倍之多，拟合出来的参数可能是 10^{-3} 数量级，这往往会造成最终拟合出来的参数不精确. 为了使各类待定常数更加精确，我们让队长的数值缩小为原来的 $\frac{1}{10}$，这样减小了它们之间的数量级差距，即 $x'=\frac{x}{10}$. 因此，上述隶属函数的定义可以更改为：

$$f(1)=0\ ; \quad f(3)=0.8\ ; \quad f(5)=1\,.$$

最终求得 $\alpha=1.1086,\ \beta=0.8942,\ a=0.3915,\ b=0.3699$. 则

$$f(x)=\begin{cases}[1+1.1086(x-0.8942)^{-2}]^{-1}, 1\leqslant x\leqslant 3,\\ 0.3915\ln x+0.3699, \qquad 3\leqslant x\leqslant 5,\\ 1, \qquad x>5.\end{cases}$$

该隶属函数的图像如图 5.10 所示.

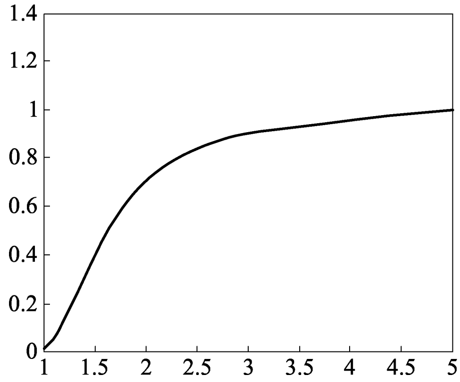

图 5.10　隶属函数的图像

同理，按照该步骤，我们也可以求得平均等待时间、服务强度的隶属函数.

实际上，更简便的方法是，我们只需对平均等待时间、服务强度的指标数值大小做一定的处理，而且处理标准的五个间隔也取为 1、2、3、4、5，这样就可以采取与上述同样的隶属函数. 于是，可以定义为表 5.6 的形式.

表 5.6　病人对于等待时间、服务强度的不满意度刻画

不满意度	很满意	满意	较满意	不太满意	很不满意
等待时间（≤）	2	4	6	8	10
$W_q' = W_q / 2$ 处理后	1	2	3	4	5
服务强度（≥）	1	0.8	0.6	0.4	0.2
$\rho' = 6-5\rho$ 处理后	1	2	3	4	5

于是，通过前面的变换，我们就把等待队长、等待时间、服务强度统一成同一种隶属函数.

5.4.2　线性加权评价模型的建立

在开始的分析中，我们讨论了等待队长、等待时间、服务强度三类指标对医院和病人的意义，而在一个病床安排的评价模型中，病人的态度和医院的态度应该属于同等重要. 然而医院的满意系统只包括服务强度，病人的满意系统包括等待队长和等待时间两类指标，因此，本文认为服务强度的系数可以取为 0.5，同样病人的满意系统（等待队长和等待时间两类指标一起）的系数为 0.5.

再者，对于病人来说，一个病人去医院看病，也要同样考虑等待队长和等待时间，因此，在病人的满意系统里等待队长和等待时间也是同等重要的，因此各自的系数也为 0.5.

综上分析，该线性加权评价模型可以如下建立，令：

$$f = 0.5\times f(\rho) + 0.5\times(0.5\times f(W_q) + 0.5\times f(L_q)),$$

其中 $f(\rho)$ 为服务强度的隶属函数， $f(W_q)$ 为等待时间的隶属函数， $f(L_q)$ 为等待队长的隶属函数，且 $f(\rho)$, $f(W_q)$, $f(L_q)\in[0,1]$. 通过代入该排队模型的这三类指标，可以得到线性加权模型的分数. 分数越高，表示该病床的安排模型越不好.

综上所述，该模糊综合评价模型表述如下：

$$f=0.5\times f(\rho)+0.5\times(0.5\times f(W_q)+0.5\times f(L_q)) ,$$

其中，各项指标确定如下：

$$\begin{cases}
\lambda=8.69;\ u=0.11, \\
W_q\text{由计算机模拟得出}, \\
L_q=\lambda\times W_q, \\
\rho=\dfrac{\lambda}{cu}, \\
f(L_q)=\begin{cases}
\left[1+1.1086\left(\left(\dfrac{L_q}{10}\right)-0.8942\right)^{-2}\right]^{-1}, & 10\leqslant L_q\leqslant 30, \\
0.3915\ln\dfrac{L_q}{10}+0.3699, & 30\leqslant L_q\leqslant 50, \\
1, & L_q>50,
\end{cases} \\
f(W_q)=\begin{cases}
\left[1+1.1086\left(\left(\dfrac{W_q}{2}\right)-0.8942\right)^{-2}\right]^{-1}, & 2\leqslant W_q\leqslant 6, \\
0.3915\ln\dfrac{W_q}{2}+0.3699, & 6\leqslant W_q\leqslant 10, \\
1, & W_q>10,
\end{cases} \\
f(\rho)=\begin{cases}
[1+1.1086((6-5\rho)-0.8942)^{-2}]^{-1}, & 0.6\leqslant W_q\leqslant 1, \\
0.3915\ln(6-5\rho)+0.3699, & 0.2\leqslant W_q\leqslant 0.6, \\
1, & W_q<0.6.
\end{cases}
\end{cases}$$

5.4.3 模型的求解

在 5.3 中，我们求得了服务强度、等待时间和等待队长的数值，因此，将其代入隶属函数中，可以得到表 5.7 所示的结果.

表 5.7　结果统计表

$f(\rho)$	$f(W_q)$	$f(L_q)$	f
0	1	1	0.5

从该结果可以看出，该病床安排模型并不是很理想.

综合考虑 5.3 中得到的分类指标，我们可以发现，该病床安排中出现的问题主要是病人的等待时间太长，等待队长也达到了一个比较大的长度，因而导致到该医院看病的病人的满意度不高.

6　问题二的模型建立与求解

问题二要求我们就该住院部当前的情况，建立合理的病床安排模型，以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院. 然后通过问题一的指标体系对我们构建的病床安排模型做出评价. 因此，本部分通过以下两步进行：

步骤一：建立合理的病床安排的随机优化模型，以确立不同病人的病床的分配原则.

步骤二：分配优化模型的求解. 主要通过计算机模拟排队模型，来得到分配方案，并依靠综合评价模型对新建的病床安排模型进行评价.

6.1　病床安排的优化模型

为建立合理的病床安排模型，根据第一问的综合评价模型，我们期望得到一个最优的病床安排模型，并考虑以已知的第二天拟出院的病人数作为约束，使得该病床安排模型得到的综合评价函数值最大. 本文认为可以建立随机优化模型来刻画本问题.

1）目标分析

一个合理的病床安排模型，主要考虑医院和病人双方的满意度，因此，可以把问题一中出现的综合评价模型用来给该病床安排模型打分. 运用所得到的分数最小的安排原则，就可以得到一个综合最优的安排模型. 因此，设 x_{ij} 表示第 i 类病患在第 j 天入院的人数，y_{ij} 表示第 i 类病患在第 j 天出院的人数. 因为若第 i 类病患在第 j 天入院的人数确定之后，该排队模型也就随之确定. 所以排队模型中的运行指标：服务强度、等待时间、等待队长都可以由 x_{ij} 确定，也就是说，这些运行指标都是以 x_{ij} 为变量的函数.

综上，综合评价函数可以表示如下：

$$f = f(\rho, W_q, L_q) = f(x_{ij});\ j = 1, 2, \cdots, 7, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

因此，该优化模型的目标为评价函数值最小，即：

$$\min\ f(x_{ij}).$$

2）约束分析

（1）入院人数约束.

由于医院中的病床只有 79 张，因此，住院的人数不能大于出院的人数，即建立满足入院人数要求的数量平衡约束：

$\sum_{i=1}^{5} x_{i1} \leqslant \sum_{i=1}^{5} y_{i1}$（代表第一天入院的人数小于出院人数），

$\sum_{i=1}^{5} x_{i1} + \sum_{i=1}^{5} x_{i2} \leqslant \sum_{i=1}^{5} y_{i1} + \sum_{i=1}^{5} y_{i2}$（前两天的入院人数小于出院总人数），

$\sum_{i=1}^{5} x_{i1} + \sum_{i=1}^{5} x_{i2} + \sum_{i=1}^{5} x_{i3} \leqslant \sum_{i=1}^{5} y_{i1} + \sum_{i=1}^{5} y_{i2} + \sum_{i=1}^{5} y_{i3}$（前三天的入院人数小于出院总人数），

……

依此类推.

（2）非负约束.

等待入院病人人数不能为负数，即 $x_{ij} \geqslant 0$.

（3）预测约束.

因为题目要求能够根据第二天的拟出院人数来安排病人入院，因此，入院人数 x_{ij} 是以出院人数 y_{ij} 为变量的函数，即 $x_{ij} = x_{ij}(y_{ij})$.

3）最终模型

由于上述模型中每日出院人数考虑为随机变量，因此我们建立如下随机规划模型：

$$\min f(x_{ij}),$$

$$\text{subject to.}\begin{cases} x_{ij} \geqslant 0, \\ x_{ij} = x_{ij}(y_{ij}), \\ \sum_{i=1}^{5} x_{i1} \leqslant \sum_{i=1}^{5} y_{i1}, \\ \sum_{i=1}^{5} x_{i1} + \sum_{i=1}^{5} x_{i2} \leqslant \sum_{i=1}^{5} y_{i1} + \sum_{i=1}^{5} y_{i2}, \\ \sum_{i=1}^{5} x_{i1} + \sum_{i=1}^{5} x_{i2} + \sum_{i=1}^{5} x_{i3} \leqslant \sum_{i=1}^{5} y_{i1} + \sum_{i=1}^{5} y_{i2} + \sum_{i=1}^{5} y_{i3}, \\ \cdots \end{cases}$$

6.2 计算机的模拟模型

由于题目要求我们根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院，而第二天出院的病人数具有随机性，并且出院病人的患病种类也是一个随机因素；更多的，当时等待的病人何时入院也同样是一个具有随机因素的变量，因此，6.1 中的优化模型难以求出最优解. 于是，充分考虑到带有随机因素的规划模型求解的复杂性，我们可以采用随机模拟的方法来对题目所要求的过程进行模拟.

与此同时，题目要求我们建立合理的病床安排模型. 在第一问中，我们检测出来的病床安排模型中的缺陷主要是未充分考虑病人的满意度，而病人不满意的地方又体现在等待时间过长这方面. 根据我们的分析，在排队模型中，病人等待时间的长短是由前面已接受服务的病人的服务时间长短决定的，而在一个病人的服务系统里，其术后观察时间是一个随机变量，是不可控制的，不过，病人两个手术之间的间隔是固定的，因此，在服务时间里，只有调整病人住院到第一次手术的时间间隔，才能真正改善病人的服务时间. 只有缩短了病人的服务时间，才可以缩短下一批等待病人的等待时间.

因此，通过缩短病人住院到第一次手术的时间间隔，我们就可以得到一个较优的安排规则. 该安排规则如表 6.1 所示：