

# 1 绪论

动力系统的概念起源于 19 世纪末对动力学问题——常微分方程的定性研究。19 世纪后半期，庞加莱和李雅普诺夫在力学研究中建立了微分方程的定性分析与稳定性理论。到 20 世纪 60 年代，由于微分几何和微分拓扑研究的发展，动力系统理论才开始取得重大的进展，并且在物理、化学、生物、生态学、经济学、控制理论、数值计算等各个领域都有着广泛的应用，成为当代最活跃的数学分支之一。

众所周知，系统的稳定性是系统最基本也是最重要的性能之一，是任何系统分析和控制系统设计都必须首先考虑的问题。各种稳定性的定义都与系统的响应有关，即具有反映系统的输入、系统的初始条件或参数的小变化不会引起系统行为大变化的性质。在实际中，系统往往受到时滞、建模误差、系统参数摄动或随机扰动等多种因素的干扰，在有这些干扰存在的前提下，其稳定性分析就显得更加重要。在近一百年的时间里，稳定性理论得到了人们广泛的关注和深入的研究，我国的许多学者也做出了许多有意义的工作。

本论文旨在对时滞不确定线性系统、时滞神经网络以及基因调控网络等几类动力系统的稳定性进行分析。本章分 3 个部分简要介绍时滞不确定线性系统、时滞神经网络以及基因调控网络的研究概况，然后介绍本论文的主要研究内容。

## 1.1 时滞不确定线性系统稳定性概述

在实际问题中，各种工业生产过程、生产设备、运输系统以及其他众多的被控对象，它们的动态特性一般都难以用精确的数学模型进行描述，有时即使能获得被控对象的精确数学模型，但由于过于复杂，利用现有的控制系

统设计手段也无法实现，因而不得不进行简化，比如将非线性系统转化为线性系统。此外，在许多实际系统中，如航空航天、化工冶金、电网等，由于环境变化、测量的不灵敏、信号的传输和元件的老化等原因，系统中不确定性和时滞是普遍存在的。

时滞系统已被大量用于描述传播、传输现象或人口动态模型等方面<sup>[1-2]</sup>。在经济系统中，时滞以一种自然的方式通过一些时间区间出现在一些经济领域，如投资政策、商品市场演变等<sup>错误!未找到引用源。</sup>。用数学方法来描述，这类系统通常被表示成泛函微分方程形式<sup>错误!未找到引用源。</sup>。由于时滞是自然界中广泛存在而又不可避免的一种现象，时滞的存在使得系统的分析和综合变得更加复杂和困难。且实践证明，由于时滞对线性或非线性系统的状态或输入的影响，以及它引起复杂的动力行为（如振动，不稳定性，混沌），时滞往往是系统失稳的重要因素之一。此外，自然界与工程中存在诸多不确定因素，例如，制造、安装、测量、材料、尺寸等各个环节中都不可避免地存在着允差，因而，工程计算中所涉及的物理参数都具有某种程度上的不确定性。在研究控制系统时所遇到的不确定因素主要包括：结构不确定性或者参数不确定性、非结构不确定性或非结构摄动、混合不确定性。因此，分析时滞系统的稳定性有着重要的理论和实际的意义，且必须考虑不确定性带来的影响。

目前，研究时滞系统主要是应用泛函微分方程理论，研究范围涉及稳定性分析、控制器设计、 $H_\infty$ 控制、无源与耗散控制、可靠控制、保成本控制、 $H_\infty$ 滤波、Kalman 滤波以及随机控制等。不管研究哪个分支，稳定性都是基础，对最终形成控制方案具有非常重要的理论和现实意义。时滞系统稳定性分析的目的是希望找到计算简单、切实有效并且保守性尽可能小的稳定性判据，研究方法主要分为两类：一类是以研究系统传递函数为主的频域方法；另一类是以研究系统状态方程为主的时域方法<sup>错误!未找到引用源。</sup>。

频域法是基于超越特征方程根的分布或复 Lyapunov 矩阵函数方程的解来判别稳定性。线性时滞系统稳定的充要条件是闭环特征方程的解均具有负实部。由于时滞系统闭环特征方程是一个具有无穷多解的超越方程，其稳定性分析比无时滞系统要复杂得多，虽然频域法理论上容易得到系统稳定的充要条件，但在考虑控制器的设计时，由于涉及系统特征方程的处理，计算非常复杂，特别是对于多变量高维系统、非线性微分系统或中立型系统。同时，

频域法难于处理含有不确定项以及参数时变的时滞系统。

时域法是目前时滞系统稳定性分析和综合的主要方法，易于处理含有不确定项、时变参数和时变时滞的系统以及非线性时滞系统。时域方法主要有 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法和 Razumikhin 函数方法。Lyapunov-Krasovskii 泛函方法是由 Krasovskii 于 1959 年提出的推广 Lyapunov 方法，通过引入不同的泛函，来判断系统的稳定性。由于泛函的选取不同，其保守性能也有所差异。在应用稳定性理论时，主要是判定泛函沿系统的任意轨线的时间导数，并保证这个时间导数最终是负定的。

当前，为了降低时滞依赖稳定条件的保守性，大致有 3 种方法：交叉项界定方法、模型变换方法以及 Lyapunov-Krasovskii 泛函的适当选取。最近也出现了一些新的思想和方法，如自由权值矩阵 (Free-weighting matrices) 方法及分段 Lyapunov 方法等，能更明显地减少前 3 种方法的保守性。自由权值矩阵方法有两个优点：第一，它直接处理系统模型，不采用任何系统变换。目前，系统变换是处理时滞系统稳定性的主要方法，所有采用自由权值矩阵方法就避免了有模型变换引起的保守性；第二，它没有使用任何不等式或改进的不等式来估计 Lyapunov 泛函的上界。

近年来，科学工作者们对时滞线性系统的稳定性做了深入的研究，取得了丰富的研究结果，包括常时滞或变时滞系统<sup>[5-11, 13, 16-17, 19-25, 27-31]</sup>。在文献[19]中，作者利用自由权值矩阵方法研究了带区间时变时滞的连续系统的稳定性问题。文献[11]的作者通过采用增广矩阵方法 (Augmented matrix method)，研究了带参数不确定的时滞线性系统的鲁棒稳定性问题，分别给出了带区间时变时滞和常时滞的时滞系统的稳定性判断准则。文献[25]和[16]讨论了一类带几个累加时滞的连续系统的稳定性问题。文献[31]则关注了带随机扰动的不确定时滞系统的鲁棒稳定性问题，并给出了与时滞相关的稳定性判断条件。这些研究时滞系统稳定性的方法也适用于时滞神经网络稳定性分析。在文献[32]中，作者就利用一阶参数模型转换方法首先讨论了时滞系统的稳定性问题，然后将所得到的结果应用于一类可转换为线性时变系统的神经网络的稳定性分析中。关于时滞神经网络的稳定性概述将在下节阐述。

## 1.2 时滞神经网络稳定性概述

作为动力系统的另外一个重要应用,神经网络由于具有分布存储、并行处理和自学习的优点,在信息处理、模式识别、智能控制等众多领域有广泛应用<sup>[37-41]</sup>。细胞神经网络由于其局部的连接性质,有利于超大规模电路的实现,但电路设计以及大规模电路实现的正确性需要神经网络的稳定性来保证,所以保证神经网络及其学习过程的稳定性是神经网络应用中一个非常重要的问题。例如, Hopfield 网络用于优化时,要求网络只具有唯一的一个平衡点,该平衡点对应于待求解的目标,而且随着时间的增长,要求网络的所有状态都趋近于这个平衡点,从数学上看,就是要求网络必须是全局渐近稳定的;神经网络用于实时计算时,为了提高收敛速度,我们常常要求神经网络具有较高的指数收敛度。细胞神经网络用于图像处理时,希望网络的平衡点尽可能地多,这样可以将处理后的结果存储于这些平衡点上,而且网络的状态在长时间后也要趋近于某个平衡点,这对应于系统是完全稳定的;因此,研究神经网络的稳定性问题就具有十分重要的理论及现实意义。在过去近 20 年里,神经网络的稳定性得到了深入的研究。

众所周知,在生物神经网络中神经元之间信号传输的突触滞后总是存在的。类似地,由于神经信号传输速度以及放大器切换速度的有限性,所以在由电路硬件执行的人工神经网络中时滞的存在是普遍的。为了易于分析和应用,许多神经网络模型忽略了神经元之间信息传输所带来的时间延迟。然而,时滞可能会影响整个网络的稳定性而产生振荡行为和不稳定现象甚至带来混沌。在这种情况下,要精确地描述事物,就必须研究带时滞的神经网络系统的稳定性。近年来,研究人员将轴突信号传输时滞引入到传统的神经网络模型,如 Hopfield 神经网络 (HNN)、细胞神经网络 (CNN)、双向联想记忆神经网络 (BAMNN) 和 Cohen-Grossberg 神经网络模型 (CGNN) 等,得到了相应的时滞神经网络模型,并对其各种动力学属性进行了深入的研究,对时滞神经网络的稳定性研究也取得了大量深刻的结果<sup>[42-82]</sup>。

一般来说,当前文献中的时滞可以分为有限时滞和无穷时滞,而有限时滞又可分为常量时滞和时变时滞。尽管在神经网络模型中用常量时滞来描述时间滞后已经对真实现象给出了很好的近似,但在实际中,随时间变化的时

滞才更加真实客观，带有变时滞的人工神经网络模型能给出生物神经网络更加精确的模拟。然而，虽然在建模中采用有限时滞反馈可以对一些小型的电路得到较好的近似，但由于存在大量的并行旁路以及存在各种不同长度和大小的轴突，神经网络中通常有空间上的扩展。这样，神经网络就在无穷或有限时间内存在传输时滞的分布，在这种情况下，信号传输就不可能是瞬间完成的，也就不能用有限时滞或无穷时滞来建模，即较精确的模型应该同时含有有限时滞和无穷时滞<sup>错误!未找到引用源。</sup>。注意到，虽然对一些神经网络来说，小的时滞对其平衡点的全局稳定性影响很小（我们称这种时滞是“无害”时滞）<sup>错误!未找到引用源。</sup>，但一般来说，时滞的引入对神经网络的动力学行为有着很大的影响，它可以使得神经网络变得更加复杂，甚至出现混沌现象。当然，时滞的存在也使神经网络平衡点的稳定性分析变得更加复杂。

近年来，时滞神经网络的全局渐近稳定性和全局指数稳定性得到了大量的研究，读者可参阅文献[53-82]。由于目前尚未出现关于时滞神经网络系统的统一模型，一般情况下，研究时滞神经网络的稳定性问题时，不同的网络一般都采用不同的特殊处理手段。因此，关于神经网络稳定性研究不仅没有统一的方法可循，而且许多研究结果也时常具有交叉和重复的内容。但总的来看，在现有研究时滞神经网络稳定性的方法中最广泛使用的是 Lyapunov 方法<sup>错误!未找到引用源。</sup>。它把稳定性问题变为某些适当地定义在系统轨迹上的泛函稳定性问题，并通过这些泛函得到相应的稳定性条件。这些稳定性条件就其表述形式至少可分为 4 种，即参数的代数不等式（例如，文献[42-43, 50, 53, 85]）、系数矩阵的范数不等式（例如，文献[64-65, 67-68]）、矩阵不等式（例如，文献[54-70]）和线性矩阵不等式（LMI）<sup>错误!未找到引用源。</sup>（例如，文献[48, 49, 61-62, 70]）等。其中，由于 LMI 方法对系统参数的限制相对较少而且易于验证<sup>错误!未找到引用源。</sup>，近年来，LMI 方法在稳定性理论中得到了大量的应用（例如，文献<sup>错误!未找到引用源。</sup>）。

根据是否包含时滞参数，时滞系统的稳定性准则一般可分为两类：时滞无关稳定性准则和时滞相关稳定性准则<sup>错误!未找到引用源。</sup>。由于许多实际系统中的时滞都是有界的，时滞相关的准则相对于时滞无关的准则，其保守性要低一些。早期的大多数研究基本上局限于时滞无关的稳定性研究，显然，这对“无害”的小时滞神经网络是非常苛刻的。Liao 在多篇文章中提到这个问题，

并对时滞 Hopfield 神经网络提出了一系列时滞相关的稳定性条件<sup>[48, 74, 78]</sup>。Li 进一步研究了 BAM 神经网络的时滞相关的稳定性问题<sup>错误!未找到引用源。</sup>。而时滞相关稳定性条件要求当时滞为零时,系统是稳定的。这样,由于系统解对时滞的连续依赖,一定存在一个时滞上界  $\bar{\tau}$ ,使得对于  $\forall \tau \in [0, \bar{\tau}]$ ,系统均是稳定的。相应地,最大允许时滞界  $\bar{\tau}$ 就成为衡量时滞依赖条件保守性的主要指标。于是,找到使得系统稳定最大时滞区间将是非常有用的。最近的一些文献,如文献<sup>错误!未找到引用源。</sup>,研究了这种时滞参数相关的稳定区间问题。

对一个预先设计好的系统,由于模型误差、外部扰动和实现时出现的参数波动等不可避免的不确定因素,它的稳定性常常会被破坏。这样,我们在设计系统时必须考虑系统的鲁棒稳定性。如果一个系统的不确定因素仅仅来自参数的扰动或波动,并且这种扰动或波动都是有界的,那么我们称这种系统为区间系统。1998年,Liao和Yu首次研究了区间 Hopfield 神经网络的鲁棒稳定性<sup>错误!未找到引用源。</sup>。近年来,关于带常量时滞和时变时滞的神经网络的全局鲁棒稳定性的结果已经有了不少报道,参见文献[45, 52, 56, 81-82, 86-89]。然而,由于时滞神经网络稳定性问题的复杂性,人们不可能针对一大类系统得到一组完美的稳定性判据。因此,为了实践上的应用和理论的完美,人们不断提出新的判定准则来弥补理论上的这种欠缺。

时滞神经网络是一种复杂的非线性系统,其动力学特性十分复杂。本论文主要涉及平衡点的存在性和唯一性、全局稳定性(渐近稳定性、鲁棒稳定性)。目前以及今后一段时间,关于时滞神经网络动力学行为的理论研究可能主要集中在以下几个方面:

- 时滞对神经网络的稳定吸引域的影响;
- 时滞神经网络的局部稳定性以及局部吸引域的研究;
- 时滞神经网络的分叉和混沌研究;
- 对其他类型的神经网络的研究,例如,模糊神经网络、脉冲神经网络、混杂脉冲开关神经网络等。

### 1.3 基因调控网络及其稳定性概述

基因调控网络本质上是一个连续而复杂的动态系统，即复杂的动力系统网络，用于描述 DNA、RNA、蛋白质和其他一些小分子，以及它们之间的相互作用关系。在过去近十年里，基因调控网络 (Gene regulatory networks) 已经成为生物学与生物医学中一个重要的研究领域<sup>[130-132]</sup>。

### 1.3.1 基因调控网络概述

生命的秘密储存在基因 (Gene) 当中。基因是包含了生命活动所必需的各类遗传信息的 DNA 序列，它是控制生命体性状的基本遗传单位。为了生成各类完成具体生命活动的蛋白质，基因中所包含的遗传信息首先从 DNA 单链转录 (Transcribe) 成为信使 RNA (Messenger RNA)，这一过程是由 RNA 聚合酶参与完成的。接下来，信使 RNA 被翻译 (Translate) 成具体的蛋白质，在翻译过程中，mRNA 中的核苷酸序列用于蛋白质的合成。这一系列的过程，称为基因表达 (Gene expression)。简而言之，基因表达是细胞在生命过程中把生物基因组中蕴藏在基因中的遗传信息经过转录及翻译等一系列过程，合成特定的蛋白质，进而发挥其特定的生物学功能的全过程。在基因表达过程中，遗传信息由 DNA 传递到蛋白质，如图 1.1 所示。一个基因的表达受其他基因的影响，而这个基因又影响其他基因的表达，这种相互影响相互制约的关系构成了复杂的基因调控网络。

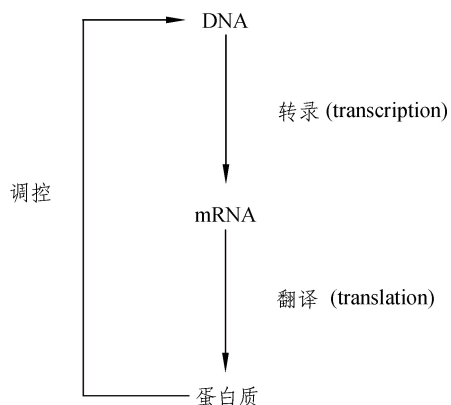


图 1.1 基因表达过程

Fig.1.1 The process of gene expression

基因表达调控主要表现在以下几个方面：

- 转录水平上的调控 (Transcriptional regulation)；
- 转录后水平，即 mRNA 加工、成熟水平上的调控 (Post-transcriptional regulation)；
- 翻译和翻译后水平上的调控 (Translational and post-translational regulation)。

基因的转录过程受到一类特殊的蛋白质所调控，这类特殊的蛋白质又叫作转录因子 (Transcription factor)。通常而言，转录因子有两种状态，活跃 (Active) 和不活跃 (Inactive)。转录因子可以在环境信号的作用之下在这两种状态之间进行快速的转换<sup>错误!未找到引用源。</sup>。

对于原核生物和真核生物来说，真核生物的遗传物质集中在细胞核中，并与某些特殊的蛋白质组成核蛋白，形成一种致密的染色体结构，如酵母、霉菌、高等动植物。原核生物没有细胞核，遗传物质分散于整个细胞中。有时虽有相对的集中的区域，但并无核膜包围，如放线菌、细菌、立克次氏体、衣原体、支原体等。由于二者的细胞结构不同，它们的基因组及其基因表达调控差异明显。

#### ① 原核基因表达调控特点

原核生物不同于真核生物的基因结构，存在转录单元，即操纵子。原核生物的转录受操纵子控制，任何开启和关闭操纵子的因素会影响基因的转录，从而控制基因的表达。

原核生物的调控主要发生在转录水平上，根据调控机制的不同分为负转录调控和正转录调控。在负调控系统中，调控基因的产物是阻遏蛋白 (Repressor)，起着阻止结构基因转录的作用。根据作用特征又可分为负诱导作用和负阻遏作用。在负诱导系统中，阻遏蛋白不与效应物 (诱导物) 结合时，结构基因不转录；在负控阻遏系统中，阻遏蛋白与效应物结合时，结构基因不转录。在正转录调控系统中，调控基因的产物是激活蛋白 (Activator)。在正控诱导系统中，诱导物的存在使激活蛋白处于活性状态；在正控阻遏系统中，效应物分子的存在使激活蛋白处于非活性状态。

#### ② 真核基因表达调控特点

自从在原核生物中发现了各种操纵子后，科学家们一直在探索真核生物



基因表达调控的机制。几十年来的研究证明，绝大多数的真核生物细胞中不存在与原核生物类似的操纵子。真核生物细胞中基因表达调控要比原核生物复杂得多，但同原核一样，转录起始仍是真核基因表达调控的最基本环节，而且某些机制是一样的。但在下述方面与原核存在明显差别：

真核基因转录发生在细胞核内，翻译则多在胞浆，两个过程是分开的，因此其调控增加了更多的环节和复杂性，转录后的调控占有更多的分量。

真核基因的转录与染色质的结构变化相关。当基因被激活时，可观察到染色体相应区域发生某些结构和性质变化，如活化基因对核酸酶极度敏感；当基因活化时，转录区 DNA 有拓扑结构变化，DNA 碱基修饰（如甲基化）变化及组蛋白变化。

真核基因表达以正性调控为主。真核 RNA 聚合酶对启动子的亲和力很低，基本上不依靠自身来起始转录，需要依赖多种激活蛋白的协同作用。真核基因调控中虽然也发现有负性调控元件，但其存在并不普遍；真核基因转录表达的调控蛋白也有起阻遏和激活作用或兼有两种作用者，但总是以激活蛋白的作用为主。即多数真核基因在没有调控蛋白作用时是不转录的，需要表达时就要有激活的蛋白质来促进转录。换言之，真核基因表达以正性调控为主导。

目前，基因表达及其调控过程是分子生物学的核心问题，是现代生命科学研究的重点和热点问题。生物物种之间的差异显现与物种演化的关键问题就是基因表达的 DNA 信息控制方法<sup>错误!未找到引用源。</sup>。

### 1.3.2 基因调控网络中的时滞与噪声

在生物体内，基因表达之间存在时滞调控现象是客观存在的。基因调控系统的转录、翻译、蛋白质的形成过程都存在时滞<sup>错误!未找到引用源。</sup>，例如，一个基因  $i$  对另一个基因  $j$  有抑制作用。但基因  $i$  要与基因  $j$  的上游调控序列结合，可能必须先与其诱导因子相结合。因此，从抑制子  $i$  的表达到所观察到的其对基因  $j$  的抑制现象之间会存在一个明显的时间延迟。此外，在通过基因表达谱对基因调控网络重构的过程中，由于芯片实验本身的原因，也将导致延迟调控现象的出现。在最近的一些关于老鼠和斑马鱼的实验中，证实了

时滞是确实存在的<sup>[161-162]</sup>。

基因表达的过程在生命过程中处于最基本的层次，其中存在着丰富的随机过程。Arkin 等科学工作者很早就指出了基因表达过程中的反应是随机突然发生的，随机力的影响必须加以考虑<sup>错误!未找到引用源。</sup>。近几年，有不少工作都开始研究基因表达过程中的噪声的作用。基因网络中的噪声有两个来源<sup>错误!未找到引用源。</sup>：

#### ① 内部噪声 (Intrinsic noise) <sup>[179-180]</sup>

内部噪声来源于基因网络固有的物理化学反应特性。在真正的细胞当中，参与生命活动各个过程的分子数目往往处于一种很低的水平，分子间的物理化学反应是随机过程，而不是确定性的事件，从而导致各类分子的数目是一个随机变量。因为分子数目直接和该分子参与的反应速度相关，分子数目的随机性会使得基因调控网络的信号处理过程也是一个不确定的随机过程。这一类噪声的强度与系统中的分子数目成反比。当基因调控网络中的分子数量趋于无穷的时候，在没有外部噪声的条件下，基因调控网络可以被视为一个无噪声的信号处理系统。然而由于在生物化学反应中，参与反应的分子数目往往很少，因此内部噪声的强度足以对系统的信号处理功能产生重要的影响。

#### ② 外部噪声 (Extrinsic noise) <sup>错误!未找到引用源。</sup>

我们可以把基因调控网络看作是一个多控制参数的信号处理系统。在实际生物系统中，这些控制参量往往不是恒定的，而是受到一系列其他随机波动因素的影响，比如温度、气压、光强等等。控制变量的随机波动作为输入进入基因调控网络的信号处理过程，它们对信号处理的影响随着信息的流动过程在基因网络内部扩散。比如一个特殊基因的转录因子的活性对温度的变化比较敏感，那么环境中温度的随机波动就会使该转录因子的活性处于不稳定的状态，进而影响该基因的转录和翻译，使得该基因表达的蛋白质水平也处于一种随机波动的状态。

### 1.3.3 基因调控网络模型

基因调控网络分析的目的就是要建立调控网络的数学模型，通过数学模型来研究基因之间的相互作用关系。建模时为了简化求解的需要，往往对其进行