

# 网络及交通网络应用基础理论与应用优化

---

本篇包括网络和交通网络的应用基础理论以及应用优化两部分。

## (1) 网络及交通网络应用基础理论。

在此部分中，主要介绍了网络应用基础理论、交通网络应用基础理论。

① 在网络应用基础理论中，介绍了传统的网络图定义、网络流相关知识以及网络图应用研究现状及发展动态，目的是通过明确概念，为交通网络应用基础理论及交通网络应用优化等的研究起到基础性作用。

② 在交通网络应用基础理论中，首先对交通网络研究现状做了介绍，然后介绍了公共交通网络的研究现状，目的是明确未来哪些问题需要研究以及如何研究才能解决交通运输领域面临的问题。

## (2) 网络及交通网络应用优化。

在此部分中，主要介绍了网络应用优化以及交通网络应用优化两部分。

① 在网络应用优化中，从理论研究的范畴把网络优化研究分为基础理论研究、应用基础理论研究和专业应用研究三部分。基于优化内容把网络应用优化分为网络结构优化和网络应用优化；基于网络流属性把网络应用优化分为单品种流网络和多品种流网络。

② 在交通网络应用优化中，基于网络应用优化部分中网络优化的分类，将交通网络分为单品种流交通网络结构优化、多品种流交通网络结构优化、单品种流交通网络应用优化、多品种流交通网络应用优化。另外，本书也重点介绍了针对交通网络应用优化问题包含的一些方法。



# 第 1 章 网络及交通网络应用基础理论

由于交通网络优化是基于网络图来解决交通领域的问题，而网络图又是在图的基础上，附加了若干表示现实意义的一些属性参数，所以本章先给出传统意义上的网络图定义、网络流相关知识、网络图应用研究现状以及发展动态，再在此基础上，对交通网络研究现状以及公共交通网络研究现状做一介绍。

## 1.1 网络应用基础理论

### 1.1.1 网络图定义及相关知识

#### 1. 图与网络图定义

##### (1) 图的定义

一般的图都具有两个要素，即点和边。把现实问题抽象为图的方法是：用点表示现实中的对象，用边表示对象和对象之间的关系，若对象和对象之间有关系，就用边把表示对象的点连接起来。其直观描述如图 1.1 所示。



图 1.1

用自然语言来描述就是：图是由表示具体事物的对象（顶点）集合和表示事物之间的关系（边）集合组成的，例如，针对铁路网，边表示区段，顶点表示区段间的车站；针对城市道路网，边表示道路，顶点表示交叉口。

如果用  $G$  表示图，用  $v_i$  表示点，用  $V$  表示所有点的集合，用  $e_i$  表示边，用  $E$  表示所有边的集合，那么图的数学语言描述就是  $G = (V, E)$ ，其中  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ， $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ 。另外，图  $G$  的顶点集合与边集合也可

分别用  $V(G)$  和  $E(G)$  表示。

## (2) 网络图定义

在图的定义中，对边所表示的关系没有进行量化，即对象之间的关系是何种关系、关系的程度又如何等都没有系统的涉及。

为了更深入地利用图来解决现实中的问题，就需要对图中的边甚至图中的点进行量化。也就是说，只要现实中的问题具有可描述的对象，而且这些对象之间有着一种关系，那么对这种关系就可以进行量化，即把现实中的对象和关系描绘成图以后，在图的基础上，把图中的边或点赋上表示一定意义的数量指标，这样就可以把现实问题通过图转化成网络图。网络图和图最大的区别在于网络图具有表示一定意义的参数。

至于网络图，现实生活中很普遍，比如常说的交通网、公交网、水网、管网、电网、信息网等，针对不同的现实问题，网络图参数就有不同的内容、不同的意义等。

## 2. 网络图相关知识

在图的基础上，图中的边以及图中的点进行量化后产生的网络图会有不同的形式。形式的不同，刻画现实问题以及解决问题的内容和方法就会不同。研究网络图的目的就是如何利用网络图来解决现实问题，根据网络图参数的不同，网络就有不同的应用。

### (1) 参数只有权的网络图

给定图  $G = (V, E)$ ，其中  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ， $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ ，现在把图  $G$  的每条边都赋予一个非负实数，即  $w_i = w(e_i)$  或  $w_{ij} = w(v_i, v_j)$ ，这个非负实数称为权。在图  $G$  的基础上，就有了关于权的网络图定义  $G = (V, E, W)$ ，其中  $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ 。根据此定义，具有权的网络图中的边就有了图 1.2 所示的形式。

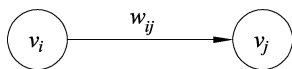


图 1.2

针对具有权的网络图  $G = (V, E, W)$ ，理论上主要涉及网络极值问题。

### (2) 参数具有容量和流量的网络图

给定有向图  $G = (V, E)$ ，其中  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ， $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ ，针对边  $e_i$  赋予两个非负的整数参数  $c(e_i)$ 、 $f(e_i)$ ，其中  $c(e_i)$  称为边  $e_i$  的容量，有时将边  $(v_i, v_j)$  的容量写成  $c_{ij}$ ； $f(e_i)$  称为边  $e_i$  的流量，有时将边  $(v_i, v_j)$  的流量写成

$f_{ij}$ ；由此产生的网络图即为  $G = (V, E, C, F)$ ，其中  $C$  为容量的集合， $C = (c(e_1), c(e_2), \dots, c(e_m))$ ， $F$  为流量的集合， $F = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_m))$ 。另外，如果将网络图  $G$  中流量的分布状态用  $f$  来表示，那么  $f$  称为网络图  $G$  的网络流。

根据此定义，参数具有容量和流量的网络图中的边为图 1.3 所示的形式。网络图中的容量表示边所承载流量的最大能力，例如，针对铁路网，边的容量可以表示区段间的最大通过能力；针对城市道路网，边的容量可以表示道路的通行能力。网络图中的流量表示调运的分配方案，在不同的网络图所示的内容也不一样，比如，它可以表示实际输送的物资量、道路上通过的车辆数（交通量）、网络中传送的信息量、水管中的水量等。

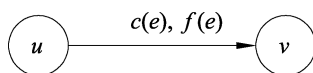


图 1.3

针对具有容量和流量的网络图  $G = (V, E, C, F)$ ，对于流量的优化问题，理论上会涉及最大流、流均衡等问题。

### (3) 参数具有容量、流量和权的网络图

在实际问题中，不但需要考虑网络图中的流量分配问题，还要考虑流量流动所花的费用、时间或其他代价等因素。

在网络图中，除了把边赋予表示成本、时间、距离等实数权以外，还要把边赋予容量、流量和代价，由此可以给出网络图的另外一个定义：有交通网络  $G = (V, E, C, F, W)$ ，其中  $W$  表示流的代价，或仍称为权，可指距离、时间、成本等。在网络中用  $w_{ij}$  表示一个单位的流量从顶点  $v_i$  沿着边  $(v_i, v_j)$  到顶点  $v_j$  时所需的代价。

根据此定义，参数具有容量、流量和权的网络图中的边为图 1.4 所示的形式。针对具有容量、流量和代价的网络图  $G = (V, E, C, F, W)$ ，对于流量的优化问题，理论上会涉及最小代价流、最小代价最大流、流均衡等问题。

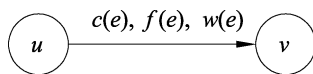


图 1.4

研究网络流优化问题具有一定的现实意义，例如交通系统中的车流、金融系统中的现金流、控制系统中的信息流、供水系统中的水流等，针对这些系统，有时需要考虑在既定的网络图中能通过的最大流量是多少，这就产生了网络图的最大流问题；有时需要考虑在满足成本最低的前提下，使网络图

承载一定的流量，这就产生了网络图的最小代价流问题；有时也需要考虑在满足成本最低的前提下，使网络图通过的流量达到最大，这就产生了网络图的最小代价最大流问题。

### 1.1.2 网络图应用研究现状及发展动态

网络图问题是图论中的核心问题，在针对网络图的诸多研究中，大部分集中在复杂网络问题、最短路问题、最大流问题、最小代价流问题以及网络堵塞问题等几个大的方面。

#### 1. 复杂网络问题

针对网络图问题的研究，基本遵循了从静态网络到动态网络、从随机网络到复杂网络的进程。自 20 世纪 80 年代中期以来，各国学者针对复杂网络统计特性、结构模型及发生在网络上的动力学行为等进行了一系列科学研究，但在早期的研究中，对复杂网络结构的描述大都遵循 Erdős 和 Rényi 的随机网络模型，自从 Watts 等提出小世界网络模型以来，网络研究的焦点出现了一个重要变迁，即从对单个的包含顶点数较少的简单网络图及图中个体顶点或边的属性分析，转变为对包含大量顶点数的结构庞大的网络图统计属性进行研究，直到 1999 年，Albert 等发表了万维网的无标度特性理论之后，各国学者发现在社会、科技、生物网络、交通网络等广泛存在节点间不平衡、具有高聚集性以及小世界现象等无标度网络的共性，从而在学术界对复杂网络的相关研究引起了高度重视。复杂网络是近年来在诸多领域中的一个研究热点，在过去几年，复杂网络的研究得到了迅速发展。复杂网络的拓扑特征源于其内在的演化生成机制，复杂网络的研究为人们提供了新的思维，因此针对复杂网络的研究也受到了我国学术界的特别关注。随着对复杂网络特性的认识，近 30 年来，我国许多专家学者对复杂网络进行了大量的研究工作，从而为网络的应用奠定了深厚的基础。

#### 2. 最短路问题

针对最短路问题，经典的研究结论主要有 Dijkstra 算法、Bellman-Ford 算法以及 SPFA 算法等，这些算法是许多更深层最短路算法的基础，但面对实际应用背景中的具体问题，直接使用这些算法已不能解决有约束条件的最短路问题，所以在这些传统算法基础之上，许多专家学者构造了基于约束条件的其他可行的最短路算法。本书作者在过去的研究中，通过对约束条件的分析

和分类,结合具体的约束条件,对 Dijkstra 算法进行了利用和简单的改造,针对交通网络最短路问题构造了五种最短路求解算法。

### 3. 最大流问题

最大流问题的最经典算法是 Ford-Fulkerson 算法,网络图最大流问题和它的对偶问题以及最小截问题是经典组合优化问题,在许多学术和应用领域有重要的应用。目前,网络图最大流问题主要有组合算法和线性规划算法两大类,按照剩余网络中推进流方式的不同,组合算法又划分为增载轨算法和预流推进算法。增载轨算法基本包含标号算法、阻塞流算法以及最短增载轨算法等;预流推进算法基本包含阻塞流算法、推进重标号算法以及二分长度阻塞流算法等。在线性规划算法中,最大流问题是特殊的线性规划问题,利用其特殊性,可以推出比一般线性规划算法更为有效的算法,如网络单纯形法、网络内点法等。在传统算法基础之上,许多专家学者构造了流量最大化分配的其他算法。面对实际应用中出现的条件限制等问题,在传统算法基础之上,本书作者也在过去的研究中,针对交通网络构造了面向交通网络流有限制的几个相关算法。

### 4. 最小代价流问题

针对最小代价流问题,经典的算法是 Ford-Fulkerson 算法。其他专家学者研究的算法有网络单纯形算法(Graph Simplex Algorithm)、连续最短路算法(Successive Shortest Path Algorithm)、松弛算法(Relaxation Algorithm)、消圈算法(Cycle-Canceling Algorithm)、原始-对偶算法(Primal-Dual Algorithm)、瑕疵算法(Out-of-Kilter Algorithm)等。这些算法可以解决流量无约束的最小代价最大流分配问题,即对于关关节点之间的流量没有任何约束条件的网络图进行最小代价最大流分配。本书作者在过去的研究中,基于连续最短路算法思路,结合两个节点之间的流量有具体的要求和约束条件时,针对交通网络构造了约束条件下的最小代价最大流分配算法。

### 5. 网络堵塞问题

由于网络图中流量流动的随机性以及网络自身结构等因素,流量的分布呈现多样性和随机性,所以流值一样的流在网络中的流向分布也不尽相同,但随着流量的变化或流量的局部集聚等,堵塞现象就会发生。堵塞现象是网络图运转时常见的问题之一,网络图堵塞分为局部堵塞和全局堵塞。在网络图堵塞领域中,出现的堵塞现象是传统网络流理论无法解决的,所以对网络

图堵塞问题的研究有一定的理论意义和应用价值。堵塞流理论研究的是网络流非确定性及随机性问题,是网络流理论新的分支,也是网络流研究发展过程中的前沿领域。目前,关于堵塞流理论的研究还不多,有关网络堵塞流的概念最早出现在 Dintiz 算法中,尽管堵塞流是求解网络最大流过程中的过程解或过渡解,但相应的一系列堵塞流算法也是为了能有效求解网络的最大流,所以对网络中堵塞流作为可能的流态分布还没有进行更深入的研究。一些学者在区分流的主动拥塞控制的研究中,可以有效地改善由少数高速流造成的拥塞状况,保证队列长度的稳定,但仅仅考虑高速流的存在时间而采用同样的增量是不完全的,而且没有考虑自身的不同,同时流量的增量随着时序的推移,会动态的发生改变。有的学者尽管对网络防堵塞问题做了分析和研究,取得了一定的成果,但在该研究成果中,还没有从现实流量态势的角度出发,另外,该研究内容只是以容差为基础对网络均衡做了定义,还没有从流量分布的畅通程度或堵塞程度来界定和完善网络均衡问题。在实际应用的网络中,某些局部堵塞发生时,流量可能自动调整,针对网络堵塞问题,如何规范网络流量的流动是研究的重点。针对完全平衡网络不会发生全局堵塞,但会发生局部堵塞,也有研究人员对网络结构的最大流进行分析,并找到了堵塞原因,加强了网络的可靠性,这些研究也给堵塞流理论的实证研究提供了一些有价值的尝试。本书作者在前期的研究中,基于 Dijkstra 算法寻找最短路以及连续最短路算法调整流量的思路,在流量发展态势的预期流量、扩能代价最低以及尽可能对拥堵程度高的线路扩能三个前提条件下,设计了交通网络扩能优化的算法,但仅仅针对扩能问题做了简单分析和研究,也没有对分流的深层次问题进行深入系统的研究。

## 6. 网络图研究发展动态

针对网络图的研究,基本遵循从静态网络到动态网络、从随机网络到复杂网络的进程,其研究重点主要集中在复杂网络问题、最短路问题、最大流问题、最小代价流问题以及网络堵塞问题等几个方面,可以说,这些传统和经典的研究结论很成熟,而且研究成果得到了一定的应用。随着理论和实际应用的需要,对网络图的研究有了新的深入,尤其是对网络图瞬时状态的研究有了转变,有的研究把流量饱和状态作为网络流通性的重要参数,也提出了流变换、流分解、流校正、流搜索等新思路。另外,对网络中流量的构成也有了基本划分,诞生了多品种流、预流推进、组合应用以及流匹配等新的概念和方法。基于这些新的理论和学术思路,需要研究基于时序的流量饱和度波动状态,从而预测和推断堵塞流形成的前因,深入分析和研究网络图形



成堵塞的趋势。

## 1.2 交通网络应用基础理论

### 1.2.1 交通网络研究现状

#### 1. 利用复杂网络理论研究交通网络问题

利用复杂网络理论研究城市交通网络，可追溯到 2002 年 Latora 和 Marchiori 对波士顿地铁网络小世界效应的初步分析，复杂网络的实际形态多种多样，其中分配型的技术网络包括航线网络、道路网络、铁路网络及步行交通网络等，其中 Amaral 等学者在 2000 年研究了航空网络拓扑结构。这些相关研究成果，大部分都是针对城市交通网络的静态特性进行的计算和统计分析，虽然可在一定程度上揭示交通网络拓扑特性，但对于如何发挥交通网络的动态特性、如何利用交通网络衍生变化等问题的分析明显不足。交通网络具有复杂网络形态的同时，也具有许多复杂系统的其他结构形态，随着对复杂网络研究的兴起及对交通网络研究的深入，利用复杂网络理论来研究交通网络成了必然趋势，用复杂网络统计特征以及研究方法等理论来分析交通网络，也对交通网络的研究提供了一个全新的思维。近几年，基于时间的交通网络动态模型受到了广泛关注，这些研究内容消除了隐性或不确定的因素，也适合于交通网络的动态分析，许多专家和学者在研究中利用复杂网络理论研究了城市交通复杂性问题的研究，提出了一些关于城市交通网络复杂性问题的研究方向，从而为城市交通网络的研究方向提供了宝贵的思路。

#### 2. 交通网络平衡问题

交通网络平衡问题是确定交通网络合理利用的基础，Wardrop 在 1952 年首先研究了道路交通网络单物流、单指标的网络平衡问题，并在“利用者优先”思想下提出了 Wardrop 平衡原理，利用 Wardrop 原理，可以将交通网络平衡问题转换为一个变分不等式来处理，从而利用网络平衡流对网络图上的流量进行合理调整。此后，Quandt R E 和 Schneider M 建立了双指标交通网络平衡问题；Dial R B 进一步发展了这个思想，提出了不堵塞网络平衡模型；Dafermos 提出了堵塞效应，研究了多类物流、双指标的交通网络平衡问题，并利用加权标量化方法推出一个求解平衡流的无穷维变分不等式公式。在 20 世纪 80 年代以前，交通网络平衡问题的研究只考虑单一因素，但在实际问题

中往往需要考虑多因素、多指标等，此后一些学者在研究中提出了多指标网络平衡问题的向量平衡原理，并研究了向量平衡原理与向量变分不等式解的等价性，在此基础上，国内许多专家学者对交通网络平衡进行了大量的研究。

### 3. 交通流量分配问题

交通流量分配是城市交通网络规划、设计及优化的关键问题，交通流量的分配体现城市的交通需求与交通网络的相互作用与影响。传统的交通流量分配是以 Wardrop 均衡原理为分配原则而展开的，目的是稳定交通网络的状态，即交通网络上的交通流量趋于稳态，但在实际的交通网络中，需要考虑多种因素、交通系统最优、动态交通网络以及非均衡交通网络的交通流量分配等问题。

### 4. 交通网络拥堵问题

堵塞流动是交通网络中常见的现象，而交通均衡理论是在理想状态下假设交通网络上没有发生拥堵，即没有考虑交通网络系统拥堵情况，所以将之应用于拥堵交通网络还存在若干问题。针对交通网络拥堵现象，一些学者对堵塞流理论以及在城市交通拥挤特征及疏导决策分析中对交通网络的特征、设计以及运行控制做了研究，同时一些学者在拥堵交通网络模型和增强拉格朗日乘子算法中研究了拥堵交通网络交通流状态的特征及求解的方法。另外，一些学者在交通网络流模型新梯度方法中，对容量制约下交通网络流模型也进行了研究。拥堵交通网络的大量研究成果，对交通网络规避拥堵问题的研究有一定的借鉴作用。

## 1.2.2 公共交通网络研究现状

### 1. 国内研究现状

20 世纪 80 年代中期，兴起了针对复杂网络统计特性、结构模型以及发生在网络上动力学行为的科学研究，随后，对复杂网络的相关研究引起了学术界的高度重视，同样也受到了我国学术界的特别关注。

在我国，从复杂网络结构形态出发研究公交网络始于 20 世纪 80 年代，如 1982 年，长沙市开展了“公共交通系统优化工程”工作，针对公共交通调查、需求预测、线网设计及优化、调度优化和网络流分配等方面从系统工程和数学模型方法的角度进行了一定程度的研究；到了 20 世纪 80 年代中期，较早进行这方面研究的学者比较系统地分析了城市公交网络优化问

题的模型和方法；同时，也有一些专家学者根据不同约束提出了不同的公交线网优化模型，这些集中于数学寻优法模型为公交网络规划和优化奠定了一定的基础。

公交网络具有复杂网络形态的同时，也具有许多复杂系统的其他结构形态。20世纪90年代初期，学者们通过对统计量在实际公交网络中物理意义的分析，对可能造成公交网络和复杂网络差异性的原因进行了大量研究；1992年，有的学者基于人工智能理论，引用启发式算法，从每对端点搜索出满足有关约束条件的备选线路，按照二进制理论将备选线路进行组合，形成优化的公交网络，然后通过评价、比较，确定出最优方案；同时，有的学者在扩展 Ford-fulkerson 算法的基础上，提出了公交线网的多条最优路径算法。到20世纪90年代末期，一些专家学者针对公交网络优化提出了许多新的模型和算法，也提出了以乘客总出行时间最小、客流直达率最高、线网覆盖率最高、线路重复系数最低、公交经济效益最高为目标的多目标公交网络优化模型，但这种多目标模型无法求解，最终归结为单目标的优化模型；1999年，一些研究者开始从组合优化角度，提出了公交网络优化设计的非线性 0-1 规划模型，以乘客出行时间最短和实现公交网络资金投入最少为目标函数，在满足容量限制条件下，获得公交线路的优化决策；2000年，有学者从考虑 OD 对之间的弹性需求，对公交 SUE 配流模型进行了扩展，也提出了用双层规划模型来描述连续平衡公交网络设计问题；2001年，有学者利用变分不等式研究了 SUE 配流模型中的弹性需求问题，同时讨论了多用户 SUE 配流模型等，但因为公交网络特殊性以及公交配流本身的复杂性，在进行公交平衡配流时，需要考虑网络结构、线路参数、OD 需求和乘客行为等许多因素，所以以上这些模型中有相当一部分并不能直接应用于实际中的公交平衡配流；2002年，有专家学者提出一种相对比较实用的公交网络逐条布设方法，这种方法以直达客流量最大为目标，利用“逐条布设，优化成网”的思路对公交线网进行优化，这种“逐条布设，优化成网”的思路，对许多研究人员的研究起到了很大的启发作用。

随着城市公共交通问题的日益突出以及学者们对公交网络具有复杂网络特性认识的深入，在我国，于2004年4月在无锡、9月在杭州召开了全国范围的研讨会，掀起了复杂网络研究的热潮。许多专家学者在2005年针对城市公交网络的无标度特性及度分布指数做了研究，并以北京市公交网络为例完成了实证分析；2009年，有些学者利用图论的研究方法，利用复杂网络理论与 Pajek 可视化网络分析软件，根据三种不同建模方法实证研究了南京市公交网络的拓扑结构特性。

近30年来,我国交通领域的科研人员和公共交通部门等在公共交通系统规划领域尤其是针对公交网络进行了大量的研究工作,如公交线网优化、乘客流分配方法、公交枢纽、站场、换乘、定量预测、公交系统评价方法、公交系统工程与改建等。

## 2. 国外研究现状

国外专家学者对于城市道路交通网络和运输系统能力的研究较多,而对公交线路选定、公交网络设计及优化等问题的研究较少。对于城市道路网络,2002年和2004年分别有人提出了计算运输系统适应需求和交通模式变化灵活性的概念及方法;2003年有学者研究了运输系统能力与可靠性和灵活性模型的关系问题;2005年也有学者提出了较为先进的综合交通网络能力模型问题。对于公交能力的研究主要是以公交线路和公交设备能力作为主要的约束变量来分析和研究其相关问题的。在线路选定及其应用方面,比较有代表性的是1981年出现的关于公交线频率方面的研究,它们是根据确定的需求利用一个供给模型或需求模型来确定各个公交线的频率,但没有考虑供需双方的相互作用,尤其没有对需求变化态势对公交网络的影响做系统深入的研究。在公交网络设计方面,20世纪80年代初期,一些专家学者提出了一些富有建设性的模型和算法,但这些研究只是局限于单一线路设计和重新优化设计,而没有从整个公交网络的设计或优化设计出发,更没有考虑城市结构变化等因素造成乘客流流向变化的态势对公交网络需求的影响。进入20世纪90年代和21世纪初期,一些研究考虑了供需双方相互作用的问题,但这些研究都是基于各条公交线路的频率都是一成不变的,即间接地认为公交网络是静态的,因而得出的结论与实际应用需求具有一定的不可衔接性。这些相关研究成果,大部分是针对城市公交网络静态特性的计算和统计分析,虽然可以在一定程度上揭示网络拓扑特性,但对于发挥公交网络动态特性、利用公交网络衍生变化等明显不足。

近几年,基于时间的公交网络动态模型受到了广泛关注。如基于公交线频率方面的研究,与21世纪初期的研究相比,其研究内容消除了隐性或不确定的因素,能够更加准确地描述公交车辆的行为,也适合于公交系统的动态分析,但它们是在公交线路时间表给定的情况下单一地讨论公交系统的动态模型,而没有考虑时间表如何设定的问题,这样,又忽视了乘客流流向变化的态势对公交网络需求的影响。

由于城市公交网络依附于交通网络,所以利用复杂网络理论来研究交通网络和城市公交网络成为必然趋势。2002年,Latora和Marchiori对波士顿地

铁网络进行了小世界效应的初步分析;Strogatz 和 Albert 分别在 2001 年和 2002 年论证了城市公交网络构成典型复杂网络的必然性;此后, Sienkiewicz 在 2005 年以及 Angeloudis 在 2006 年利用复杂网络理论实证了城市公交网络的复杂性, 对相关研究做出了有影响力的工作;另外, Ferber 等在 2005 年的研究中以柏林、杜塞尔多夫和巴黎 3 个城市的公交网络为研究对象, 得出这些公交网络的节点度服从幂率分布; Sienkiewicz 和 Holyst 在 2005 年的研究中对波兰 22 个城市的公交网络做了分析, 并详细统计了两种抽象方式下度分布、群聚系数、度的相关性等参数, 论证了公交网络复杂的结构特性及其对城市交通的影响。