第 1 章　函　数

◇ 主要知识与方法

1．邻域

（1）邻域：数集 $\{x\,\big|\,|x-x_0|<\delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$ 或 $U(x_0)$.

（2）去心邻域：数集 $\{x\,\big|\,0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 或 $\mathring{U}(x_0)$.

2．函数

（1）定义：设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空数集，如果对任意 $x\in D$ ，按照对应法则 f，存在 $y\in\mathbf{R}$ 与 x 对应，则称 f 为定义在 D 上的函数，记为 $y=f(x)$ ，其中数集 D 称为函数的定义域，记为 $D(f)$.

而集合 $Z(f)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域.

当 y 取唯一值时，称 $y=f(x)$ 为单值函数. 本书所讨论的函数没有特别说明外都是单值函数.

（2）图形：平面点集 $\{(x,y)\,|\,y=f(x),\ x\in D(f)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

函数 $y=f(x)$ 的图形通常为一条曲线.

（3）定义域的求法：先根据表达式有意义列出不等式（组），再解不等式（组）得定义域.

3．函数的特性

（1）奇偶性.

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x \in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x \in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

注：上述定义也给出了判断函数奇偶性的方法.

（2）有界性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 若存在 $M>0$，对任意 $x \in I \subset D$，有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

当 $I=D$ 时，称 $f(x)$ 为有界函数.

当 $f(x) \leqslant M_1$ 时称 $f(x)$ 为有上界，当 $f(x) \geqslant M_2$ 时称 $f(x)$ 为有下界.

注：$f(x)$ 在区间 I 上有界 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在区间 I 上既有上界又有下界.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对任意 $M>0$，存在 $x_0 \in I \subset D$，有

$$|f(x_0)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

（3）单调性.

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意 $x_1, x_2 \in I$，且 $x_1 < x_2$，有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加，而区间 I 称为单调增加区间.

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意 $x_1, x_2 \in I$，且 $x_1 < x_2$，有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少，而区间 I 称为单调减少区间.

（4）周期性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在正常数 T，对任意 $x \in D$，有 $x+T \in D$，且 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，且称 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期.

显然，当 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期时，$nT(n \in \mathbf{Z}^+)$ 也是 $f(x)$ 的周期.

通常我们所说的周期是指 $f(x)$ 的最小正周期.

例如，$\sin x, \cos x$ 的周期为 2π，$\tan x, \cot x$ 的周期为 π.

函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期为 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$，$y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的周期为 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

4．两个特殊函数

（1）符号函数：函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ 称为符号函数.

显然，$|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$.

（2）取整函数：函数 $y = [x]$ 称为取整函数.

其中$[x]$表示x的整数部分，即不超过x的最大整数.

例如，$[2.6]=2$，$[-2.6]=-3$.

5．反函数

（1）定义：设函数$y=f(x)$的定义域为$D(f)$，值域为$Z(f)$，若对任意$y\in Z(f)$，存在唯一的$x\in D(f)$，使$f(x)=y$，则在$Z(f)$上定义了一个函数，称为函数$y=f(x)$的反函数，记为$x=f^{-1}(y)$.

通常$y=f(x)$的反函数记为$y=f^{-1}(x)$.

（2）反函数求法：先从方程$y=f(x)$中解出x，再交换x与y可得反函数.

6．复合函数

设函数$y=f(u)$的定义域为$D(f)$，函数$u=\varphi(x)$的值域为$Z(\varphi)$，若$D(f)\bigcap Z(\varphi)\neq\varnothing$，则称函数$y=f[\varphi(x)]$为$x$的复合函数.

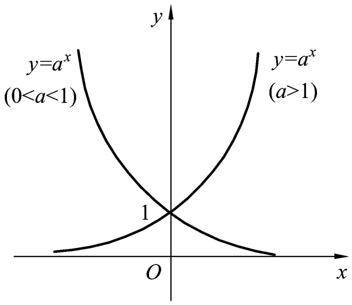
注：不是任意两个函数都能构成复合函数.

例如，$y=\arcsin u$，$u=x^2+2$不能构成复合函数.

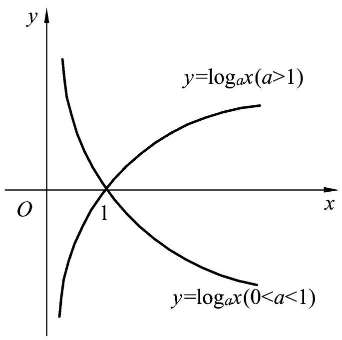
7．基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

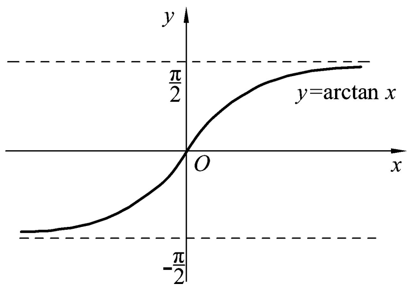
（1）指数函数$y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$的图形.



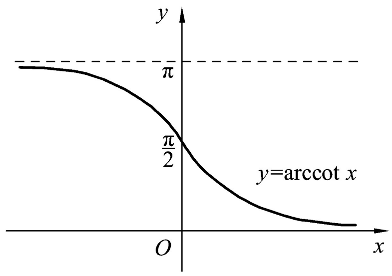
（2）对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的图形.



（3）反正切函数 $y=\arctan x$ 的图形.



（4）反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的图形.



8．初等函数

由常数和基本初等函数经有限次四则运算或复合构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如，函数 $y=\dfrac{\sin x^2}{e^x+2}$， $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 均为初等函数.

9．分段函数

在自变量的不同变化范围，函数的表达式也不同的函数称为分段函数.

例如，前面提到的符号函数与取整函数均为分段函数.

函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x+1, & 0<x<1\\ x-2, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 为分段函数， $x=0,1$ 称为分界点.

◆ 同步练习

一、填空题

1. 函数 $y=\sin\sqrt{x-1}$ 的定义域为________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{x}(x\neq 0)$，则 $f[f(2)]=$________.

3. 设 $3f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)=$________.

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内________（填有界或无界）.

5. 函数 $y=\sin x\cos x$ 的周期 $T=$________.

二、解答题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}2^{x}, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x+1, & 0<x<1\\ x-2, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求 $f\left[f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$ 及 $f\left[f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，求 $f\{f[f(x)]\}$.

3. 求函数 $f(x)=\arcsin(x-1)+\lg(x^2-4x+3)$ 的定义域.

4. 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

5. 求函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 的反函数.

三、证明题

1. 设 $f(x)=\ln(x+1)$，证明： $f(x^2-2)-f(x-2)=f(x)$.

2. 证明：函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 为奇函数.

3. 证明：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界.