第一部分　多项式

一　常用定理及结论

1　数域 P 上的全体一元多项式之集 $P[x]$ 对多项式的加法及乘法作成环，称为一元多项式环.

2　次数定理：设 $f(x), g(x) \in R[x]$ 均不等于 0，R 为含数 1 的数环，则

（1）当 $f(x) \pm g(x) \neq 0$ 时，$\partial^0(f(x) \pm g(x)) \leqslant \max\{\partial^0 f(x), \partial^0 g(x)\}$.

（2）$\partial^0(f(x)g(x)) = \partial^0 f(x) + \partial^0 g(x)$.

3　带余除法定理：设 $f(x), g(x) \in P[x]$，且 $g(x) \neq 0$，则存在 $q(x), r(x) \in P[x]$，使

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)，其中\ r(x) = 0，或\ \partial^0 r(x) < \partial^0 g(x). \qquad (*)$$

符合条件（*）的 $q(x), r(x)$ 唯一，分别称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式及余式.

4　$g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式等于零.

5　设 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$，则 $f(x), g(x)$ 的公因式与 $g(x), r(x)$ 的公因式相同．进而有：$f(x), g(x)$ 的最大公因式与 $g(x), r(x)$ 的最大公因式相同.

6　设 $d(x)$ 是 $f(x), g(x) \in P[x]$ 的一个最大公因式，则

（1）对任意的非零常数 $c \in P$，$c \cdot d(x)$ 也是 $f(x), g(x)$ 的一个最大公因式.

（2）若 $d_1(x)$ 也是 $f(x), g(x)$ 的一个最大公因式，则存在非零常数 $c_0 \in P$，使 $d_1(x) = c_0 d(x)$.

7　Bouzt 公式：设 $d(x)$ 是 $f(x), g(x) \in P[x]$ 的一个最大公因式，则存在 $u(x), v(x) \in P[x]$，使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$．反之，若 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$，且 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的一个公因式，则 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的一个最大公因式.

8　$f(x), g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow$ $f(x), g(x)$ 只有零次公因式

$\Leftrightarrow$ $(f(x), g(x)) = 1$

$\Leftrightarrow$ 存在 $u(x), v(x)$，使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$.

9　设不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的 k 重因式，则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 导数多项式的 $k-1$ 重因式．反之，若 $p(x)$ 是 $f(x)$ 导数多项式的 $k-1$ 重因式，$p(x)$ 未必是多项式 $f(x)$ 的 k 重因式.

10　$f(x)$ 无重因式 $\Leftrightarrow$ $(f(x), f'(x)) = 1$.

11　$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_t^{r_t}(x)$ 为 $f(x)$ 在数域 P 上的典型分解式 $\Leftrightarrow$

（1） $a\in P$；

（2） $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_t(x)$ 均在 P 上不可约；

（3） $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_t(x)$ 首次项系数均为 1；

（4） $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_t(x)$ 两两不同.

12　数环 R 上的 $n(>0)$ 次多项式在 R 中最多有 n 个根.

13　R 是数环，$c\in R$ 为 $f(x)$ 的根 $\Leftrightarrow$ $f(c)=0$ $\Leftrightarrow$ 若 $f(x)=(x-c)q(x)+r$，则 $r=0$.

14　代数学基本定理：复数域 C 上的任一 $n(>0)$ 次多项式在 C 中至少有一个根.

由此得出：复数域 C 上的任一 $n(>0)$ 次多项式在 C 中必有 n 个根.

15　Vieta 定理：设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在复数域中的 n 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\dfrac{a_1}{a_0}\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=(-1)^2\dfrac{a_2}{a_0}\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=(-1)^3\dfrac{a_3}{a_0}\\ \cdots\cdots\\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}\end{cases}.$$

16　复数域 C 上只有一次多项式不可约.

17　虚根成对原理：设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 为实系数多项式，则 $f(x)$ 的非实复根成对出现. 即 α 为 $f(x)$ 的根时，$\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根，且 α 与 $\bar{\alpha}$ 有相同的重数.

18　实数域 R 上除一次多项式不可约外，判别式小于 0 的二次多项式也不可约.

19　（1）有理系数多项式 $f(x)$ 在有理数域 Q 上不可约 $\Leftrightarrow$ 整系数多项式 $kf(x)$ 在 Q 上不可约.

（2）整系数多项式 $f(x)$ 在 Q 上不可约 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 能分解成低次整系数多项式的乘积.

20　有理数域 Q 存在任意次不可约多项式.

21　Eisenstein 判别法：设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是一个整系数多项式，若存在素数 p，满足：（1） $p\nmid a_0$；（2） $p\mid a_i,i=1,2,\cdots,n$；（3） $p^2\nmid a_n$，则 $f(x)$ 在有理数域 Q 上不可约.

22　有理根筛选定理：设有理数 $\dfrac{u}{v}$ $(u,v$ 互质$)$ 是整系数多项式 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的根，则（1） $v\mid a_0$，$u\mid a_n$；（2） $f(x)=\left(x-\dfrac{u}{v}\right)q(x)$，$q(x)$ 是整系数多项式.

23　设函数 f,g 分别为多项式 $f(x),g(x)$ 所决定的多项式函数，则 $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f=g$.

24　对称多项式基本定理：数环 R 上的任一 n 元对称多项式必能表成 n 元初等对称多项式的多项式.

25　设 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是数域 P 上的一个 n 次多项式，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是其在复数域中的 n 个根，则关于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的任一对称多项式都可以表成关于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的初等对称多项式的多项式，因而必为 P 中的一个数.

26　设 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是复数域 C 上的一个 $n(>0)$ 次多项式，其在 C 中的 n 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 称

$$\begin{aligned}D(f)=a_0^{2n-2}&(\alpha_2-\alpha_1)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2\cdots(\alpha_n-\alpha_1)^2\\ &\cdot(\alpha_3-\alpha_2)^2\cdots(\alpha_n-\alpha_2)^2\\ &\cdots\cdots\\ &\cdot(\alpha_n-\alpha_{n-1})^2\\ =a_0^{2n-2}&\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)^2\end{aligned}$$

为 $f(x)$ 的判别式.

27　设 $R(f,f')$ 表示多项式 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 与其导数多项式 $f'(x)$ 的结式，D 表示 $f(x)$ 的判别式，则 $D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{1}{a_0}R(f,f')$.

28　$f(x)=ax^2+bx+c$ 的判别式为 b^2-4ac.

29　$f(x)$ 有重根 $\Leftrightarrow$ 它的判别式等于 0.

二　常见题型及解答

（一）多项式的定义，整除，带余除

问题 1.01　设 $f(x)$ 为数域 F 上的多项式，$x\in F$ 是任意数，$c\neq 0$ 是 F 中的常数. 证明：$f(x-c)=f(x)\Leftrightarrow f(x)$ 是常数.

证明　$\Leftarrow$　若 $f(x)=k$，k 为常数，则 $f(x-c)=k=f(x)$.

$\Rightarrow$　若 $f(x)=0$，则结论显然成立，下设 $f(x)\neq 0$.

若 $f(x)$ 不是常数，令 $\partial^0 f(x)=n>0$，并设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $f(x)$ 在复数域中的 n 个根. 则

$$f(x_i-c)=f(x_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

即 $x_1-c,x_2-c,\cdots,x_n-c$ 也是 $f(x)$ 在复数域中的 n 个根. 于是由 Vieta 定理知

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=(x_1-c)+(x_2-c)+\cdots+(x_n-c),$$

从而 $c=0$，这与 $c\neq 0$ 矛盾. 故 $f(x)=k$ 是常数.

问题 1.02　设 $f(x)$ 为数域 F 上的多项式，x,y 是 F 中的任意数，$c\neq 0$ 是 F 中的常数. 证明：$f(x+y)=f(x)f(y)\Leftrightarrow f(x)\equiv 0$ 或 $f(x)=1$.

证明 $\Leftarrow$ 若 $f(x)=0$，则 $f(x+y)=0=0\cdot 0=f(x)f(y)$；

若 $f(x)=1$，则 $f(x+y)=1=1\cdot 1=f(x)f(y)$.

$\Rightarrow$ 若 $f(x)=0$，则证毕. 若 $f(x)\neq 0$，由于

$$f(2x)=f(x+x)=f(x)f(x)=f^2(x),$$

比较次数知，$\partial^0 f(x)=0$. 令 $f(x)=c\neq 0$, 因 $c=f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)=c^2$ 得 $c=1$. 从而 $f(x)=1$.

问题 1.03 设 $f(x)$ 为数域 F 上的多项式，x,y 是 F 中的任意数，$c\neq 0$ 是 F 中的常数. 试证明：$f(x+y)=f(x)+f(y)\Leftrightarrow f(x)=kx$.

证明 $\Leftarrow$ 若 $f(x)=kx$，则 $f(x+y)=k(x+y)=kx+ky=f(x)+f(y)$.

$\Rightarrow$ 证法 1 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. 因

$$f(2y)=f(y+y)=f(y)+f(y)=2f(y),$$

即
$$f(2y)-2f(y)=0.$$

亦即
$$(a_0(2y)^n+a_1(2y)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(2y)+a_n)-2(a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}y+a_n)$$
$$=(2^n-2)a_0x^n+(2^{n-1}-2)a_1x^{n-1}+\cdots+(2^2-2)a_{n-2}x^2-a_n=0.$$

于是 $a_0=a_1=\cdots=a_{n-2}=a_n=0$，此时 $f(x)=a_{n-1}x=kx$, 其中 $k=a_{n-1}$.

$\Rightarrow$ 证法 2 对 $\forall b\in F$，由 $f(b)=f(0+b)=f(0)+f(b)$ 知 $f(0)=0$，即 0 是 $f(x)$ 的根.

若 α 是 $f(x)$ 的根，$f(2\alpha)=f(\alpha+\alpha)=f(\alpha)+f(\alpha)=0$，即 2α 是 $f(x)$ 的根；

$f(3\alpha)=f(\alpha+2\alpha)=f(\alpha)+f(2\alpha)=0$，即 3α 是 $f(x)$ 的根；

....

如此下去知，对任意正整数 m，$m\alpha$ 是 $f(x)$ 的根. 但当 $f(x)\neq 0$ 时，$f(x)$ 不可能有无穷多根，因此 $f(x)\neq 0$ 时，$\alpha=0$. 故 $f(x)$ 只有零根，或 $f(x)=0$. 于是可设

$$f(x)=x^np(x)，其中\ p(x)\in F[x]\ 且在\ F\ 中无根.$$

因 $f(m)=mf(1)$，$f(1)=p(1)$，于是

$$f(m)=m^np(m)=mf(1)=mp(1).$$

故
$$m^{n-1}p(m)=p(1)，即\ m^{n-1}p(m)-p(1)=0.$$

于是多项式 $x^{n-1}p(x)-p(1)$ 有无穷多个整数根 m. 从而 $x^{n-1}p(x)=p(1)$. 代入 $f(x)=x^np(x)$ 中得 $f(x)=xp(1)$. 记 $p(1)=k$,则 $f(x)=kx$.

$\Rightarrow$ 证法 3 对 $\forall b\in F$，由 $f(b)=f(0+b)=f(0)+f(b)$ 知 $f(0)=0$，即 $f(x)$ 的常数项为零. 于是可设

$$f(x)=a_1x+\cdots+a_nx^n.$$

记 $f(1)=a_1+a_2+\cdots+a_n=k$. 将 $1,2,\cdots,n$ 依次代入上式得：

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k \\ 2a_1 + 2^2 a_2 + \cdots + 2^n a_n = 2k \\ \cdots\cdots \\ na_1 + n^2 a_2 + \cdots + n^n a_n = nk \end{cases}. \qquad ①$$

视① 中的 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个解，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ \vdots \\ nk \end{pmatrix}$.

记 $D = |\boldsymbol{A}| = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \cdots \cdot (n-1)! \neq 0$，$D_j$ 为用 b 替换 D 的第 j 列所得的行列式，$j = 1, 2, \cdots, n+1$. 由 Cramer 法则知，$a_1 = \dfrac{D_1}{D} = k$，$a_j = \dfrac{D_j}{D} = 0 \ (j = 2, 3, \cdots, n)$. 故 $f(x) = kx$.

问题 1.04　设 $f(x) \neq 0$，证明：$f(x^2) = f^2(x) \Leftrightarrow f(x) = x^n$.

证明　$\Leftarrow$　若 $f(x) = x^n$，则 $f(x^2) = (x^2)^n = (x^n)^2 = f^2(x)$.

$\Rightarrow$　设 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$，$a_0 \neq 0$. 因 $f(x^2) = f^2(x)$，则

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + \cdots + a_{n-1} x^2 + a_n = (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n)^2.$$

对比系数得：$a_0 = a_0^2$，$2a_0 a_1 = 0,\ 2a_0 a_2 = a_1,\ 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 = 0,\ \cdots,\ a_n = a_n^2$.
由于 $a_0 \neq 0$，所以 $a_0 = 1$. 进而 $a_1 = 0$，逐步代入其后的式子中得 $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = a_n = 0$.于是 $f(x) = x^n$.

问题 1.05　设 $f(x) = 2x^2 - 3$，$g(x) = 8x^4 - 6x^2 + 4x - 7$，求 $f^3(x)g(x)$ 所有系数的和.

解　$f(1) = -1$，$g(1) = -1$，故 $f^3(x)g(x)$ 所有系数的和为 $f^3(1)g(1) = (-1)^3(-1) = 1$.

注：多项式 $f(x)$ 的所有系数之和为 $f(1)$，$f(x)$ 的常数项为 $f(0)$.

问题 1.06　设 $f_1(x) = 1$，$f_{i+1}(x) = 1 - xf_i(x), i = 1, 2, \cdots$. 求 $F(x) = 1 + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{2017}(x)$ 所有系数的和.

解　易见，

$$f_1(x) = 1,\quad f_2(x) = 1 - x,\quad f_3(x) = 1 - x + x^2,\quad f_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3, \cdots$$

可以看出，当 i 为奇数时，$f_i(x)$ 的所有系数之和为 1；当 i 为偶数时，$f_i(x)$ 的所有系数之和为 0. 从而 $F(x) = 1 + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{2015}(x)$ 所有系数的和为 1009+1=2010.

问题 1.07　设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 个多项式. 证明：若

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \mid f_1(x^n) + xf_2(x^n) + \cdots + x^{n-2} f_{n-1}(x^n),$$

则 $f_i(x)$ 的所有系数之和为 0. $i = 1, 2, \cdots, n-1$.

证明　设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 是不等于 1 的全部 n 次单位根，则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 互不相同. 由

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \mid f_1(x^n) + xf_2(x^n) + \cdots + x^{n-2} f_{n-1}(x)$$

知，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 是 $f_1(x^n) + xf_2(x^n)g(x) + \cdots + x^{n-2} f_{n-1}(x)$ 的根. 于是有

$$\begin{cases} f_1(1)+\varepsilon_1 f_2(1)+\varepsilon_1^2 f_3(1)+\cdots+\varepsilon_1^{n-2} f_{n-1}(1)=0 \\ f_1(1)+\varepsilon_2 f_2(1)+\varepsilon_2^2 f_3(1)+\cdots+\varepsilon_2^{n-2} f_{n-1}(1)=0 \\ \cdots\cdots \\ f_1(1)+\varepsilon_{n-1} f_2(1)+\varepsilon_{n-1}^2 f_3(1)+\cdots+\varepsilon_{n-1}^{n-2} f_{n-1}(1)=0 \end{cases}. \qquad ①$$

将①式看成以 $f_1(1), f_2(1),\cdots, f_{n-1}(1)$ 为未知量的齐次线性方程组，其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_1^{n-2} \\ 1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)\neq 0,$$

①只有零解. 故 $f_i(1)=0$，从而 $f_i(x)$ 的所有系数之和为 0，$i=1,2,\cdots,n-1$.

注：若 $f(x)$ 的根都是 $g(x)$ 的根且 $f(x)$ 无重根，则 $f(x)\mid g(x)$.

问题 1.08　设 $f(x)=(x^{50}-x^{49}+x^{48}-x^{47}+\cdots-x+1)(x^{50}+x^{49}+x^{48}+\cdots+x+1)$，求 $f(x)$ 的奇次项系数之和.

解法 1　由于

$$x^{51}+1=(x+1)(x^{50}-x^{49}+x^{48}-x^{47}+\cdots-x+1);$$

$$x^{51}-1=(x-1)(x^{50}+x^{49}+x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1),$$

两式相乘得：$x^{102}-1=(x^2-1)f(x)$. 由于 $x^{102}-1$，x^2-1 均无奇数次项，故 $f(x)$ 的奇数次项系数之和为 0.

解法 2　因

$$f(-x)=(x^{50}+x^{49}+x^{48}+\cdots+x+1)(x^{50}-x^{49}+x^{48}-x^{47}+\cdots-x+1)=f(x),$$

故 $f(x)$ 为偶函数，于是 $f(x)$ 的奇次项系数之和为 0.

问题 1.09　a,b,c 满足什么条件时，$(x^2+ax+1)\mid(x^4+bx^2+c)$.

解　令 $x^4+bx^2+c=(x^2+ax+1)(x^2+mx+n)$，比较两端系数得：

$$a+m=0,\quad am+n+1=b,\quad an+m=0,\quad n=c.$$

将 $m=-a,\ n=c$ 代入 $an+m=0$ 中得：

$$a(c-1)=0.$$

若 $a=0$，则 $b=c+1$；若 $c=1$，则 $b=2-a^2$. 故 $(x^2+ax+1)\mid(x^4+bx^2+c)$ 的条件是

$$\begin{cases} a=0 \\ b=c+1 \end{cases} 或 \begin{cases} c=1 \\ b=2-a^2 \end{cases}.$$

问题 1.10　设 $f_1(x), f_2(x)$ 是两个多项式. 证明：如果 x^2+x+1 整除 $f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，则 $x-1$ 整除 $f_1(x), f_2(x)$.

证明　易见，x^2+x+1 的根为 3 次单位原根 ϖ 及它的共轭数 $\bar{\varpi}$. 因 x^2+x+1 整除 $f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，故

$$f_1(\varpi^3)+\varpi f_2(\varpi^3)=0,\quad f_1(\bar{\varpi}^3)+\bar{\varpi} f_2(\bar{\varpi}^3)=0.$$

即 $$f_1(1)+\varpi f_2(1)=0\text{，}\quad f_1(1)+\overline{\varpi} f_2(1)=0.$$

由以上两式可得 $f_1(1)=f_2(1)=0$．从而 $(x-1)\mid f_1(x),(x-1)\mid f_2(x)$．

问题 1.11　设 x^2+1 整除 $x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1$，求 k 的值.

解　因 $(x-1)(x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1)=x^{k+1}-1$，又 x^2+1 的两根为 $\pm\mathrm{i}$，故由所给条件知，$\pm\mathrm{i}$ 必为 $x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1$ 的根．于是 $k+1$ 为 4 的倍数，故 $k\equiv 3 \bmod 4$．

问题 1.12　设 $f(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$，$g(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}$．证明：$f(x)\mid g(x)\Leftrightarrow n$ 为偶数.

证明　因 $(x^2-1)f(x)=x^{2n+2}-1$，$(x^4-1)f(x)=x^{4n+4}-1$，则

$$f(x)=\frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1},\ g(x)=\frac{x^{4n+4}-1}{x^4-1}.$$

于是 $$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^{4n+4}-1}{x^4-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^{2n+2}-1}=\frac{x^{2n+2}+1}{x^2+1}=\frac{x^{2(n+1)}+1}{x^2+1}.$$

故 $f(x)\mid g(x)\Leftrightarrow (x^2+1)\mid(x^{2(n+1)}+1)\Leftrightarrow(\pm\mathrm{i})^{2(n+1)}+1=0\Leftrightarrow n$ 为偶数.

问题 1.13　证明：$x^2+x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$（$m,n,p$ 为任意正整数）．

证法 1　因 $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}=(x^{3m}-1)+x(x^{3n}-1)+x^2(x^{3p}-1)+x^2+x+1$，而

$$\begin{aligned}x^{3k}-1&=(x^3)^k-1=(x^3-1)(x^{3(k-1)}+x^{3(k-2)}+\cdots+x^3+1)\\&=(x-1)(x^2+x+1)(x^{3(k-1)}+x^{3(k-2)}+\cdots+x^3+1),\end{aligned}$$

所以 $(x^2+x+1)\mid(x^{3m}-1),\ (x^2+x+1)\mid(x^{3n}-1),\ (x^2+x+1)\mid(x^{3p}-1)$．故

$$x^2+x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}.$$

证法 2　x^3-1 的两个虚根 ϖ_1,ϖ_2 满足 $1+x+x^2=0$，将 ϖ_1,ϖ_2 分别代入 $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ 中得：

$$\varpi_1^{3m}+\varpi_1^{3n+1}+\varpi_1^{3p+2}=1+\varpi_1+\varpi_1^2=0\text{，}\quad \varpi_2^{3m}+\varpi_2^{3n+1}+\varpi_2^{3p+2}=1+\varpi_2+\varpi_2^2=0.$$

又 $x-\varpi_1$ 与 $x-\varpi_2$ 互素，所以 $(x-\varpi_1)(x-\varpi_2)\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$，即 $x^2+x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$．

问题 1.14　设 $f_1(x),f_2(x)\cdots,f_s(x)$ 有公共根 1，证明：对任意多项式 $g_1(x),g_2(x)\cdots,g_s(x)$，

$$(x^{n-1}+\cdots+x+1)\mid g_1(x)f_1(x^n)+g_2(x)f_2(x^n)+\cdots+g_s(x)f_s(x^n).$$

证明　设 α 是 $x^{n-1}+\cdots+x+1$ 的任一根，则 $\alpha^n=1$．由 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 有公共根 1 可知，

$$0=f_i(1)=f_i(\alpha^n),i=1\cdots s,$$

即 α 是每一个 $f_i(x^n),i=1,2,\cdots,s$ 的根．因而 α 也是 $g_1(x)f_1(x^n)+g_2(x)f_2(x^n)+\cdots+g_s(x)f_s(x^n)$ 的根．又因 $x^{n-1}+\cdots+x+1$ 无重根，故

$$(x^{n-1}+\cdots+x+1)\mid g_1(x)f_1(x^n)+g_2(x)f_2(x^n)+\cdots+g_s(x)f_s(x^n).$$

问题 1.15　用 $x-1,x-2,x-3$ 除 $f(x)$ 的余式分别为 $4,8,16$，试求用 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 除 $f(x)$ 的余式.

解　令 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)q(x)+ax^2+bx+c$．由 $f(1)=4,f(2)=8,f(3)=16$ 知，

$$a+b+c=1,\ 4a+2b+c=8,\ 9a+3b+c=16.$$

以上三式联立求出 $a=2,b=-2,c=4$．故 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 除 $f(x)$ 的余式为 $2x^2-2x+4$．

问题 1.16　用 $x-a,x-b,x-c$ 除 $f(x)$ 的余式分别为 r,s,t，试求用 $g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ 除 $f(x)$ 的余式.

解　因 $f(a)=r$， $f(b)=s$， $f(c)=t$，可设

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)q(x)+d(x)\text{，其中 }\partial^0 d(x)\leqslant 2\ \text{ 且 } d(a)=r,\ d(b)=s,\ d(c)=t.$$

由 Lagrange 插值公式得：$d(x)=r\cdot\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+s\cdot\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+t\cdot\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

问题 1.17　求一个 3 次多项式 $f(x)$，使 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^2$ 整除，$f(x)-1$ 能被 $(x+1)^2$ 整除.

解　因 $x=1$ 为 $f(x)+1$ 的最少 2 重根，故 $x=1$ 为 $f'(x)$ 的最少 1 重根. 同理，$x=-1$ 为 $f'(x)$ 的最少 1 重根. 又因 $\partial^0 f'(x)=2$，故可设

$$f'(x)=a(x-1)(x+1)=a(x^2-1).$$

积分得

$$f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+b.$$

因 $f(1)=-1,f(-1)=1$，即

$$a\left(\frac{1}{3}-1\right)+b=-1,\quad a\left(-\frac{1}{3}+1\right)+b=1.$$

解得 $a=\dfrac{3}{2},b=0$，从而所求 3 次多项式为 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x.$

问题 1.18　求一个 7 次多项式 $f(x)$，使 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^4$ 整除， $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^4$ 整除.

解　因 $x=1$ 为 $f(x)+1$ 的最少 4 重根，故 $x=1$ 为 $f'(x)$ 的最少 3 重根. 同理，$x=-1$ 为 $f'(x)$ 的最少 3 重根. 又因 $\partial^0 f'(x)=6$，故可设

$$f'(x)=a(x-1)^3(x+1)^3=a(x^6-3x^4+3x^2-1).$$

积分得

$$f(x)=a\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)+b.$$

因 $f(1)=-1,f(-1)=1$，即

$$a\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{5}\right)+b=-1,\quad a\left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{5}\right)+b=1.$$

解得 $a=\dfrac{35}{16}$， $b=0$．从而所求 7 次多项式为 $f(x)=\dfrac{5}{16}x^7-\dfrac{21}{16}x^5+\dfrac{35}{16}x^3-\dfrac{35}{16}x.$

问题 1.19　证明：$(x^d-1)\mid(x^n-1)$ 的充要条件是 $d\mid n$．

证法 1　$\Leftarrow$　设 $d\mid n$，令 $n=md$，则

$$x^n-1=(x^d)^m-1=(x^d-1)(x^{d(m-1)}+x^{d(m-2)}+\cdots+x^d+1),$$

故 $(x^d-1)\mid(x^n-1)$．

$\Rightarrow$　设 $n=dq+r\ (0\leqslant r<d)$，则

$$x^n-1=x^{dq+r}-1=(x^{dq}-1)x^r+x^r-1.$$

因 $(x^d-1)|(x^n-1)$，$(x^d-1)|(x^{dq}-1)$，所以 $(x^d-1)|(x^r-1)$，而 $0\leqslant r<d$，所以 $r=0$. 从而 $n=dq$，即 $d|n$.

证法 2 $\Leftarrow$ 同证法 1.

$\Rightarrow$ $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$， $x^d-1=(x-1)(x^{d-1}+x^{d-2}+\cdots+x+1)$.

因 $(x^d-1)|(x^n-1)$，所以 $(x^{d-1}+x^{d-2}+\cdots+x+1)|(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$. 则

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x^{d-1}+x^{d-2}+\cdots+x+1)q(x)，其中 q(x) 是整系数多项式.$$

取 $x=1$，则 $n=dq(1)$，而 $q(1)$ 为整数，故 $d|n$.

问题 1.20 设 P 是一个数域，$f(x),g(x)\in P[x]$ 且 $\partial^0 f(x)\geqslant 1$. 证明：存在唯一的多项式序列 $f_0(x),f_1(x),\cdots,f_r(x)\in P[x]$，使

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)g(x)+f_2(x)g^2(x)+\cdots+f_r(x)g^r(x).$$

其中 $\partial^0 f_i(x)<\partial^0 g(x)$ 或 $f_i(x)=0$， $0\leqslant i\leqslant r$.

证明 由带余除法定理知 $f(x)=g(x)p(x)+f_0(x)$，这里 $\partial^0 f_0(x)<\partial^0 g(x)$ 或 $f_0(x)=0$.

如果 $\partial^0 p(x)\geqslant\partial^0 g(x)$，再令 $p(x)=g(x)p_1(x)+f_1(x)$，这里 $\partial^0 f_1(x)<\partial^0 g(x)$ 或 $f_1(x)=0$. 那么

$$f(x)=g(x)[g(x)p_1(x)+f_1(x)]+f_0(x)=f_0(x)+f_1(x)g(x)+p_1(x)g^2(x).$$

如果 $\partial^0 p_1(x)\geqslant\partial^0 g(x)$，再设 $p_1(x)=g(x)p_2(x)+f_2(x)$，这里 $\partial^0 f_2(x)<\partial^0 g(x)$ 或 $f_2(x)=0$. 那么

$$\begin{aligned}f(x)&=f_0(x)+f_1(x)g(x)+[g(x)p_2(x)+f_2(x)]g^2(x)\\&=f_0(x)+f_1(x)g(x)+f_2(x)g^2(x)+p_2(x)g^3(x).\end{aligned}$$

如此下去， $f(x)=f_0(x)+f_1(x)g(x)+f_2(x)g^2(x)+\cdots+f_r(x)g^r(x)$.

设另有多项式序列 $h_0(x),h_1(x),\cdots,h_r(x)\in P[x]$，符合 $\partial^0 h_i(x)<\partial^0 g(x)$ 或 $h_i(x)=0$， $0\leqslant i\leqslant r$，使

$$f(x)=h_0(x)+h_1(x)g(x)+h_2(x)g^2(x)+\cdots+h_r(x)g^r(x),$$

则 $$0=[f_0(x)-h_0(x)]+[f_1(x)-h_1(x)]g(x)+[f_2(x)-h_2(x)]g^2(x)+\cdots+[f_r(x)-h_r(x)]g^r(x).$$

由于多项式序列 $f_0(x)-h_0(x),[f_1(x)-h_1(x)]g(x),[f_2(x)-h_2(x)]g^2(x),\cdots,[f_r(x)-h_r(x)]g^r(x)$ 的次数是严格升序，不能相互抵消，所以只能有

$$f_i(x)-h_i(x)=0,i=0,1,2,\cdots,r，即 f_i(x)=h_i(x)=0,i=0,1,2,\cdots,r.$$

唯一性得证.

问题 1.21 设 $f(x),g(x)$ 是数域 P 上的非零多项式，且 $g(x)=s^m(x)g_1(x)$. 其中 $m\geqslant 1$，$(s(x),g_1(x))=1,s(x)|f(x)$. 证明：不存在 $f_1(x),r(x)\in P[x]$，且 $r(x)\neq 0,\partial^0 r(x)<\partial^0 s(x)$，使得 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{r(x)}{s^m(x)}+\dfrac{f_1(x)}{s^{m-1}(x)g_1(x)}$.

证明 反证. 若存在 $f_1(x),r(x)\in P[x]$，使

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{s^m(x)}+\frac{f_1(x)}{s^{m-1}(x)g_1(x)}，其中 r(x)\neq 0,\ \partial^0 r(x)<\partial^0 s(x).$$

两端同乘 $g(x)$ 得： $$f(x)=r(x)g_1(x)+f_1(x)s(x).$$
因 $s(x)\mid f(x), s(x)\mid f_1(x)s(x)$，故 $s(x)\mid r(x)g_1(x)$，而 $(s(x),g_1(x))=1$，故 $s(x)\mid r(x)$．这不可能.

故不存在 $f_1(x),r(x)\in P[x]$，且 $r(x)\neq 0,\ \partial^0 r(x)<\partial^0 s(x)$，使得 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{r(x)}{s^m(x)}+\dfrac{f_1(x)}{s^{m-1}(x)g_1(x)}$.

问题 1.22　设 $f(x),g(x)$ 是数域 F 上的多项式，证明： $f(x)\mid g(x)$ 当且仅当对任意大于 1 的自然数 n，都有 $f^n(x)\mid g^n(x)$.

证明　$\Rightarrow$　若 $f(x)\mid g(x)$，则 $f^n(x)\mid g^n(x)$.

$\Leftarrow$　令 $f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_t^{r_t}(x)$，$g(x)=bq_1^{s_1}(x)q_2^{s_2}(x)\cdots q_l^{s_l}(x)$ 分别为 $f(x),g(x)$ 在 F 的典型分解式，因 $f^n(x)\mid g^n(x)$，故 $t\leqslant l$，且每一个 $[p_i^{r_i}(x)]^n$ 必然整除 $[q_1^{s_1}(x)]^n,[q_2^{s_2}(x)]^n,\cdots,[q_l^{s_l}(x)]^n$ 中的某一个，不妨设 $[p_i^{r_i}(x)]^n\mid[q_i^{s_i}(x)]^n$，$i=1,2,\cdots,t$．于是 $p_i^{r_i}(x)\mid q_i^{s_i}(x)$，$i=1,2,\cdots,t$，从而 $f(x)\mid g(x)$.

问题 1.23　设 $f(x)=x^2-4x+a$，存在唯一的 3 次首 1 多项式 $g(x)$，使 $f(x)\mid g(x)$ 且 $g(x)\mid f^2(x)$，求出 a 与 $g(x)$.

解　由 $f(x)\mid g(x)$ 可设 $g(x)=(x^2-4x+a)(x-b)=x^3-4x^2+(a+4b)x-ab$．易算出：
$$f^2(x)=x^4-8x^3+(2a+16)x^2-8ax+a^2.$$
用 $g(x)$ 除 $f^2(x)$ 得： $f^2(x)=g(x)(x-4)+[(a-4b)x^2+(ab-4a+16b)x+a^2-4ab]$.

由 $g(x)\mid f^2(x)$ 知，$(a-4b)x^2+(ab-4a+16b)x+a^2-4ab=0$．从而求出 $a=b=0$．此时
$$g(x)=x^3-4x^2.$$

（二）最大公因式，互素

问题 1.24　设 $f(x),g(x),h(x)$ 都是数域 P 上的多项式，满足：
$$(x^2+1)h(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0,\quad (x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0.$$
证明：(x^2+1) 是 $f(x),g(x)$ 的公因式.

证明　两式相减得 $f(x)=-2g(x)$．两式相加得 $(x^2+1)h(x)+xf(x)+xg(x)=0$．于是得
$$(x^2+1)h(x)-xg(x)=0,\ 即\ (x^2+1)\mid xg(x).$$
因 x^2+1,x 互素，故 $(x^2+1)\mid g(x)$，进而 $(x^2+1)\mid f(x)$．从而 (x^2+1) 是 $f(x),g(x)$ 的公因式.

问题 1.25 求多项式 $f(x)=\underbrace{x^m 鬃^m \cdots ?x^m}_{m}\quad x$ 与 $g(x)=(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)x$ 的最大公因式，其中 $m(\neq 1)$ 为正奇数.

解　由所给条件知，$g(x)=x(x^8-1)$，$f(x)=x^{m^2}-x=x(x^{m^2-1}-1)$．因 m 为正奇数且 $m\neq 1$，令 $m=2n+1$，$n>0$ 为整数，则
$$m^2-1=4n^2+4n=4n(n+1).$$
又因 $n,n+1$ 中必有一个偶数，则 $n(n+1)=2k$，于是 $m^2-1=8k$，$k>0$ 为整数. 则
$$f(x)=x^{m^2}-x=x(x^{8k}-1).$$