上篇　数学课程标准研究

1　数学与数学课程

数学是历史最悠久而又始终充满活力的人类知识领域，数学课程是每个受教育的人需要学习的重要课程．正确认识数学和数学课程，对于提高数学教学质量、全面实现教育目标具有重要意义．

1.1　数学的研究对象

数学本身是一个历史的概念，它的研究对象随着时代的变化而变化．纵观数学的历史发展，人们认识到：尽管经过自古至今的漫长发展，现代数学已是一个分支众多的庞大的知识系统，但整个数学始终是围绕着“数”与“形”这两个基本概念的抽象、提炼而发展的，数学在各个领域中千变万化的应用也是通过这两个基本概念而进行的．因此，《义务教育数学课程标准（2011年版）》阐明：“数学是研究数量关系和空间形式的科学．”这是对数学研究对

象的一种表述．这里所说的数量关系与空间形式，既可以是来源于现实世界的内容，也可以是数学自身逻辑的产物．对什么是数学的这一陈述，蕴含了数学发展至今所经历的深刻变化．

从根本上说，数学的发展与人类的生产实践和社会需求密切相关．对自然和社会的探索是数学研究最丰富的源泉，而几乎所有数学分支中那些最初和最基本的问题都是由现实世界产生的．但是，数学的发展对于现实世界又表现出相对的独立性．一门数学分支或一种数学理论一经建立，人们便可在不受外部影响的情况下，仅靠逻辑思维将它向前推进，并由此导致了新概念与新理论的产生（例如虚数、群论、非欧几何等）．当然这些基于数学内在逻辑需要而产生的数学理论最终将回归现实，在现实世界的应用中接受检验，并从现实世界获取进一步发展的动力．现实世界与数学内部之间这种反复呈现的相互作用，在现代数学的发展中愈显突出，并赋予现代数学不同于一般自然科学的特征．

1.2　数学的特点

准确理解和把握数学的特点，对于全面理解数学及其教育价值，做好数

学教学工作具有重要意义．从数学教育的角度来讲，数学具有如下特点：

1.2.1 抽象性

任何学科都具有抽象性，但数学与其他学科相比，抽象程度更高．

第一，数学学科是借助于抽象建立起来并借助抽象而发展的．一方面，数学的每一个概念，不论是原始概念，还是被定义的概念，都是抽象的结果．许多数学概念是在已有概念基础上再一次抽象而来的．由此可见，数学概念具有多层次抽象的特点，每一次抽象都是理性思维的结果．数学的原理（包括定理、法则）反映着数学概念与概念之间的关系，也是抽象的产物．概念间的这种关系，往往不是自明的，需要对概念的各个特征进行分析，以发现两者实质性的“联合”．同时，数学中的同一对象，它的抽象不一定是一次完成的．如，点的概念，在现代数学中可以是欧氏空间的“没有部分的东西”，也可以是“函数”空间中的一个函数；而在希尔伯特系统中，点只是受公理系统约束的名称或术语而已．又如，曲线的概念、函数的概念、连续概念、空间概念，以及与它们有关的数学原理，等等，都经历了一个不断抽象的过程．总之，数学的全部对象，皆为抽象思维的产物或结果．另一方面，数学方法的使用，只有借助于抽象才能实现．这里所说的数学方法，不仅有处理数学自身对象

的方法，如分析、证明及数学成果的扩展等，而且还有为解决实际问题而构造数学模型的方法以及数学的变换方法、公理方法、对称方法、结构方法、无穷小方法等．这些方法是人们在处理数学自身问题和运用数学知识解决实际问题的过程中提炼出来的，这种提炼本身就是一种抽象．同时，这些方法的运用一般都要经历一个变化或转换的过程，这也涉及抽象．特别是现代数学，普遍采用公理化的方法，公理的选择本身就是一种抽象．如布尔巴基（Bourbaki）学派的数学“结构”观点就是典型代表．总之，从数学对象、数学方法对数学抽象的依赖可以看出，数学抽象在数学学科的发展中起着非常重要的作用，它不仅使数学自身不断分化、精确，同时又使数学实现高层次下的统一．

第二，数学抽象的多层次性和数学方法的逻辑性，导致了数学语言的符号化和形式化，而且这种符号化和形式化的程度，任何一门学科都不能与之相比．也正因为数学语言具有符号化和形式化等特点，从而给人们探索、发现数学新问题提供了很大的“自由”．

第三，我们再从当今数学研究对象的内涵的深层意义上理解数学的抽象性特征．数学是关于量的科学，数学抽象的本质就是关于量的方面、量的属性和量与量关系的抽象．这是数学抽象性有别于其他学科抽象性的实质方面，

也是数学上述抽象性特征的内在根源．

综上所述，数学抽象，就其本质而言，是抽取事物量的属性和量与量的关系；就其形式来讲，表现为多层次化、符号化、形式化，这就构成了数学抽象性有别于其他学科抽象性的特征．

1.2.2 严谨性

数学的严谨性主要表现为：推理的逻辑性、公理化方法和结论的准确确定性．首先，建立数学理论要靠严密的逻辑推理，每个数学分支都是以逻辑为链条的演绎系统．不论数学成果是以逻辑思维还是直觉思维获得的，它作为一项数学结论被确立下来，不是取决于实验、验证，而是必须经受逻辑证明的检验．其次，数学思维中对事物主要基本属性的把握，本质上源于公理化方法．用公理化方法和逻辑推理得到的数量关系的规定性是事物客观规律的反映，它确保数学结论不会因为推广、发展而被推翻．因为数学中没有伪科学，数学家不能作伪，数学的品格始终站在正确的一边．因此，数学具有培养人忠诚、正直、追求真理的教育功能，它不仅有助于提高全人类的科学文化素养，也是培养学生意志、毅力、科学态度及自信心的好素材．

现代数学的发展，使得数学的研究对象已不仅是客观现实的数量关系和

空间形式，也包括逻辑上可能的关系和形式，数学已成为广义的研究量的科学．数学抽象程度的不断提高，使得数学的发展与客观现实的距离越来越远，很难找到具有直观意义的现实原型，许多数学结果，往往是在理想的情况下研究的．但作为一门科学，它所反映的内涵必须是服从客观规律的，不仅形式，而且内容都应是对现实世界量的属性、量的关系的正确反映，即使一时找不到现实原型用于检验．为了确保数学科学的真理性，就迫使数学的发展必须具备高度的严谨，依靠严谨来保证数学演绎、数学证明、数学推理、数学理论体系等的真正传递．同时，现代数学的形式公理化，对数学严谨性提出了更高的要求，数学基础理论研究的深入，就是这种要求迫切性的体现．

1.2.3 应用的广泛性

数学已经越来越渗透到各个领域，成为各种科学、技术、生产建设和日常生活所不可缺少的有力武器．

现代国防建设和生产，要求对资源、设备、人力和各种条件进行统筹规划和合理使用，需要广泛地应用统筹学、优选法、规划论等数学学科；现代化大工业、航天技术都有大量和复杂的计算问题，更需要广泛地应用电子计算机和数学理论；现代科学技术不借助数学，就不能达到应用的精确性与可靠性；在天文学方面，1846 年海王星的发现是建立在数学计算基础之上的；

牛顿以欧氏几何为工具，建立了力学体系；爱因斯坦利用非欧几何，将狭义相对论发展为广义相对论，对物理学的发展产生了重大的影响；在量子化学研究中，可以运用群论的方法来帮助研究分子的全部对称性；在分子生物中，要发现脱氧核糖核酸为双螺旋结构的 X 射线结构分析法，就需要应用数学分析的傅里叶变换公式，以衍射像算出被检物体的真正像来；在研究生态学中，可以应用控制论来研究生态系统的调节和管理以及动物个体行为的飞行定向，同时还可以应用集合论和模糊集合论来描述生态环境的分类；等等．总之，随着社会的不断发展，数学的应用程度越来越高，范围越来越广，而且这种应用反过来又推动和促进数学本身的发展．这种推动和促进，往往是在解决实际问题的过程中，发现了某些背景后面存在的尚未被发现的量、量的属性和量的关系，从而产生新的数学成果．而数学在发展与完善自身的同时，将更多地渗透并运用于其他科学领域．

1.2.4　辩证性

数学中充满着辩证关系，包含着丰富的辩证因素．

第一，数学内容具有辩证性．我们知道，数学中充满着矛盾，存在着许许多多的对立关系．如正与负、数与形、常量与变量、近似与精确、微分与积分、有限与无限、离散与连续、收敛与发散、抽象与具体等，它们在一定

的条件下相互依存，又在一定的条件下相互转化．

第二，数学方法具有辩证性．由于数学研究的对象充满了矛盾性和辩证性，因此，要揭示这些矛盾，促使矛盾的转化，从而达到解决数学问题的目的，所使用的数学方法就必须具有辩证性．如：归纳与演绎交互借用的过程就是“否定之否定”的过程；函数求导的过程就是量变与质变、有限与无限的矛盾转化过程；在求积分的整个过程中利用“直”与“曲”的对立统一及其相互转化规律，实现了“直”与“曲”的矛盾转化；数学变换方法实际上是利用变换与其逆变换经过迂回曲折的过程来实现未知与已知的矛盾转化；等等．这些都是“否定之否定”与矛盾转化等辩证思想在数学中的具体体现．

第三，数学的发展充满了辩证性．数学发展的历史告诉我们，数学发展的动力是社会生产实践、科学技术的需要和数学本身的逻辑三个方面相互作用的结果，这种相互作用的发展过程充满了辩证性．如由数学内部矛盾引起的三次数学危机，尽管在一定的时期内使数学基础发生了动摇，但也促使数学家通过认真分析产生危机的原因，并提出解决方案，从而不仅化解了危机，而且更加深入地促进了数学的发展．由此可见，矛盾是推动数学发展的动力之一．再如，从算术到代数的发展、从综合几何到解析几何的发展、从常量数学到变量数学的发展、从标准分析到非标准分析的发展过程中，辩证思维

都起了巨大的推动作用．

1.2.5 优美性

数学从表面上看好像是枯燥的，然而它却具有一种隐蔽的、深邃的美，一种理性的美．数学从表现形式到内容、方法都充满了美．

第一，数学就其表现形式而言具有形式简洁美．美学理论中将形式美概括为：整齐一律、平衡对称、符合规律、和谐．数学的形式美就是这些类型的典型表现．直线、正方体、数列等都是整齐一律的；对称多项式、二项式展开的系数关系，在表现形式上具有平衡对称美；所有的轴对称图形和中心对称图形都散发着平衡对称美；函数的几何表示、数学问题几何化等是各种因素的协调一致，富有内在的规律性．

第二，数学就其内涵而言具有内在美．数学的内在美主要表现在：对称性、简单性、统一性和奇异性．如：加法与减法、函数与反函数、微分与积分、分析与综合、归纳与演绎等都是对称美的体现；利用对数方法可以将较复杂的乘法运算转化成简单的加法运算以及公理具有简洁、自明、独立之特征等都体现了对简单美的追求；在直角三角形中，尽管可能形状各异，但都统一于勾股定理；无理数的发现、哥德尔不完备定理、高斯对素数分布的猜

想等都堪称数学奇异性的典范.

第三，数学具有方法美．首先，数学方法为其他科学研究提供了一种简明精确的形式化语言；其次，数学推理必须遵守逻辑的基本规则，而且这种规则足以保证从确定的概念、公理出发推导出的结论具有逻辑上的必然性和可靠性．因此，数学方法具有得天独厚的符号形式结构和精确的演绎推理形式，所得结论正确可靠、应用广泛等特征，这些特征决定了数学方法的独特性.

第四，数学美的追求是推动数学发展的动力．数学美的价值不仅仅在于它给人以美的享受、美的熏陶，而且在于它给人们以美的启迪，为数学理论的发展与完善提供了一条"美化"的途径. 纵观数学发展的历程，对数学美的追求往往意味着数学的巨大进步．如：微分算子就是莱布尼兹追求乘法形式美的结果；在欧氏平面上点和直线是不对称的，而为了追求对称美，法国数学家笛沙格大胆提出了无穷远点的设想，实现了点与直线的对称，发展了射影几何理论；由于射影几何中"对偶原理"研究的不再是一般数学对象之间的关系，而是数学定理之间的关系，因此它的重要价值就远远超过了一般定理，渗透了一种新的数学思想，即"证明论"的观点；等等．这充分体现了对数学美的追求对数学发展的影响.