前导　函数

初等函数（elementary function）包括代数函数和超越函数. 初等函数是实变量或复变量的指数函数、对数函数、幂函数、三角函数和反三角函数经过有限次有理运算及有限次复合后所构成的函数类. 这是分析学中最常见的函数，在研究函数的一般理论中起重要作用.

一、函数的概念

1. 函数的定义

在一个自然现象或某个研究过程中，往往同时存在几个变量在变化，这几个变量通常不是孤立无关地在变化，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 这里仅就两个变量之间的关系举几个例子.

例 1　半径为 R 的圆的面积为

$$A=\pi R^2$$

这就是两个变量 A 与 R 之间的关系. 当半径 R 在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一个值时，由上式就可以确定一个圆的面积值 A.

例 2　一个物体以 v_0 为初速度作匀加速运动，加速度为 a，经过时间间隔 t 后，物体的速度为

$$v=v_0+at$$

这里开始计时，记 $t=0$，此时速度值为 v_0，加速度 a 是常数，时间 t 在区间 $[0,T]$ 内任取一个值时，就可以确定这个时刻 t 物体的速度值 v.

例 3　在半径为 R 的圆中，作内接正 n 边形，由图 1 可得正 n 边形的周长 L_n 与边数 n 之间的关系为：

$$L_n=2nR\sin\frac{\pi}{n}$$

图中 $\alpha_n=\dfrac{\pi}{n}$，当 n 在 3, 4, 5, ⋯ 自然数集中任取一个值时，由上式就可得到对应周长的值 L_n.

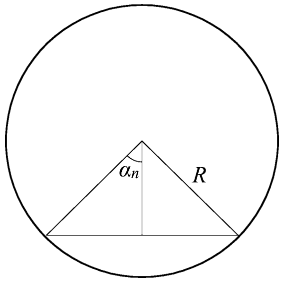


图 1

在以上几个例子中，都给出了一对变量之间的一种关系，这种关系确定了一个对应规则，当其中一个变量在其变化范围内任取一个值时，另一个变量依照对应规则就有一个确定的值与之对应. 这两个变量之间的对应关系就是函数概念的实质.

定义 1　设 D 是一个非空实数集合，f 为一个对应规则，对每一个 $x\in D$，按规则 f，都有一个确定的实数 y 与之对应，称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x), x \in D$$

x 称为自变量，y 称为因变量，集合 D 称为函数的定义域，可记为 $D(f)$.

对于 $x_0 \in D$，所对应的 y 的值记为 y_0 或 $f(x_0)$，称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值. 当 x 取遍 D 的一切值时，对应的所有函数值构成的集合

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

函数 $y = f(x)$ 中表示对应规则的记号 f 也常用其他字母，如 g, h, φ 或 F, G, Φ 等.

在实际问题中，函数的定义域是由问题的实际意义确定的. 例如，在例 1 中定义域为 $(0,+\infty)$，在例 2 中定义域为 $[0, T]$，在例 3 中定义域为大于等于 3 的自然数集 $\{n \mid n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geqslant 3\}$.

在数学中，对于抽象的函数表达式，我们约定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

例 4　函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

例 5　函数 $y = \lg(5x-4)$ 的定义域应满足

$$5x - 4 > 0$$

故定义域为 $\left(\dfrac{4}{5}, +\infty\right)$.

例 6　函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$ 的定义域应满足

$$x^2 - x - 2 > 0$$

即

$$(x-2)(x+1) > 0$$

故定义域为 $(-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$.

例 7　函数 $y = \arcsin\dfrac{x-1}{5} + \dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域应满足

$$\left|\frac{x-1}{5}\right| \leqslant 1 \text{ 且 } x^2 < 25$$

即

$$-5 \leqslant x - 1 \leqslant 5 \text{ 且 } -5 < x < 5$$

故定义域为 $[-4, 5)$.

注：常见的定义域约束条件：

（1）分母不能为零；

（2）偶次根式的被开方数大于等于零；

（3）对数函数的真数大于零；

（4）分段函数的定义域为各段函数定义域的并集；

（5）若函数式是上述的混合式，则应取各部分定义域的交集.

2. 函数的三要素

在函数关系中，定义域、对应规则和值域是确定函数关系的三个要素. 如果两个函数的

对应规则和定义域、值域都相同，则认为这两个函数是相同的，至于自变量和因变量用什么字母表示则无关紧要.

例 8 下列各对函数是否相同？

（1） $f(x)=x+1$， $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；（2） $f(x)=|x|$， $g(x)=\sqrt{x^2}$.

解 （1）不相同. $f(x)=x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，因此 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不相同，故不是相同的函数.

（2）相同. 因 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域相同，均为 $(-\infty,+\infty)$，而且对应规则、值域也相同，所以是相同的函数.

3. 函数的图形

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，对于任取的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 在平面直角坐标系中，取自变量 x 在横轴上变化，因变量 y 在纵轴上变化，则平面点集

$$C=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

例 9 函数 $y=2x$ 的图形是一条直线，如图 2 所示.

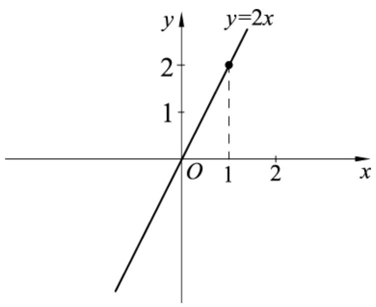


图 2

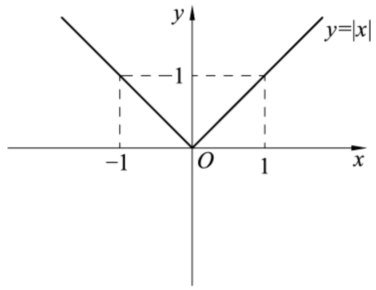


图 3

例 10 函数 $y=|x|$ 的图形如图 3 所示. 这里当 $x\geqslant 0$ 时， $y=x$；当 $x<0$ 时，$y=-x$.

例 11 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而值域为 $\{-1,0,1\}$，并且 $|x|=x\operatorname{sgn}x$，图形如图 4 所示.

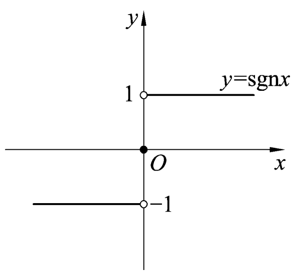


图 4

例 12 取整函数 $y=[x]$，表示 y 取不超过 x 的最大整数. 如

$$\left[\frac{1}{3}\right]=0，\ [\sqrt{2}]=1，\ [\pi]=3，\ [-1]=-1，\ [-3.5]=-4$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为整数集合 $\mathbf{Z}$，图形如图 5 所示.

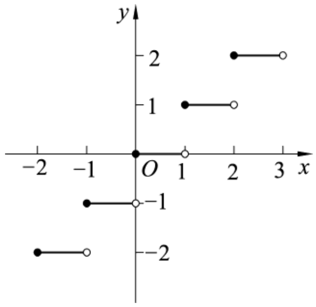


图 5

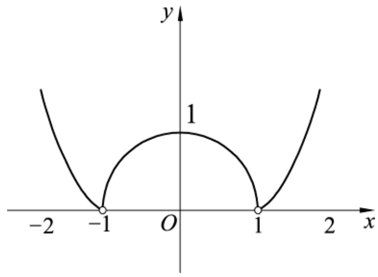


图 6

例 13　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1\\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$$

其定义域 D 为 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$，值域 W 为 $(0,3]$，图形如图 6 所示.

当然，并非所有的函数都可以用几何图形表示出来.

下面举一个多值函数的例子.

例 14　在直角坐标系中，半径为 R 、圆心在原点的圆的方程是

$$x^2+y^2=R^2$$

这个方程在闭区间 $[-R,R]$ 上确定一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数，当 x 取 $-R$ 或 R 时，对应的函数值只有一个：$y=0$，但当 x 在开区间 $(-R,R)$ 内取值时，其对应的函数值总有两个：$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$，所以方程 $x^2+y^2=R^2$ 确定了一个多值函数. 如果附加一定的条件，就可以将多值函数化为单值函数，这样得到的单值函数称为这个多值函数的一个单值分支. 例如，由方程 $x^2+y^2=R^2$ 给出的对应规则中，附加“$y\geqslant 0$”的条件，就可以得到一个单值分支：$y=\sqrt{R^2-x^2}$；附加“$y\leqslant 0$”的条件，就可以得到另一个单值分支：$y=-\sqrt{R^2-x^2}$.

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在一个常数 $M>0$，使得对于一切 $x\in X$，其对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果不存在这样的 M，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界，也就是说，对任何正数 M，无论 M 的值有多大，总可以找到 X 中的点 x_1，使

$$|f(x_1)|>M$$

那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 无论 x 取任何实数，总有

$$|\sin x|\leqslant 1$$

成立，这里 $M=1$ 或为大于 1 的任何常数，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

又如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在半开区间 $[1,+\infty)$ 内是有界的，因为对一切 $x\in[1,+\infty)$，总有

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$$

但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的常数 M，使得对所有 $x\in(0,1)$，有不等式 $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立．事实上，对于任意取定的正数 M，不妨设 $M>1$，则 $\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$，当取 $x_1=\dfrac{1}{2M}$ 时，

$$|f(x_1)|=\left|\frac{1}{x_1}\right|=2M>M$$

由此可以进一步看到，同一个函数在不同的区间上有界性可能不同.

当一个函数是有界函数时，它的图形是介于两条水平直线 $y=M$ 及 $y=-M$ ($M>0$)之间的曲线.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若对任意两点 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；而当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数．当函数单调增加时，它的图形是随 x 的增加而上升的曲线；而当函数单调减少时，它的图形是随着 x 的增大而下降的曲线.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，所以在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数 $y=x^2$ 不是单调函数，见图 7．又例如，函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的函数，见图 8.

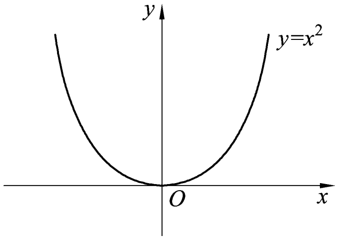


图 7

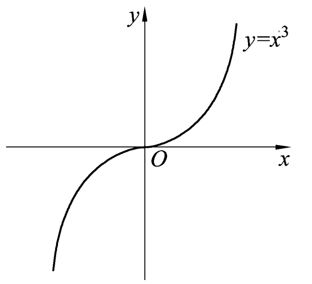


图 8

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一个 $x\in D$，总有

$$f(-x)=f(x)$$

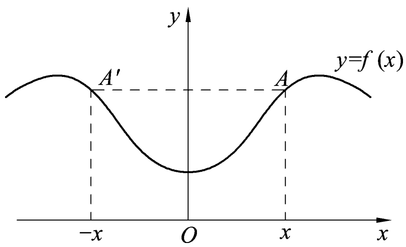
则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一个 $x\in D$，总有

$$f(-x)=-f(x)$$

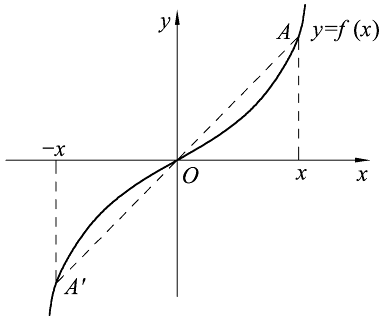
则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的，因为若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，那么对应于 x 及 $-x$ 的两个点 $A(x,f(x))$ 及 $A'(-x,f(x))$ 都在函数的图形上，并关于 y 轴对称，如图 9（a）.

奇函数的图形关于原点是对称的，因为若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，那么对应于 x 及 $-x$ 的两个点 $A(x,f(x))$ 及 $A'(-x,-f(x))$ 都在函数的图形上，并关于原点对称，如图 9（b）.



（a）



（b）

图 9

例如，函数 $y=x^2+1$， $y=\cos x$， $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$， $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 等皆为偶函数；而函数 $y=\sqrt[3]{x}$，$y=x^2\sin x$， $y=\dfrac{x}{1+x^2}$， $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 等皆为奇函数. 函数 $y=\sin x+\cos x$ 及 $y=x+x^2$ 既非奇函数，也非偶函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的一个周期. 通常，我们所说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$， $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\sin\omega t$ 是以 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 为周期的周期函数.

一个周期为 l 的周期函数，在每个长度为 l 的区间上函数图形有相同的形状.

并不是每个周期函数都有最小正周期，狄利克雷函数就属于这种情形.

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

若 x 为有理数，对任一有理数 γ， $x+\gamma$ 也是有理数，因而 $D(x+\gamma)=D(x)=1$；若 x 为无理数，对上述有理数 γ，$x+\gamma$ 也是无理数，所以 $D(x+\gamma)=D(x)=0$. 这样，任何有理数 γ 均是 $D(x)$

的周期，但在有理数集中没有最小的正有理数，也就是说，函数 $D(x)$ 没有最小正周期.

三、复合函数和反函数

1. 复合函数

先看一个例子. 设 $y=\sqrt{u}$ ，而 $u=1-x^2$ ，以 $1-x^2$ 代替第一式中的 u ，得 $y=\sqrt{1-x^2}$ ，这时函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 就是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数.

一般地，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 W_2，并且 $W_2\subset D_1$，那么对每个 $x\in D_2$，有确定函数值 $u\in W_2$ 与之对应，由于 $W_2\subset D_1$，因此这个值 u 也属于函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_1，故又有确定的值 y 与值 u 对应. 这样，对每个数值 $x\in D_2$，通过 u 有确定的数值 y 与之对应，从而得到一个以 x 为自变量， y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

而 u 称为中间变量.

例如，函数 $y=\sin^2 x$ 就可看作由 $y=u^2$ 及 $u=\sin x$ 复合而成的，这个函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，这也正是函数 $u=\sin x$ 的定义域；又例如， $y=\sqrt{x^2}$ 可看作由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=x^2$ 复合而成的函数，这个函数实际就是 $y=|x|$，这时 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域与 $u=x^2$ 的定义域相同，都是 $(-\infty,+\infty)$.

必须注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如， $y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$，因为对于 $u=2+x^2$，无论 x 取什么实数，总有 $u\geqslant 2$，因而不能使 $y=\arcsin u$ 有意义，所以这两个函数不能复合成一个复合函数. 而在前面已经见到的函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ ，复合前的函数 $u=1-x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 W_2 为 $(-\infty,1]$，这显然不完全符合函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 D_1 的要求，也就是说，定义中的条件 $W_2\subset D_1$ 不成立，但由于 $W_2\cap D_1\neq\varnothing$，所以适当限制 x 的取值范围，函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 也能复合成一个复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ ，即在 $u=1-x^2$ 中， x 的取值范围必须限制为 $[-1,1]$.

复合函数也可由两个以上的函数经过复合构成. 例如，$y=\ln\sqrt{2+x^2}$ ，就是由 $y=\ln u$ ，$u=\sqrt{v}$ 和 $v=2+x^2$ 三个函数复合而成的，其中 u 和 v 都是中间变量.

2. 反函数

在同一个变化过程中存在着函数关系的两个变量之间，究竟哪一个是自变量，哪一个是因变量，并不是绝对的，这要视问题的具体要求而定. 例如，在某商品销售工作中，已知其价格为 a，若想从商品的销量 x 来确定销售总收入 y，那么 x 是自变量， y 是因变量，其函数关系为

$$y=ax$$

反过来，如果想由商品销售总收入 y 确定其销量 x，则又有

$$x=\frac{y}{a}$$

我们称后一函数是前一函数的反函数，或者说它们互为反函数.

一般地，设 $y=f(x)$ 为给定的一个函数，如果对其值域 W 中的任一值 y，都可以通过关系 $y=f(x)$ 在其定义域 D 中确定一个 x 值与之对应，则可得到一个定义在 W 上的以 y 作为自变量、x 作为因变量的函数，这个函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y)$$

其定义域为 W，值域为 D. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由定义可以证明，若函数 $y=f(x)$ 是单值单调的函数，那么就能保证其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是单值单调的函数. 这是因为，若 $y=f(x)$ 是单调函数，则任取其定义域 D 上两个不同的值 $x_1\neq x_2$ 时，必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，所以在其值域 W 上任取一个数值 y_0 时，D 上不可能有两个不同的数值 x_1 及 x_2 使 $f(x_1)=f(x_2)=y_0$，但若 $y=f(x)$ 仅为单值函数，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 就不一定为单值的. 例如，函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，在 $[0,+\infty)$ 上任取一值 y，只要 $y\neq 0$，则适合关系 $x^2=y$ 的数值 x 就有两个，即 $x=\sqrt{y}$ 或 $x=-\sqrt{y}$，所以 $y=x^2$ 的反函数是多值函数. 又因为 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，所以，如果把 x 限制在 $[0,+\infty)$ 上，则 $y=x^2$ 的反函数是单值且单调增加函数 $x=\sqrt{y}$，它称为函数 $y=x^2$ 的反函数的一个单值分支. 类似可知另一个分支是 $x=-\sqrt{y}$.

要注意的是，$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 表示变量 x 和 y 之间的同一关系，因而它们的图形显然应是同一曲线. 而函数的实质是对应关系，只要对应关系不变，自变量和因变量用什么字母是无关紧要的. 在 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 中，表示对应关系的符号 f^{-1} 没有改变，这就表示它们是同一函数，因此如果函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=f^{-1}(y)$，那么 $y=f^{-1}(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数，这时，$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关系也就相当于把 x 轴和 y 轴互换，或者说把 $x=f^{-1}(y)$ 的曲线以直线 $y=x$ 为对称轴翻转 180°，所得到的曲线就是 $y=f^{-1}(x)$ 的图形，它与曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $y=x$ 是对称的，见图 10.

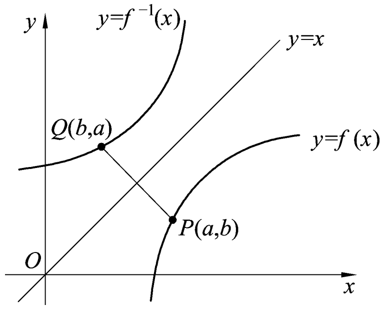


图 10

四、基本初等函数

基本初等函数是指下列五类函数：

（1）幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 为常数）.

（2）指数函数：$y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$）.

（3）对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）.

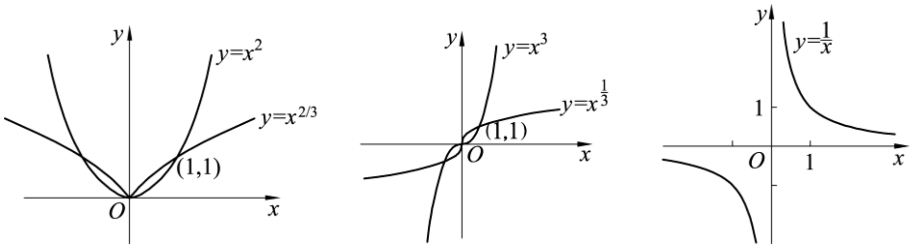
（4）三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

（5）反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

1. **幂函数** $y = x^{\alpha}$（α 为常数）

幂函数 $y = x^{\alpha}$ 的定义域要视 α 的取值而定. 例如，当 $\alpha = 2$ 时，$y = x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$；而当 $\alpha = \dfrac{1}{2}$ 时，$y = x^{\frac{1}{2}}$ 即 $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$；又当 $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ 时，$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 即 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 但不论 α 取什么值，幂函数 $y = x^{\alpha}$ 在 $(0, +\infty)$ 内总有意义.

常见的幂函数 $y = x^2, y = x^{2/3}, y = x^3, y = \sqrt[3]{x}$ 及 $y = \dfrac{1}{x}$ 的图形见图 11（a）、（b）、（c）.



（a）　　　　（b）　　　　（c）

图 11

2. **指数函数** $y = a^x$（$a > 0$，$a \neq 1$）

定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$，不论 a 取何值，总有 $a^0 = 1$，所以函数曲线总在 x 轴上方且经过点(0, 1).

当 $a > 1$ 时，a^x 单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，a^x 单调减少.

由于 $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$，所以 $y = a^x$ 的图形与 $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的图形是关于 y 轴对称的，见图 12.

在科技工作中，常用以无理数 e = 2.7182818…为底的指数函数 $y = \mathrm{e}^x$.

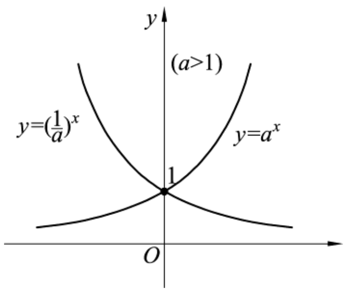


图 12

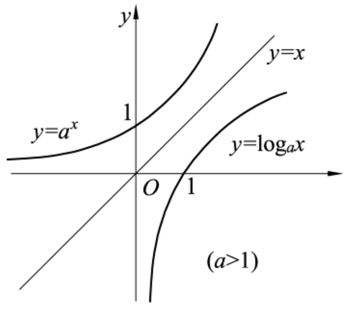


图 13

3. **对数函数** $y = \log_a x$（$a > 0$，$a \neq 1$）

对数函数 $y = \log_a x$ 是指数函数 $y = a^x$ 的反函数，其定义域为 $(0, +\infty)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$，所以 $y = \log_a x$ 的图形总在 y 轴的右方且经过点(1, 0). 对数函数的图形可以从它所对应的指数函数的图形按反函数作图的一般规则作出，关于直线 $y = x$ 作对称于曲线 $y = a^x$ 的图形就得函数 $y = \log_a x$ 的图形，见图 13.

当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 单调减少.

在工程问题中常常使用以常数 e 为底的对数函数 $y=\log_{\mathrm{e}} x$，叫做自然对数函数，简记为 $y=\ln x$.

4. 三角函数

常用的三角函数有：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$.

正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，均以 2π 为周期，值域都是闭区间 $[-1,1]$，所以它们都是有界函数. 正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数，见图 14 及图 15.

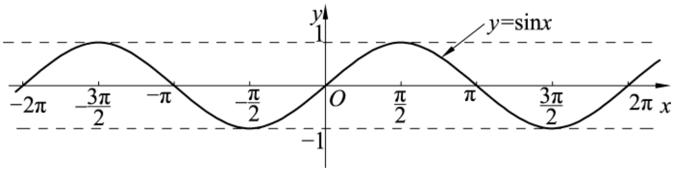


图 14

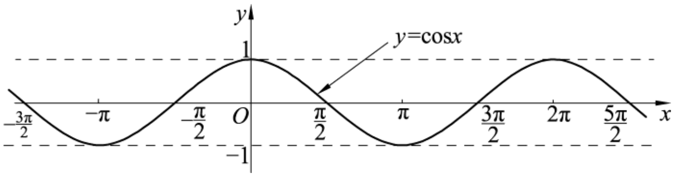


图 15

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x\in\mathbf{R},x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，周期为 π 且为奇函数，见图 16.

余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，周期为 π 且为奇函数，见图 17.

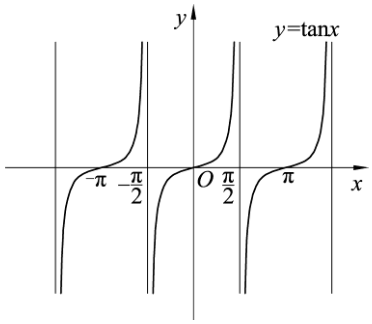


图 16

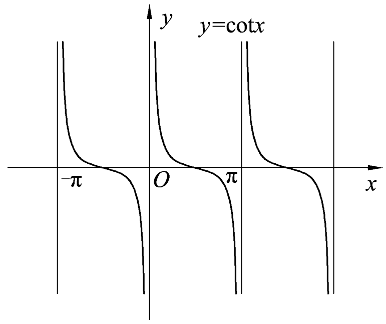


图 17

此外，正割函数 $y=\sec x$ 及余割函数 $y=\csc x$ 分别为余弦函数和正弦函数的倒函数，即

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}，\quad \csc x=\frac{1}{\sin x}$$

所以它们都是以 2π 为周期的函数，并且在开区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内都是无界函数，但总有 $\sec x\geqslant 1$ 及 $\csc x\geqslant 1$.

5. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 常用的反三角函数有：

反正弦函数： $y=\arcsin x$；

反余弦函数： $y=\arccos x$；

反正切函数： $y=\arctan x$；

反余切函数： $y=\operatorname{arc}\cot x$.

以上函数的图形见图 18（a)、(b)、(c)、(d). 反三角函数的图形分别与其对应的三角函数的图形对称于直线 $y=x$. 由于三角函数是周期函数，对于值域内的每个值 y，定义域总有无穷多个值 x 与之对应，所以反三角函数都是多值函数. 我们可以取这些函数的一个单值分支，称为主值，记作

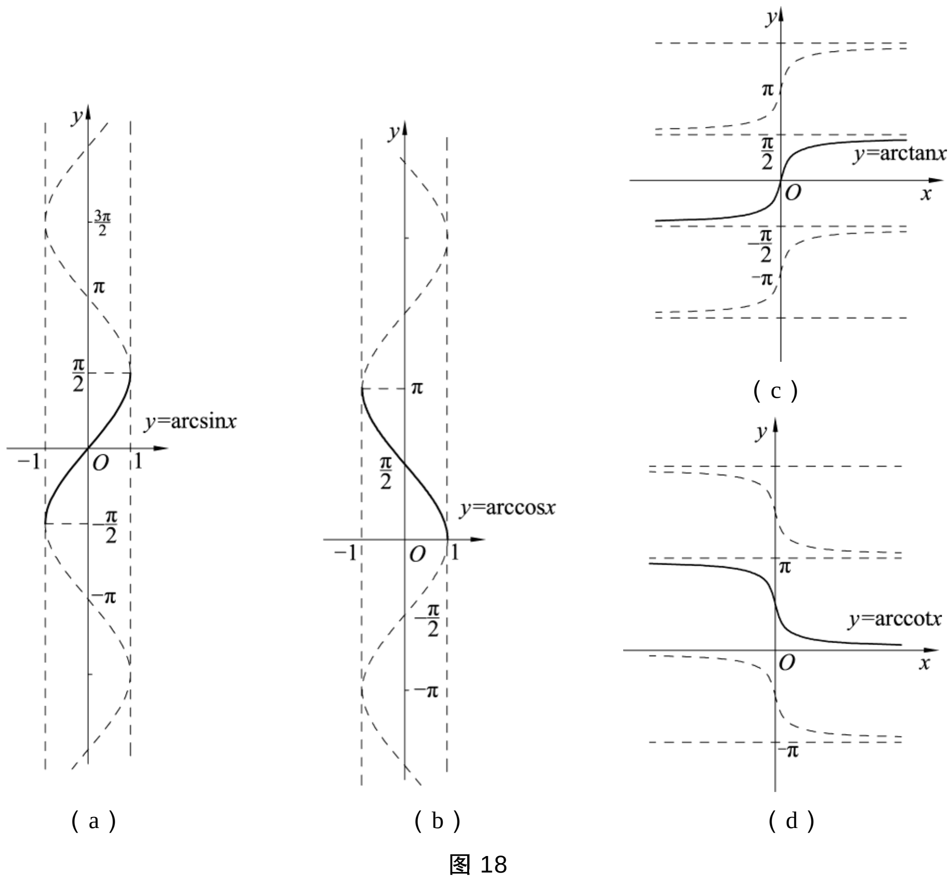
$y=\arcsin x$， $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；

$y=\arccos x$， $y\in[0,\pi]$；

$y=\arctan x$， $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；

$y=\operatorname{arc}\cot x$， $y\in(0,\pi)$.

在图 18 各图中实线部分为主值的图形.



（a）（b）（c）（d）

图 18

这样，单值函数 $y=\arcsin x$ 及 $y=\arccos x$ 的定义域都是闭区间 $[-1,1]$，值域分别是闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 及 $[0,\pi]$. 在 $[-1,1]$ 上，$y=\arcsin x$ 是单调增加的，$y=\arccos x$ 是单调减少的.

$y=\arctan x$ 及 $y=\operatorname{arc}\cot x$ 的定义域都是区间 $(-\infty,+\infty)$，值域分别是开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 及 $(0,\pi)$. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$y=\arctan x$ 是单调增加的，$y=\operatorname{arc}\cot x$ 是单调减少的.

五、初等函数

现在我们给出初等函数的定义：由以上五种基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可以用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，

$$y=\sqrt{1-x^2}\ ,\quad y=\sin^2 x\ ,\quad y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

都是初等函数，而诸如

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ \sin x, & x\leqslant 0 \end{cases}$$

这样的函数为分段函数，这种分段函数往往不是初等函数.

在本教材中所讨论的函数大多数都是初等函数.