第 1 章
函数、极限与连续

1.1　函数
1.2　极限
1.3　无穷小与无穷大
1.4　极限运算法则
1.5　两个重要极限
1.6　无穷小的比较
1.7　函数的连续性

高等数学研究的对象是变量．函数是描述变量之间依赖关系的，是数学中重要的概念．极限方法是研究变量的一种基本方法，是学习微积分的基础，高等数学中的许多概念、性质和法则都是通过极限方法来建立的．

本章首先复习函数的相关知识，然后讨论函数的极限和连续．

1.1　函数

1.1.1　函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

定义 1　设 D 是一个实数集，如果对属于 D 内的每一个 x 按照某个对应法则 f，都有唯一确定的 y 值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为这个函数的定义域；当 x 取遍 D 中的一切实数时，它对应的 y 值组成的集合 M 称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0(x_0\in D)$ 处的函数值记为 $f(x_0),f(x)\big|_{x=x_0}$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.

例 1　已知函数 $f(x)=3x^2-4$，求 $f(1),f(x+1),f\left(\dfrac{1}{x}\right),\ \dfrac{1}{f(x^2)}$.

解　$f(1)=3\times1^2-4=-1$；

$f(x+1)=3(x+1)^2-4=3x^2+6x-1$；

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3\times\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-4=\dfrac{3}{x^2}-4$；

$\dfrac{1}{f(x^2)}=\dfrac{1}{3(x^2)^2-4}=\dfrac{1}{3x^4-4}$.

由函数的定义可知，当函数的定义域和对应关系确定以后，这个函数也就随之确定. 因此，我们常把函数的定义域和对应关系称为构成函数的两个要素. 当两个函数的定义域和对应关系都相同时，才称这两个函数相同.

例 2　判断下列每组中的两个函数是否是相同函数.

（1）$y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$；　　（2）$y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$；

（3）$y=|x|$ 与 $s=\sqrt{t^2}$.

解　（1）由于 $y=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，两者的定义域不同，所以这两个函数不相同.

（2）函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，且有相同的对应关系，所以它们是相同的函数.

（3）函数 $y=|x|$ 与 $s=\sqrt{t^2}$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，且有相同的对应关系，尽管这两个函数的自变量、因变量所用的字母不同，但它们表示同一个函数.

课堂练习 1

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$，求：(1) $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$；(2) $f(-0.3)$；(3) $f(2a)$.

2. 判断下列各对函数是否相同，并说明理由：

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$； (2) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(3) $f(x)=1$ 与 $f(t)=\sin^2 t+\cos^2 t$.

1.1.2 函数定义域的确定

函数的定义域是确定函数的要素之一，所以，只有在定义域内研究函数才有意义.

在实际问题中，要根据所研究问题的实际意义确定函数的定义域. 例如，在正方形的周长 y 与边长 x 之间的函数关系 $y=4x$ 中，因为正方形的边长为正数，所以函数 $y=4x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$；对于用解析式表示的函数，如果不考虑函数的实际意义，则函数的定义域就是使这个式子有意义的自变量的值的集合.

例 3 求下列函数的定义域，并用区间表示出来：

(1) $y=3x+4$； (2) $y=\dfrac{1}{3x+2}$； (3) $y=\sqrt{2x-3}$；

(4) $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x-3}$； (5) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(2x-1)}$； (6) $f(x)=\sqrt{x^2-4}-\arcsin(5-2x)$.

解 (1) 对于函数 $y=3x+4$，自变量 x 取任何实数都有意义，所以该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 对于函数 $y=\dfrac{1}{3x+2}$，由于分式的分母不能为零，所以 $3x+2\neq 0$，即 $x\neq-\dfrac{2}{3}$，因此该函数的定义域为 $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(3) 对于函数 $y=\sqrt{2x-3}$，由于负数不能开偶次方根，所以 $2x-3\geqslant 0$，即 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$，因此该函数的定义域为 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

(4) 对于函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x-3}$，只有当 $4-x\geqslant 0$ 且 $x-3\neq 0$ 时才有意义，由于不等式组 $\begin{cases}4-x\geqslant 0\\ x-3\neq 0\end{cases}$ 的解集为 $\{x\mid x\leqslant 4\text{且}x\neq 3\}$，所以该函数的定义域为 $(-\infty,3)\cup(3,4]$.

(5) 对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(2x-1)}$，由 $\begin{cases}2x-1>0\\ \ln(2x-1)\neq 0\end{cases}$ 得：$\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases}$，所以该函数的定义域为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

（6）对于函数 $f(x)=\sqrt{x^2-4}-\arcsin(5-2x)$，由 $\begin{cases} x^2-4\geqslant 0 \\ -1\leqslant 5-2x\leqslant 1 \end{cases}$ 得：$2\leqslant x\leqslant 3$，所以该函数的定义域为[2, 3].

课堂练习 2

求下列函数的定义域，并用区间表示出来：

（1） $y=\sqrt{1-2x}$；　　（2） $y=\dfrac{\sqrt{x}}{5x-3}$；

（3） $y=\dfrac{1}{\ln(3-2x)}$；　　（4） $y=\sqrt{4-x^2}+\arccos(3-2x)$.

1.1.3　函数的表示法

表示函数的方法一般有三种：公式法、表格法、图示法. 本书所讨论的函数主要用公式法来表示. 用数学表达式表示函数关系的方法称为公式法（或解析法）.

例如，函数 $y=\sqrt{2x-3}$ 与 $y=\dfrac{1}{3x+2}$ 都是用公式法表示的.

某些函数由于自变量的取值范围不同，对应法则也不同，因此，需要用不同的解析式来表示，这样的函数称为分段函数. 分段函数的定义域是各分段定义区间的并集. 例如，分段函数 $y=\begin{cases} 4-x, x\geqslant 0 \\ x, \quad x<0 \end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 4　确定函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,2) \\ -x+4, & x\in[2,4) \\ x-4, & x\in[4,6] \end{cases}$ 的定义域，并求 $f(1)$，$f(2)$，$f(5)$ 的值.

解　分段函数的定义域是各分段定义区间的并集，所以该函数的定义域为

$$D=[0,2)\cup[2,4)\cup[4,6]=[0,6].$$

求分段函数的函数值时，先要确定自变量所属的区间，再由对应的解析式求函数值.

因为 $1\in[0,2)$，所以 $f(1)=x|_{x=1}=1$；

因为 $2\in[2,4)$，所以 $f(2)=(-x+4)|_{x=2}=2$；

因为 $5\in[4,6]$，所以 $f(5)=(x-4)|_{x=5}=1$.

课堂练习 3

1. 确定函数 $f(x)=\begin{cases}2x-2, x\in(-3,2]\\3x-4, x\in(2,5]\\4-x,\quad x\in(5,+\infty)\end{cases}$ 的定义域，并求$f(-0.6)$，$f(2)$，$f(2.5)$，$f(6)$的值.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 1\\2x-1, & x<1\end{cases}$，求$f(2)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(a)$，$f(a-2)$的值.

1.1.4 函数的特性

1. 函数的有界性

设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I\subset D$，如果存在正数M，使得对于任意的$x\in I$，都有$|f(x)|\leqslant M$成立，则称函数$f(x)$在I上有界. 如果这样的正数M不存在，则称函数$f(x)$在I上无界.

例 5 判断下列函数是否有界，并说明理由.

（1） $y=\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$； （2） $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(1,3)$； （3） $y=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,2)$.

解 （1）当$x\in(-\infty,+\infty)$时，$|\cos x|\leqslant 1$，所以函数$y=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

（2）当$x\in(1,3)$时，$\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{x}<1$，即$\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$，所以$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(1,3)$内有界.

（3）当$x\in(0,2)$，且x无限地趋近于 0 时，函数$y=\dfrac{1}{x}$的值无限地增大，即不存在确定的正数M使$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$成立，所以$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,2)$内是无界的.

课堂练习 4

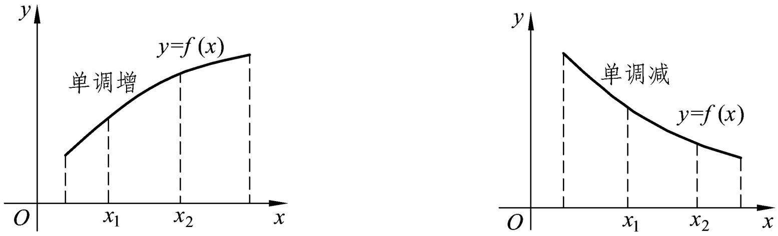
判断下列函数是否有界，并说明理由.

（1） $y=\sin 2x$； （2） $y=\ln x$；

（3） $y=2^x$, $x\in(2,3)$； （4） $y=\dfrac{1}{2x-1}$, $x\in(0,2)$.

2. 函数的单调性

设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I\subset D$，对于区间I上的任意两点x_1，x_2，如果当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间I上是单调增加的；如果当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间I上是单调减少的，如图 1.1-1 所示.



（a）单调增　　（b）单调减

图 1.1-1　函数的单调性

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，I 称为单调区间.

例 6　证明函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$上是单调增加的.

证明　对任意的 $x_1,\ x_2\in(0,+\infty)$，如果 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0,\ x_1+x_2>0$，那么

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0,$$

即
$$f(x_1)<f(x_2).$$

所以函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$上是单调增加的.

课堂练习 5

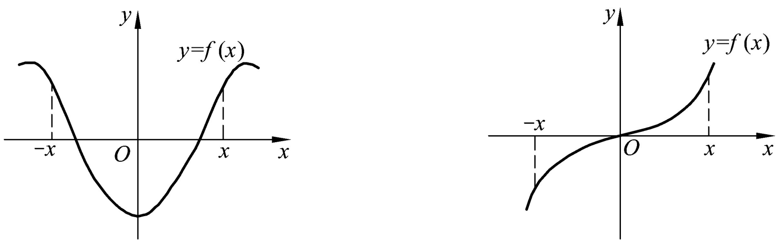
1. 证明函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的.
2. 证明函数 $f(x)=2x-1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于坐标原点对称，如果对于任意的 $x\in D$，总有 $f(-x)=f(x)$成立，则称 $f(x)$为偶函数；如果对于任意的 $x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$成立，则称 $f(x)$为奇函数.

既不是奇函数又不是偶函数的函数称为非奇非偶函数. 如函数 $f(x)=x^2-x$ 就是非奇非偶函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称；奇函数的图像关于原点对称. 如图 1.1-2 所示.



（a）偶函数的图像　　（b）奇函数的图像

图 1.1-2　函数的奇偶性

例 7　证明：

（1） $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是偶函数；

（2） $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数.

证明　（1）对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)\text{，}$$

所以 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是偶函数.

（2）对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)\text{，}$$

所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数.

课堂练习 6

1. 证明函数 $f(x)=3x^2+2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数.
2. 证明函数 $f(x)=2x^3-3x$ 在区间 $(-3,3)$ 上是奇函数.
3. 判断下列各函数是奇函数、偶函数，还是非奇非偶函数，并说明理由.

（1） $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$；　　（2） $f(x)=\sin 2x-3x$；

（3） $f(x)=3$；　　（4） $f(x)=2\sqrt{x}$.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对于任意的 $x\in D$ 有 $x\pm T\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

讨论周期函数时，通常所说的周期是指最小正周期. 例如，$y=\sin x$ 是周期函数，周期 $T=2\pi$.

一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$； $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 和 $y=A\cot(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$. 例如，$y=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{3}$，$y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的周期为 $T=\pi$， $y=4\tan\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的周期为 $T=2\pi$.

课堂练习 7

1. 指出下列函数的周期.

（1） $y=\cos x$；　　（2） $y=\tan 3x$；

（3） $y=\cot 2x$；　　　　　　　　　　（4） $i=30\sin\left(20\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. 试说明 $f(x)=2x$ 不是周期函数.

1.1.5　反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 M，如果对于集合 M 中的每一个 y 值，都可由关系式 $y=f(x)$确定唯一的 x 值与之对应，从而得到一个定义在集合 M 上的新函数，这个新函数叫作 $y=f(x)$的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$．反函数的定义域为 M，值域为 D. 对反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数.

习惯上，函数的自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以通常把 $x=f^{-1}(y)$，$y\in M$ 改写成 $y=f^{-1}(x), x\in M$．显然，反函数的定义域就是直接函数的值域，反函数的值域就是直接函数的定义域.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称. 如图 1.1-3 所示.

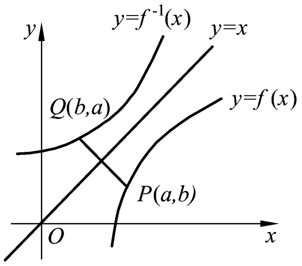


图 1.1-3　反函数的图像

由反函数的定义可得求反函数的步骤：

（1）从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$；

（2）交换字母 x 与 y 的位置，并注意反函数的定义域为直接函数的值域.

例 8　求下列函数的反函数.

（1） $y=2x+3, x\in(-\infty,+\infty)$；　　　　（2） $y=2e^{x}-1, x\in(-\infty,+\infty)$.

解　（1）先从 $y=2x+3$ 解出 x，得 $x=\dfrac{1}{2}(y-3)$．再交换 x 与 y 的位置，则所求的反函数为 $y=\dfrac{1}{2}(x-3), x\in(-\infty,+\infty)$.

（2）从 $y=2e^{x}-1$ 解出 x，得 $x=\ln\dfrac{y+1}{2}$．再交换 x 与 y 的位置，则所求的反函数为 $y=\ln\dfrac{x+1}{2}, x\in(-1,+\infty)$.

课堂练习 8

求下列函数的反函数及反函数的定义域，并在同一坐标系中画出直接函数和它的反函数的图像.

（1） $y=3x+2, x\in(-\infty,+\infty)$；（2） $y=3x+2,\ x\in[2,5]$；

（3） $y=\ln(x+1), x\in(-1,+\infty)$；（4） $y=\dfrac{2}{x+1}$.

1.1.6 复合函数

如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在函数 $y=f(u)$的定义域中，显然 y 也是 x 的函数，此函数称为由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 x 是自变量，u 是中间变量.

例如，$y=\mathrm{e}^u$，$u=2x^2$，则 $y=\mathrm{e}^{2x^2}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$ 与 $u=2x^2$ 复合而成的复合函数；而 $y=\ln u$ 与 $u=-x^2$ 不能构成一个复合函数，因为 $u=-x^2$ 的值域 $(-\infty,0]$，没有包含在函数 $y=\ln u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 中.

课堂练习 9

1. 将下列函数组成复合函数.

（1） $y=u^2, u=\cos x$；（2） $y=2^u, u=3x^2+2$.

2. 指出下列函数是怎样复合而成的.

（1） $y=\sqrt{3x^2-2x}$；（2） $y=\sin^3(2x^2-4)$.