

第一章 有理数

基本内容结构

本章内容：(1) 有理数的相关概念，包括数轴、相反数、绝对值等；(2) 有理数的运算，包括有理数的加、减、乘、除和乘方运算等；(3) 科学记数法和近似数.

本章重点：(1) 有理数的相关概念，能在数轴上表示有理数，并借助数轴理解相反数和绝对值的意义；(2) 有理数的运算，能进行有理数的加、减、乘、除、乘方运算和简单的混合运算.

本章难点：负数概念的建立以及对有理数运算法则的理解.

本章考情：本章在中考题中主要考查有理数的有关概念和科学记数法，题型主要以选择题、填空题为主. 本章知识是后续学习的基础，所以在对其他内容的考查中也会包含有理数的知识.

学习方法指导

1. 有理数的有关概念及运算与小学学过的数的概念及运算联系紧密，因此注意应用类比的方法学习. 例如，对负数的认识离不开对已学过的数的认识；有理数的运算，当符号确定后，就归结为已学过的运算.

2. 注重数学思想的应用，体会数形结合、分类讨论、转化、类比等数学思想方法在本章学习中的应用.

1.1 正数和负数

本节概念与方法：正数和负数是具有相反意义的量.

教学要求

1. 了解正数和负数的产生过程，体会数学与现实生活的联系.
2. 理解正数、负数和 0 的意义，会判断一个数是正数还是负数.

3. 能用正数、负数表示生活中具有相反意义的量.

提前预习内容

1. 自然数的认识：自然数起源于数数，0 是最小的自然数，没有最大的自然数.
2. 自然数与整数的关系：自然数都是整数，但整数不一定是自然数.
3. 分数：把单位“1”平均分成若干份，表示这样一份或几份的数叫做分数.

知识点突破

知识点 1 正数与负数的定义

1. 像 2%, 4, 3, 5 这样大于 0 的数叫做正数. 有时为了明确所表达的意义，要在正数前面加上“+”（正）号，如 +2, +0.7, $+\frac{1}{7}$, ...

2. 像 -3, -2.7%, -4.5 这样在正数前面加上“-”（负）号的数叫做负数.

提示：小于零的数是负数.

3. 0 既不是正数，也不是负数，不要忽视零的这一特性.

注意：(1) 一个数前面的“+”或“-”号叫做这个数的符号，正数前面的“+”号一般省略不写，负数前面的“-”号不能省略不写.

(2) 0 的意义：0 不仅表示“没有”，它还是正数与负数的分界.

例 1 判断下列各数，哪些是正数，哪些是负数.

+2014, -3.1, $\frac{1}{2}$, 10.58, -9, +1, -45.6, 0, $+\frac{1}{100}$, -7%, $-1\frac{1}{4}$.

分析：可根据正数、负数的定义判断一个数是正数还是负数.

解：正数有：+2014, $\frac{1}{2}$, 10.58, +1, $+\frac{1}{100}$.

负数有：-3.1, -9, -45.6, -7%, $-1\frac{1}{4}$.

知识点 2 用正数、负数表示具有相反意义的量

在生产、生活中常常会遇到一些具有相反意义的量，例如“收入 1000 元与支出 500 元”“向东走 2 km 与向西走 3 km”“上升 1.5 m 与下降 0.8 m”等. 为了更好地区分这些具有相反意义的量，我们把其中一种意义的量规定为正的，把另一种和它具有相反意义的量规定为负的.

学习具有相反意义的量应注意两点：

- (1) 它们表示的意义相反；
- (2) 它们是同类量.

提示：(1) 用正数和负数表示具有相反意义的量时，哪种意义为正是可以任意选择的，

但习惯把“前进、上升、收入、零上温度”等规定为正，而把“后退、下降、支出、零下温度”等规定为负。例如：若规定收入 1000 元记作 +1000 元，则支出 500 元记作 -500 元；若规定上升 1.5 m 记作 +1.5 m，则下降 0.8 m 记作 -0.8 m。

(2) 具有相反意义的量一定是具体的数量。

(3) 具有相反意义的量中的两个量必须是同类量，如节约 3 吨汽油与浪费 1 吨水就不是具有相反意义的量。

(4) 具有相反意义的量是成对出现的，单独的一个量不能成为具有相反意义的量。

具有相反意义的量，只要求意义相反，而不要求数量相等，如盈利 3000 元与亏损 400 元是具有相反意义的量。

例 2 (1) 天气预报说某地 12 月某天的最高温度是零上 5°C ，最低温度是零下 3°C ，若规定零上温度为正，则零上 5°C 可记作_____ $^{\circ}\text{C}$ ，零下 3°C 可记作_____ $^{\circ}\text{C}$ 。

(2) 如果某蓄水池的水位比标准水位高 2 m，记作 +2 m，那么比标准水位低 0.8 m 应记作_____；恰好在标准水位应记作_____。

(3) 某地区的平均高度高于海平面 310 m，记作海拔高度 +310 m，则海拔高度 -270 m 表示_____。

解析：(1) 因为规定零上温度为正，所以零下温度为负；

(2) 比标准水位高用正数表示，那么比标准水位低则用负数表示，恰好在标准水位上就用 0 表示；

(3) 高于海平面的海拔高度用正数表示，所以负数表示海拔高度低于海平面。

答案：(1) +5 (或 5)，-3；(2) -0.8 m，0 m；(3) 低于海平面 270 m。

点拨：用正数和负数表示具有相反意义的量时，要明确“基准”。

例 3 长江某水文站的警戒水位为 12 m，如果超过警戒水位 1 m，记作 +1 m，那么低于警戒水位 0.60 m，记作_____m。观察某年 8 月 1 日至 8 月 5 日该水文站的水位记录表并回答问题。

| 日期 | 8 月 1 日 | 8 月 2 日 | 8 月 3 日 | 8 月 4 日 | 8 月 5 日 |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 水位/m | -0.80 | 0 | 0.38 | 0.50 | 0.96 |

(1) 哪一天的水位最高？最高水位是多少？

(2) 哪一天的水位最低？最低水位是多少？

(3) 在这五天中，有多少天的水位超过警戒水位？

分析：在本题中负数表示低于警戒水位，正数表示超过警戒水位，由此可确定每天的水位，再进行比较即可。

解：-0.60。

(1) 8 月 5 日的水位最高，为 12.96 m。

(2) 8 月 1 日的水位最低，为 11.20 m。

(3) 在这五天中，有三天的水位超过警戒水位。

规律总结：当题目中已明确给出“一种意义”的量对应的是正数还是负数时，我们就可判断“与之具有相反意义”的量所对应的是负数还是正数。

题型分类剖析

题型 1 辨别正数和负数

例 1 在 -5 , 0 , 2014 , $-2\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $+0.03$, $+5\frac{1}{4}$, -1.23 , π 中, 负数的个数为 () .

A. 8 B. 6 C. 4 D. 3

解析：根据负数的定义进行判断. 注意对于正数和负数, 不能简单地理解为带“+”号的数是正数, 带“-”号的数是负数, 如 $+(-4) = -4$ 不是正数, $-(-2) = 2$ 不是负数.

答案：C

题型 2 正数和负数的实际应用

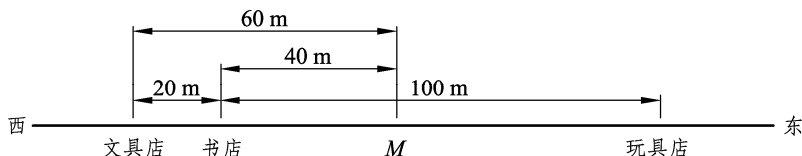
1. 用具有相反意义的量表示行走问题中的量

例 2 文具店、书店和玩具店依次位于一条东西走向的大街上, 文具店在书店西边 20 m 处, 玩具店在书店东边 100 m 处, 小明从书店沿街向东走了 40 m, 接着又向东走了 -60 m, 此时小明在 () .

A. 文具店 B. 玩具店
C. 文具店西 40 m 处 D. 玩具店西 60 m 处

解析：把文具店、书店、玩具店的相对位置及小明的行走路线在图上表示出来, 小明从书店出发沿街向东走了 40 m, 到达 M 处, 接着又向东走了 -60 m, 表示接着向西走了 60 m, 所以小明向西走了 60 m, 此时小明在文具店.

答案：A



方法归纳：图示法.

图示法是将研究的问题用图表示出来, 使其直观形象, 便于理解问题内在联系的方法. 例如, 本题中用直线上的点表示位置, 用线段的长表示距离, 便可轻松地确定小明的位置.

2. 用正数、负数记录成绩

例 3 七年级 (1) 班第一小组五名同学某次数学测验的平均成绩为 85 分, 一名同学以平均成绩为标准, 将超过平均成绩的记为正, 得到五名同学的成绩为 -15 分, -4 分, 0 分,

4分, 15分. 这五名同学的实际成绩分别是多少分?

分析: 以平均成绩为标准, 负数表示该成绩低于平均成绩, 0表示该成绩与平均成绩相同, 正数表示该成绩高于平均成绩.

解: -15分表示比平均成绩85分少15分, 即70分; -4分表示比平均成绩少4分, 即81分; 0分表示和平均成绩相同, 即85分; 4分表示比平均成绩多4分, 即89分; 15分表示比平均成绩多15分, 即100分.

这五名同学的实际成绩分别是70分, 81分, 85分, 89分, 100分.

方法归纳: 为了计算方便, 常把高于平均数、标准数或某一基准数的量规定为正, 把它们具有相反意义的量用负数表示.

3. 用正数、负数表示误差范围

例4 某饮料公司生产了一种瓶装饮料, 外包装上印有“(600±30)mL”的字样, 那么(600±30)mL表示什么含义? 质检局抽查了5瓶该产品, 容量分别为603mL, 611mL, 588mL, 568mL, 628mL, 就容量而言, 问抽查的产品是否合格?

解题关键: “(600±30)mL”隐含着产品合格的范围, 即合格产品的容量在(600-30)mL与(600+30)mL之间, 根据这个范围来判断抽查产品是否合格.

解: (600±30)mL表示容量在(570~630)mL的产品都合格. 抽查的5瓶饮料中只有568mL比600mL少了32mL, 属不合格, 其余均合格.

注意: 正数和负数的分界是0, 但并不是所有的分界都是0, 如本题中的分界为600mL.

题型3 与正数、负数相关的表格信息题

例5 一个病人每天要测量五次体温, 该病人某一天五次所测体温的变化情况(与前一次测量的体温比较, 升高为正, 降低为负, 前一天最后一次测量的体温是38℃)如下表:

| 时间 | 6: 00 | 10: 00 | 14: 00 | 18: 00 | 22: 00 |
|--------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 体温变化/℃ | +1.1 | +0.4 | -1 | +0.5 | -0.1 |
| 实际体温/℃ | | | | | |

(1) 完成上面的表格;

(2) 计算该病人这一天的平均体温;

(3) 用前一天最后一次测量的体温与这天的平均体温比较, 你能判断出该病人的体温是上升还是下降吗?

分析: (1) 根据该病人一天的体温变化情况, 结合正数和负数的表示方法, 即可求出答案.

(2) 根据表中所给的数据, 结合题意, 即可求出该病人这一天的平均体温.

(3) 用该病人前一天最后一次测量的体温与病人这天的平均体温进行比较, 即可得出答案.

解: (1) 完成表格如下:

| | | | | | |
|--------------------------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 时间 | 6: 00 | 10: 00 | 14: 00 | 18: 00 | 22: 00 |
| 体温变化/ $^{\circ}\text{C}$ | +1.1 | +0.4 | -1 | +0.5 | -0.1 |
| 实际体温/ $^{\circ}\text{C}$ | +39.1 | +39.5 | +38.5 | +39 | +38.9 |

(2) 根据题意，得平均体温 $= (39.1+39.5+38.5+39+38.9)\div 5 = 195\div 5 = 39^{\circ}\text{C}$ 。

(3) \because 前一天最后一次测量的体温是 38°C ，这天的平均体温是 39°C ， $39^{\circ}\text{C}>38^{\circ}\text{C}$ ， \therefore 该病人的体温上升了。

注意：本题中明确每次的基准温度是难点，只有第一次测量体温时的基准温度是 38°C ，而后几次的基准温度均是前一次所测量的实际温度。

题型 4 正数、负数的规律探究题

例 6 观察下面依次排列的两组数，请按其规律写出后面的 3 个数，你能说出第 15 个数、第 101 个数、第 2017 个数分别是什么吗？

(1) $-1, -2, +3, -4, -5, +6, -7, -8, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \dots;$

(2) $-1, \frac{1}{2}, -3, \frac{1}{4}, -5, \frac{1}{6}, -7, \frac{1}{8}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \dots$

分析：仔细观察每组数的特点，尤其是符号的分布特点，从变化中发现一般规律。由第 (1) 题所给的依次排列的一组数中的前 8 个数可知：对于第 n 个数，当 n 是 3 的整数倍时，此数为 $+n$ ；当 n 不是 3 的整数倍时，此数为 $-n$ ；由第 (2) 题所给的依次排列的一组数中的前 8 个数可知：对于第 n 个数，当 n 为奇数时，此数为 $-n$ ；当 n 为偶数时，此数为 $\frac{1}{n}$ 。

解：(1) $+9, -10, -11$ 。

这组数中的第 15 个数为 $+15$ ，第 101 个数为 -101 ，第 2017 个数为 -2017 。

(2) $-9, \frac{1}{10}, -11$ 。

这组数中的第 15 个数为 -15 ，第 101 个数为 -101 ，第 2017 个数为 -2017 。

点拨：探索规律时，应全面分析题中所给的所有数据，要从符号和数两个方面进行观察，若是分数，还要分别观察分子和分母。要特别注意观察符号的变化规律，这样才能找到这组数的变化规律。

中考考点对接

考点归纳

解读 1：正数和负数的定义，主要考查辨别一个数是正数还是负数，中考题中多以选择题和填空题的形式出现，题目较简单。

解读 2：考查运用正数、负数表示具有相反意义的量或考查用正数、负数表示的数的实际意义，题型以选择题、填空题为主。

典型考题

中考真题 ((2016·山东临沂中考·3分) 四个数 $-3, 0, 1, 2$, 其中负数是 () .

A. -3 B. 0 C. 1 D. 2

解析: 根据负数的定义来判断.

答案: A

考题点睛: 中考真题和教材练习题均考查了依据正数、负数的定义来辨别正数或负数, 需要注意的是 0 既不是正数也不是负数.

中考真题 (2016·广州中考·3分) 中国人很早开始使用负数, 在中国古代数学著作《九章算术》的“方程”一章就正式引入了负数, 这在世界数学史上属首次. 如果收入 100 元记作 $+100$ 元, 那么 -80 元表示 () .

A. 支出 20 元 B. 收入 20 元 C. 支出 80 元 D. 收入 80 元

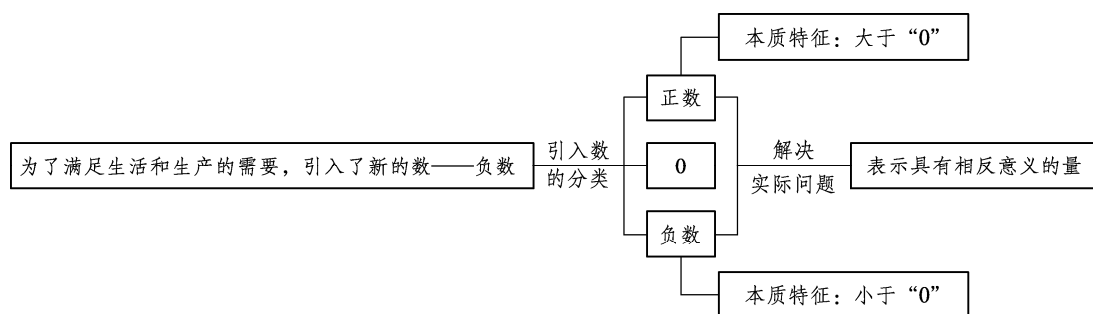
解析: 在实际问题中, 由于“收入”和“支出”的意义相反, 因此在用正负数表示具有相反意义的量时, 若收入 100 元记作 $+100$ 元, 那么 -80 元表示支出 80 元, 所以选项 C 正确,

答案: C.

考题点睛: 中考真题与教材练习题都考查了对用正数、负数表示具有相反意义的量的理解, 其解决问题的思想方法完全相同, 属基础题.

小结与警示

一、知识结构图示



二、前车之鉴

易误点 1 误认为凡带有正号的数就是正数, 凡带有负号的数就是负数.

正数前面的“ $+$ ”号有时可以省略, 但省略“ $+$ ”号后仍是正数; 用字母表示数时, 带有“ $+$ ”号或省略“ $+$ ”号的数不一定是正数, 带有“ $-$ ”号的数不一定是负数.

提示: 例题见“题型分类剖析”例 1.

易误点 2 对“ 0 ”的含义理解不准确.

例 1 下列说法错误的是 () .

- A. 0 是自然数
B. 0 是整数
C. 0 是偶数
D. 某地海拔高度为 0 m 表示某地没有海拔高度

答案：D

注意：小学阶段开始学习数的时候，0 表示没有，学习了负数后，0 除了表示“没有”外，还是正数与负数的分界。本题 D 选项中对海拔高度 0 m 的理解错误，它并不是表示某地没有海拔高度，而是表示某地与海平面一样高。

易误点 3 对负数表示的意义理解不清。

例 2 如果上升 3 m 记作 +3 m，那么 -4 m 表示什么意义？

解：-4 m 表示下降 4 m。

注意：本题易错答案为下降 -4 m。产生错误的原因是用正数、负数表示具有相反意义的量时，对负数表示的意义理解不清。

易误点 4 用正数、负数表示具有相反意义的量时忽略了量的单位。

例 3 如果中午 12 点记作 0 时，下午 3 点记作 +3 时，那么上午 9 点记作_____。

解析：中午 12 点记作 0 时，中午 12 点之后几小时记作正几时，则中午 12 点之前几小时记作负几时，上午 9 点是中午 12 点之前 3 小时，故用 -3 时表示。

答案：-3 时

注意：把一个量去掉它后面的单位名称后，它就是一个数，而不是一个量了。本题易错答案为 -3，因漏掉后面的单位而出错。

综合练习

1. 如果规定每天上午 10 时记为 0 时，10 时以前记为负，10 时以后记为正，且以 45 分钟为 1 个时间单位，如 9:15 记为 -1 时，10:45 记为 1 时，那么 7:45 应记为（ ）。

- A. 3 时 B. -3 时 C. -2.15 时 D. -7.45 时

2. 在一次跳远测试中，体育老师以达标成绩 2.00 m 为标准，将高于该成绩的记为正，低于该成绩的记为负。王非跳出了 2.12 m，记为 +0.12 m；何叶跳出了 1.95 m，记为_____；张平跳出的成绩记为 0 m，他实际跳的距离是_____。

3. 一个物体沿着东、西两个方向运动，若向东记为正，向西记为负，则：

- (1) 向东运动 2 m，记作_____，向西运动 4 m，记作_____；
(2) +3 m 表示向_____运动_____m，-6 m 表示向_____运动_____m；
(3) 物体原地不动时，记作_____m。

4. (“典型例题分析”例 4 变式) 如图所示，某食品包装盒上标有“净含量 $385 \text{ g} \pm 5 \text{ g}$ ”，则这盒食品的合格净含量范围是_____g ~ 390 g。



5. 教室高 3 m, 教室里课桌高 0.8 m, 如果把桌面高度记作 0 m, 那么教室顶部和地面的高度分别记作什么? 如果把教室顶部的高度记作 0 m, 那么桌面和地面的高度分别记作什么?

6. (“题型分类剖析”例 3 变式) 如果课桌高度比标准高度高 2 mm 记作 +2 mm, 那么比标准高度低 3 mm 记作什么? 现有 5 张课桌, 量得它们的高度比标准高度分别高 +1 mm, -1 mm, 0 mm, +3 mm, -1.5 mm, 若规定课桌的高度比标准高度高不超过 2 mm, 低不超过 2 mm 就算合格, 则上述 5 张课桌中有几张合格?

1.2 有理数

本节概念与方法: 有理数, 有理数的分类, 数轴, 相反数, 绝对值, 有理数的大小比较.

教学要求

1. 理解有理数的意义, 能用数轴上的点表示有理数, 能比较有理数的大小, 能对有理数按一定标准进行分类.
2. 借助数轴理解相反数、绝对值的意义, 掌握求一个有理数的相反数、绝对值的方法.
3. 知道 $|a|$ (a 表示有理数) 的含义.
4. 初步感悟分类讨论思想和数形结合思想.

提前预习内容

1. 几个定义:

正数：像 2%，4，3.5 这样大于 0 的数叫做正数。

负数：像 -3，-2.7%，-4.5 这样在正数前面加上符号“-”（负）的数叫做负数。

非正数包括负数和 0；

非负数包括正数和 0。

2. 已学过的几类数：

(1) 正整数，如 1，2，3，...；

(2) 0；

(3) 负整数，如 -1，-2，-3，...；

(4) 正分数，如 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ，0.1， $\frac{3}{5}$ ，...；

(5) 负分数，如 -0.5， $-\frac{2}{3}$ ， $-\frac{1}{8}$ ，...。

知识点突破

知识点 1 有理数的有关概念

★ 整数包括正整数、0、负整数，如 -3，-2，0，1，2，3 等。

★ 分数包括正分数、负分数，如 $+1\frac{1}{3}$ ，0.18，-1.35， $-\frac{4}{5}$ 等。

分数都可以化为有限小数或无限循环小数的形式，同时有限小数和无限循环小数又都可以化为分数，如 $0.25 = \frac{1}{4}$ ， $0.\dot{3} = \frac{1}{3}$ ， $0.\dot{1}4285\dot{7} = \frac{1}{7}$ 。所以有限小数和无限循环小数都属于分数，如 3.17， $-0.\dot{3}$ 等都是分数。

★ 整数和分数统称为有理数。

★ 几个常用数学名词的含义。

(1) 正整数：既是正数，又是整数的数。

(2) 负整数：既是负数，又是整数的数。

(3) 正分数：既是正数，又是分数的数。

(4) 负分数：既是负数，又是分数的数。

(5) 非负数：正数和 0。

(6) 非正数：负数和 0。

(7) 非负整数：正整数和 0。

(8) 非正整数：负整数和 0。

拓展：任何一个有理数都可以写成 $\frac{n}{m}$ 的形式，其中只有当 m ， n 同时满足：① m ， n 是

互质的整数；② $n \neq 0$ ， $m \neq 1$ 时， $\frac{n}{m}$ 才表示一个最简分数。

注意：(1) 有理数只包括整数和分数，无限不循环小数不能转化成分数，故无限不循环