第二十一章　一元二次方程

基本内容结构

主要内容：（1）一元二次方程及其有关概念；（2）一元二次方程的解法（配方法、公式法、因式分解法）；（3）一元二次方程根与系数的关系；（4）运用一元二次方程分析和解决实际问题，一元二次方程的解法及其应用.

重点：一元二次方程根与系数的关系的应用，利用一元二次方程解决实际问题.

难点：一元二次方程根与系数的关系的应用，利用一元二次方程解决实际问题.

相关考情：本章内容是中考的必考内容，主要考查一元二次方程的解法、一元二次方程根的判别式、根与系数的关系以及列一元二次方程解决实际问题，在中考试题中每个考查点的考查题型均有选择题、填空题、解答题.

学习方法指导

1. 解一元二次方程时，抓住"降次"这一基本思想，掌握配方法、公式法和因式分解法等解一元二次方程的基本方法.

2. 类比列一元一次方程解决实际问题的方法和步骤，学习列一元二次方程解决实际问题，同时注意根据题意验证所求得的一元二次方程的解的合理性.

3. 在学习过程中注意一元二次方程根与系数的关系，并在探索过程中体会"转化"与"化

归”等数学思想在解决问题中的作用.

21.1　一元二次方程

概念与方法

一元二次方程的概念　一元二次方程的一般形式　一元二次方程的根

教学要求

1. 理解一元二次方程的概念，能够判断一个方程是不是一元二次方程.

2. 掌握一元二次方程的一般形式和各项的名称，会将一元二次方程化为一般形式.

3. 了解一元二次方程根的概念，会检验一个数是不是一元二次方程的根.

4. 通过由具体问题抽象出一元二次方程概念的过程，体会方程是刻画现实世界数量关系的有效模型，增强对一元二次方程的感性认识.

提前预习内容

1. 方程的概念：含有未知数的<u>等式</u>叫方程.

2. 一元一次方程的定义：只含有一个未知数（元），未知数的次数是 <u>1</u>，等号两边都是<u>整式</u>，这样的方程叫做一元一次方程，一般形式为 $\underline{ax+b=0(a\neq 0)}$.

3. 方程的解的概念：使方程中等号左右两边<u>相等</u>的未知数的值就是方程的解.

知识点突破

知识点 1　一元二次方程的概念

★等号两边都是整式，只含有一个未知数（一元），并且未知数的最高次数是 2（二次）的方程，叫做一元二次方程.

（1）由一元二次方程的概念可知，一元二次方程必须同时满足以下三个条件：① 是整式方程；② 只含有一个未知数；③ 未知数的最高次数是 2.

例如：$\sqrt{3}x^2-x+1=0,\ \dfrac{5}{2}y-y^2=8$ 都是一元二次方程，而 $x^3-4x=0$（不满足“未知数的最高次数是 2”），$xy-x^2=0$（不满足“只含有一个未知数”）都不是一元二次方程.

注意：（1）定义中“等号两边都是整式”是指原方程中等号两边都是整式，而不是“整理合并（整理合并是指去分母、去括号、移项和合并同类项）”之后都是整式；（2）定义中“只含有一个未知数（一元），并且未知数的最高次数是 2（二次）”这句话，是对将方程“整理合并”之后而言的.

（2）当方程中二次项系数含有字母时，若字母的取值范围不明确，则这个方程不一定是一元二次方程.

例 1　下列选项中是一元二次方程的是（　　）.

A. $2x+x-3$　　　　B. $\dfrac{5x}{x^2+1}=2$

C. $x+2=0$　　　　D. $t^2-m=1-4t-m$

解析：$2x+x-3$ 虽然是只含有一个未知数的整式，并且未知数的最高次数是 2，但它不是等式，故不是方程；$\dfrac{5x}{x^2+1}=2$ 不是整式方程；$x+2=0$ 是一元一次方程；$t^2-m=1-4t-m$ 可整理为 $t^2+4t-1=0$，符合一元二次方程的概念，故是一元二次方程. 答案：D.

注意：例如，方程 $x^2+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}+1,\ x_2+2\sqrt{x}=3+2\sqrt{x}$ 都不是一元二次方程. $(m-1)x^2+3x-4=0$，当 $m=1$ 时，它是一元一次方程.

点拨：判断一个方程是不是一元二次方程，一般思路是：先看方程等号两边是不是整式，如果是整式，再移项、合并同类项，使方程等号右边为 0，再观察其是否还具备“只含有一个未知数”“未知数的最高次数是 2”这两个条件.

知识点 2　一元二次方程的一般形式

★一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$．其中，ax^2 是二次项，a 是二次项系数；bx 是一次项，b 是一次项系数，c 是常数项.

注意：(1）一元二次方程一般形式的特点是：方程右边是 0，方程左边是关于 x 的二次整式.

(2）“$a\neq 0$”是一元二次方程一般形式的重要组成部分，也是考查一元二次方程的定义的重点，但 b,c 可以为 0.

(3）要确定一元二次方程的各项系数，必须先将一元二次方程化为一般形式，写出项和各项系数时要包括它们前面的符号，如 $4x^2-3x-2=0$ 的二次项、一次项、常数项分别为 $4x^2,-3x,-2$，二次项系数、一次项系数分别为 $4,-3$.

例 2　将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出二次项系数、一次项系数和常数项.

(1）$x(x-2)=4x^2-3x$.

(2）$\frac{x^2}{3}-\frac{x+1}{2}=\frac{-x-1}{2}$.

(3）关于 x 的方程 $mx^2-nx+mx+nx^2=q-p(m+n\neq 0)$.

分析：首先要对上述三个方程进行整理，通过“去分母、去括号、移项、合并同类项”等步骤化为一般形式，再指出二次项系数、一次项系数和常数项.关于 x 的方程即 x 为未知数，其他字母为字母系数.

解：(1）去括号，得 $x^2-2x=4x^2-3x$，

移项、合并同类项，得 $-3x^2+x=0$，即 $3x^2-x=0$，

故二次项系数为 3，一次项系数为 - 1，常数项为 0.

(2）去分母，得 $2x^2-3(x+1)=3(-x-1)$，

去括号、移项、合并同类项，得 $2x^2=0$，

故二次项系数为 2，一次项系数为 0，常数项为 0.

(3）移项、合并同类项，得 $(m+n)x^2+(m-n)x+p-q=0$，

故二次项系数为 $m+n$，一次项系数为 $m-n$，常数项为 $p-q$.

知识点 3　一元二次方程的解（根）

使一元二次方程左右两边相等的未知数的值，就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根，例如 $x=3$ 和 $x=2$ 都是一元二次方程 $x^2-5x+6=0$ 的解（根）.

★判定一个数值是不是一元二次方程的解的方法：将此数值代入一元二次方程，若能使等式成立，则这个数值是一元二次方程的解；反之，它不是一元二次方程的解.

例 3　下列哪些数是一元二次方程 $x^2-4x=-3$ 的根？

- 2，0，1，2，3

分析：把给出的数分别代入方程的左右两边，若能使方程左右两边组等，则这个数就是方程的根；否则，就不是方程的根.

解：当 $x=-2$ 时，左边 $=(-2)^2-4\times(-2)=12$，
因为左边≠右边，所以 $x=-2$ 不是一元二次方程 $x^2-4x=-3$ 的根；
当 $x=0$ 时，左边 $=0^2-4\times0=0$，
因为左边≠右边，所以 $x=0$ 不是一元二次方程 $x^2-4x=-3$ 的根；
当 $x=1$ 时，左边 $=1^2-4\times1=-3$，
因为左边=右边，所以 $x=1$ 是一元二次方程 $x^2-4x=-3$ 的根；
当 $x=2$ 时，左边 $=2^2-4\times0=-4$，
因为左边≠右边，所以 $x=2$ 不是一元二次方程 $x^2-4x=-3$ 的根.
提示：（1）如果明确指出方程 $ax^2+bx+c=0$ 是关于 x 的一元二次方程，那么就隐含 $a\neq0$ 这一重要条件.

（2）一元二次方程的特殊形式如表 21.1 所示.

表 21.1

特殊形式	二次项	一次项	常数项
$ax^2+bx=0\ (a\neq0)$	ax^2	bx	0
$ax^2+c=0\ (a\neq0)$	ax^2	0	C
$ax^2=0\ (a\neq0)$	ax^2	0	0

规律总结：一元二次方程化为一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 后，若没有出现一次项 bx，则 $b=0$；若没有出现常数 c 项，则 $c=0$. 要注意项和项的系数是两个不同的概念.

注意：一元二次方程可以无解，但是若有解就一定有两个.

方法归纳：代入检验法

代入检验法是常用的验根方法，其判断依据是一元二次方程根的概念.

上接例 3，当 $x=3$ 时，左边 $=3^2-4\times3=-3$，
因为左边 = 右边，所以 $x=3$ 是一元二次方程 $x^2-4x=-3$ 的根
所以 1 和 3 都是一元二次方程 $x^2-4x=-3$ 的根.

题型分类剖析

题型 1　一元二次方程概念的应用

例 4　已知 a,b,c 均为有理数，试判断关于 x 的方程 $ax^2-x-\sqrt{7}x+\sqrt{5}x^2-b=c$ 是不是一元二次方程？如果是，请写出二次项系数、一次项系数及常数项.

分析：若二次项系数不等于 0，则它是一元二次方程；否则，它不是一元二次方程.

解：将原方程化为一般形式，得

$$(a+\sqrt{5})x^2-(1+\sqrt{7})x-(b+c)=0$$

因为 a 是有理数，所以 $a\neq-\sqrt{5}$，即 $a+\sqrt{5}\neq0$.

所以原方程一定是一元二次方程.

其中二次项系数为 $a+\sqrt{5}$，一次项系数为 $-(1+\sqrt{7})$，常数项为 $-(b+c)$.
点拨：解决此类问题的方法是将方程化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$，看是否满足以下四点：（1） $a\neq0$；（2） x 的最高次数是 2；（3）是整式方程；（4）有一个未知数.
例 5　当 m 为何值时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程？

解题关键：本题的题眼是"一元二次方程"，根据一元二次方程的定义可知， x 的最高次数是 2 且二次项系数不能为 0.

解：当 $m^2+1=2$ 且 $m-1\neq0$ 时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.
由 $m^2+1=2$，得 $m^2=1$， $m=\pm1$，
由 $m-1\neq0$，得 $m\neq1$，
所以当 $m=-1$ 时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.

注意：在求一元二次方程中字母系数的值或取值范围时，"二次项系数不为 0"这个条件

容易被忽略，应引起注意.

题型 2　一元二次方程根的应用

例 6　已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的一个根是 1，且 a,b 满足等式 $b=\sqrt{a-2}+\sqrt{2-a}-1$，求此一元二次方程.

解题关键：抓住"a,b 满足等式 $b=\sqrt{a-2}+\sqrt{2-a}-1$"这一条件，其中隐含着 a,b 的值是确定的，由二次根式的性质可知 $a-2\geqslant 0,2-a\geqslant 0$ 即 $a=2$，从而可求 b 的值. 根据一元二次方程根的概念，把 $x=1$ 代入方程可得 $a+b+c=0$，从而可求得 c 的值.

解：因为方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的一个根是 1，

所以将 $x=1$ 代入方程，可得 $a+b+c=0$.　　①

根据二次根式的性质，可知 $a-2\geqslant 0,\ 2-a\geqslant 0$，得 $a=2$，

故 $b=\sqrt{a-2}+\sqrt{2-1}-1=0+0-1=-1$.

把 $a=2,\ b=-1$ 代入式①中，得 $c=-1$，

所以所求一元二次方程为 $2x^2-x-1=0$.

点拨：方程的根就是满足方程的未知数的值，当条件中给出方程的一个根时，通常将此根代入方程，以确定待定系数满足的等式.

例 7　已知 $x=1$ 是一元二次方程 $6x^2-2a=0$ 的一个根，则 $2a-1$ 的值为_______.

解析：把 $x=1$ 代入一元二次方程 $6x^2-2a=0$，得 $6\times 1^2-2a=0$，解得 $a=3$，则 $2a-1=5$.

答案：5.

方法归纳：求解此类问题的一般思路方法是：先将根代回到方程中，得到一个关于所求字母的方程，再求解这个方程即可得出答案.

例 8　已知 a 是一元二次方程 $x^2-2017x+1=0$ 的一个根，试求 $a^2-2016a+\dfrac{2017}{a^2+1}$ 的值.

分析：根据一元二次方程根的定义可知 $a^2-2017a+1=0$，即 $a^2+1=2017a$. 经过观察可知待求式中分式的分母为 a^2+1，因此可以把 a^2+1 看作一个整体代入待求式.

解：因为 a 是方程 $x^2-2017x+1=0$ 的一个根，

所以 $a^2-2017a+1=0$.

得　$a^2+1=2017a,a^2=2017a-1$，

则 $a^2-2016a+\frac{2017}{a^2+1}=2017a-1-2016a+\frac{2017}{2017a}=a-1+\frac{1}{a}$

$$=\frac{a^2-a+1}{a}=\frac{2017a-a}{a}=2016.$$

方法归纳：整体代入法

整体代入法是代数式求值的常用方法之一. 本题在求代数式的值时，不宜直接求字母 a 的值，此解法的巧妙之处是把 a^2+1 看作一个整体代入待求式，使计算简便.

题型 3　根据实际问题列一元二次方程

例 9　2017 年新春佳节，某班数学兴趣小组的 x 名同学互发短信祝贺（每名同学给其余同学每人只发一条短信），一共有 90 条短信发出，则可列方程为_________.

解析：每名同学需给 $(x-1)$ 名同学发短信，则 x 名同学共发短信为 $x(x-1)=90$.

答案：$x(x-1)=90$.

注意：互发短信问题与握手问题的区别是：互发短信是两次性动作，握手是一次性动作，甲给乙发短信与乙给甲发短信是不相同的，但甲和乙握手与乙和甲握手相同.

例 10　某种服装每天可销售 20 件，每件盈利 44 元. 若单价每降 1 元，则每天可多销售 5 件，若每天要盈利 1600 元，则每件服装应降价多少元？（只列方程，不必求解）

分析：设每件服装应降价 x 元，降价前与降价后的单件盈利、销售量、总盈利的对比情况可用下表表示：

	降价前	降价后
单件盈利/元	44	$44-x$
销售量/件	20	$20+5x$
总盈利/元	44×20	$(44-x)(20+5x)$

解：设每件服装应降价 x 元，根据题意列方程，得 $(44-x)(20+5x)=1600$

方法归纳：（1）在解决有关利润的问题时，首先要明确几个关系式：单件利润 = 单件售

价 - 单件进价，总利润 = 单件制润 × 销售量，利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{成本}} \times 100\%$；其次要明确各量之间的变化关系.

（2）针对有变化关系的问题，可采用表格对比的方式进行分析，直观地呈现它们之间的关系.

中考考点对接

1．考点归纳

考查一元二次方程的根的概念，主要体现为根的概念的应用，求方程中未知字母的值或含未知字母的代数式的值等，多以选择题或填空题的形式出现，难度较小.

考查根据实际问题列出一元二次方程，解题关键是从实际问题中分析出数量之间的关系，建立一元二次方程模型，多以选择题或填空题的形式出现，难度不大.

2．典型考题

中考真题（2016·内蒙古包头中考·3 分）若关于 x 的方程 $x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}=0$ 的一个实数根的倒数恰是它本身，则 m 的值是（　　）.

A. $-\frac{5}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{5}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$　　D. 1

解析：因为方程的一个实数根的倒数恰是它本身，所以这个方程的一个实数根是 1 或 - 1.

把 $x=1$ 代入原方程，得 $1+m+1+\frac{1}{2}=0$，解得 $m=-\frac{5}{2}$；

把 $x=-1$ 代入原方程，得 $1-(m+1)+\frac{1}{2}=0$，解得 $m=\frac{1}{2}$，所以 m 的值是 $-\frac{5}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$.

答案：C.

考题点睛：中考真题是教材习题的变式题，教材习题与中考真题都是考查对一元二次方程根的概念的理解，两题的解题方法都是将方程的根代入一元二次方程中进行求值.

中考真题（2016·浙江台州中考·4 分）有 x 支球队参加篮球比赛，共比赛了 45 场，每两队之间都比赛一场，则下列方程中符合题意的是（　　）.

A. $\frac{1}{2}x(x-1)=45$　　B. $\frac{1}{2}x(x+1)=45$

C. $x(x-1)=45$　　D. $x(x+1)=45$

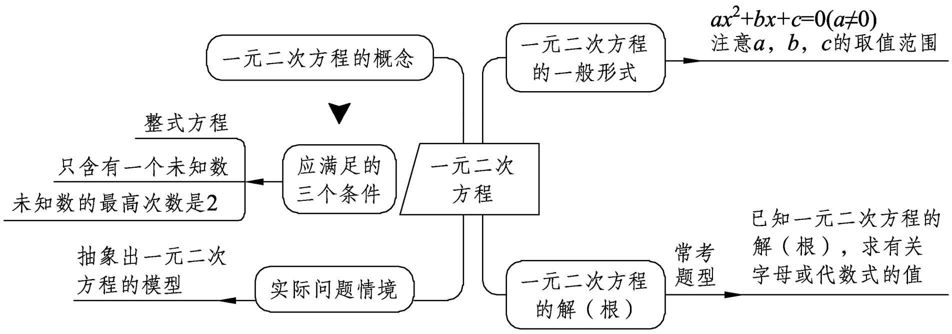
解析：全部比赛的场数为 45，每支球队都要与其他 $(x-1)$ 支球队各赛一场，因为甲队对乙队的比赛和乙队对甲队的比赛是同一场比赛，所以全部比赛共 $\frac{1}{2}x(x-1)$ 场．故列方程为 $\frac{1}{2}x(x-1)=45$.

答案：A.

考题点睛：中考真题是教材习题的简单变式题，考查了由实际问题抽象出一元二次方程的能力．解决此类题的关键是用含未知数的代数式表示出比赛总场数，注意两队之间的比赛只有一场.

小结与警示

一、知识结构图示



二、前车之鉴

易误点 1　忽略一元二次方程中二次项系数不为零的条件．当一元二次方程的二次项系数或未知数的最高次数含字母时，必须保证二次项系数不为 0，且未知数的最高次数为 2.