第 1 章　高等数学预备知识

函数是现代数学最基本的概念之一．它不仅是初等数学学习的主要内容，也是高等数学研究的主要对象．微积分学是研究函数关系的一门数学学科．极限方法是微积分学的基本方法，微积分学中的许多概念都是在极限概念的基础上建立的．连续性是函数的重要性态，微积分学是以连续函数作为主要研究对象的．

本章在中学数学学习内容的基础上，进一步增加了函数的有关内容，为学生学习微积分打下基础.

1.1　函　数

在客观世界中，一切事物都在运动变化着．在某一变化过程中始终保持不变的量称为常量，在这一过程中不断变化，可以取不同值的量称为变量．变量的变化并不是孤立的，一些变量之间相互依赖、遵循着一定的规律．函数就是用来描述这种依赖关系的．

1.1.1　函数及其特性

1．映射的概念

（1）映射．

定义 1.1　设 A 、 B 是两个非空集合，如果存在一个法则 f ，使得对 A 中的每个元素 a ，按法则 f ，在 B 中有唯一确定的元素 b 与之对应，则称 f 为从 A 到 B 的映射，记作

$$f: A \to B .$$

其中， b 称为元素 a 在映射 f 下的象，记作 $b = f(a)$ ； a 称为 b 关于映射 f 的原象．集合 A 中所有元素的象的集合称为映射 f 的值域，记作 $f(A)$.

注：① 对于 A 中不同的元素，在 B 中不一定有不同的象．

② B 中每个元素都有原象（即满射），且集合 A 中不同的元素在集合 B 中都有不同的象（即单射），则称映射 f 建立了集合 A 和集合 B 之间的一个一一对应关系，也称 f 是 A 到 B 上的一一映射.

（2）复合映射.

定义 1.2　设有两个映射 $g:X \to Y_1$，$f:Y_2 \to Z$，其中 $Y_1 \subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$．显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f \cdot g$，即

$$f \cdot g : X \to Z,$$

$$f \cdot g(x) = f[g(x)],\ \ x \in X .$$

注：由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域必须包含在 f 的定义域内，否则不能构成复合映射．由此可以知道，映射 g 和 f 的复合是有顺序的．$f \cdot g$ 有意义并不表示 $g \cdot f$ 也有意义；即使 $f \cdot g$ 与 $g \cdot f$ 都有意义，复合映射 $f \cdot g$ 与 $g \cdot f$ 也不一定相同.

（3）逆映射.

定义 1.3　设有映射 $f:A \to B$，如果存在映射 $g:B \to A$，使得

$$g \cdot f = IA,\ f \cdot g = IB .$$

其中，IA, IB 分别是 A 与 B 上的恒等映射，则称 g 为 f 的逆映射.

逆映射，用较为通俗但不太严格的语言来表述，就是：

设有映射 $f:A \to B$，若存在映射 $g:B \to A$，使得：① 先执行 f，再执行 g，执行的结果是 $gf:A \to A$，即 gf 等于 A 上的恒等映射；② 先执行 g，再执行 f，执行的结果是 $fg:B \to B$，即 fg 等于 B 上的恒等映射，则 g 叫作 f 的逆映射.

2. 函数的概念

（1）函数的定义.

定义 1.4　设数集 $D \subset M$，则称映射 $f:D \to M$ 为定义在 D 上的函数，记作

$$y = f(x),\quad x \in D .$$

其中，x 叫作自变量，y 叫作因变量．x 的取值范围 D 称为函数的定义域，而数集

$$M = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的值域．当 $x = x_0$ 时，与 x_0 相对应的 y 值称为函数值，记作 $y\big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$．

注：① D, M 均为非空数集.

② 映射 f 只能是一对一映射或多对一映射.

③ 定义域 D、值域 M、对应法则 f 统称函数的三要素.

（2）函数的表示方式.

函数的表示方式一般有：解析法（也称公式法)、图像法、表格法.

例 1　某食品厂生产果奶和纯净水，每天可生产果奶 2000 瓶或纯净水 3000 瓶．已知生产一瓶果奶的成本为 1.8 元，可获利润 0.3 元；生产一瓶纯净水的成本为 0.4 元，可获利润 0.05 元．该厂每月最多支出成本 6 万元．若每月按 30 天计算，问该食品厂应如何安排生产，才能使利润最大．设食品厂每月有 x（$0 \leqslant x \leqslant 30$）天生产果奶，请写出关于利润的解析式.

解　依题意，每月有 $(30-x)$ 天生产纯净水．生产果奶的成本为 $2000x \times 1.8$元，利润为 $2000x \times 0.3$元；生产纯净水的成本为 $3000 \cdot (30-x) \times 0.4$ 元，利润为 $3000 \cdot (30-x) \times 0.05$ 元．从而有

总成本 $C(x) = 2000x \times 1.8 + 3000 \cdot (30-x) \times 0.4 = 2400x + 36\ 000$，

总利润 $L(x) = 2000x \times 0.3 + 3000 \cdot (30-x) \times 0.05 = 450x + 4500$．

例 2　某气象站用自动温度记录仪记下某日气温的变化，如图 1.1 所示．这时用图像法表示一昼夜里温度 T (°C)与时间 t(h)之间的对应关系．

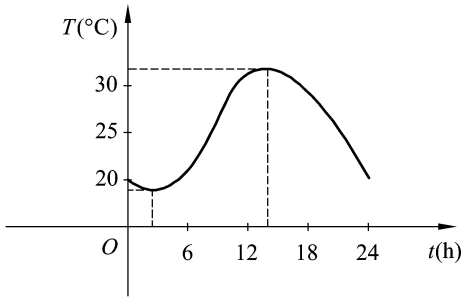

图 1.1

例 3　某商店的运动服销售价格 p（元）与尺码 S（cm）之间的关系，如表 1.1 所示．

表 1.1

尺码 S	85	90	95	100	105	110	115	120
价格 p	120	126	132	138	144	150	156	162

这是用表格法表示的函数关系，其定义域是 $D = \{85,90,95,100,105,110,115,120\}$．

（3）函数相等的概念．

给定两个函数，如果它们的定义域和对应法则相同，那么它们就是相同的函数，这与自变量和因变量用什么字母表示无关．

例如，$y = 2\lg x$ 和 $y = \lg x^2$ 不表示同一个函数，因为 $y = 2\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，而 $y = \lg x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，两者定义域不同.

3．复合函数

定义 1.5　给定函数 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，如果函数 $u = \varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域内，则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 是由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，其中 u 叫作中间变量.

复合函数可以由两个函数复合而成，也可以由多个函数复合而成.

例 4　写出下列函数的复合函数.

（1）　$y=\ln u$，　$u=x^2+1$；　　　　　　　　（2）　$y=\sqrt{u}$，　$u=\sin x+1$.

解　（1）　$y=\ln u=\ln(x^2+1)$；

（2）　$y=\sqrt{u}=\sqrt{\sin x+1}$.

注：不是任意两个函数都可以构成一个复合函数. 例如，$y=\sqrt{u}$ 和 $u=1+2x$ 就不能构成复合函数，因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $D=[0,+\infty)$，$u=1+2x$ 的值域 $\mathbf{R}$，$u=1+2x$ 的值域不包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域内.

为了研究函数的需要，有时我们要将一个复合函数分解成若干个基本初等函数或简单函数，这里的简单函数是指由基本初等函数经有限次四则运算所得的函数. 其分解方法是“由外到里，逐层分解”.

例 5　指出下列函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成的：

（1）　$y=\cos^2 x$；　　　　（2）　$y=(x-1)^5$；　　　　（3）　$y=3\ln(\sin x^2)$.

解　（1）　$y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$，　$u=\cos x$ 复合而成的；

（2）　$y=(x-1)^5$ 是由 $y=u^5$，　$u=x-1$ 复合而成的；

（3）　$y=3\ln(\tan x^2)$ 是由 $y=3\ln u$，　$u=\tan v$，　$v=x^2$ 复合而成的.

4. 反函数

定义 1.6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，值域是 B，且 f 是单射，则对每一个 $y\in B$ 都存在唯一 $x\in A$，使得 $y=f(x)$. 定义函数

$$f^{-1}:B\to A, f^{-1}(y)=x,$$

函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫作函数 $y=f(x)$ 的反函数. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 叫作直接函数.

函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，自变量是 y，因变量是 x. 而习惯上，函数的自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以反函数通常表示为

$$y=f^{-1}(x).$$

性质：

（1）直接函数与它的反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

（2）函数存在反函数的重要条件是函数的定义域与值域一一映射.

（3）严格增（减）的函数一定有严格增（减）的反函数（反函数存在定理）.

（4）反函数是相互的，且具有唯一性.

（5）直接函数的定义域、值域分别与它的反函数的值域、定义域对应，且直接函数与它的反函数的对应法则互逆（三反）.

（6）原函数一旦确定，反函数即确定（三定）[在有反函数的情况下，即满足（2）]．

（7）$y=x$ 的反函数是它本身.

规定：$y=\sin x$ 的反函数为 $y=\arcsin x$；$y=\cos x$ 的反函数为 $y=\arccos x$；$y=\tan x$ 的反函数为 $y=\arctan x$；$y=\cot x$ 的反函数为 $y=\operatorname{arc}\cot x$；$y=a^x$ 的反函数为 $y=\log_a x$.

例如，$y=2^x$ 的反函数是 $y=\log_2 x$，$y=\mathrm{e}^x$ 的反函数是 $y=\ln x$，$y=x^3$ 的反函数是 $y=\sqrt[3]{x}$.

例 6　求函数 $y=3x-2$ 的反函数.

解　$y=3x-2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}$.

由 $y=3x-2$，解得

$$x=\frac{y+2}{3}$$

将 x,y 互换，则所求 $y=3x-2$ 的反函数是

$$y=\frac{x+2}{3}\quad(x\in\mathbf{R}).$$

5. 分段函数

有些函数对于定义域内的自变量 x 取不同的值时，不能用一个统一的解析式表示出来，而要用两个或两个以上的解析式来表示，这种在自变量的不同取值范围内用不同的解析式表示的函数，称为分段函数.

例 7　我国寄到国内（外埠）信函的邮资标准是：首重 100 克内，每重 20 克（不足 20 克按 20 克计算）1.20 元（续重时情况略）. 设信函的重量为 x 克，邮资为 $f(x)$ 元，则邮资与信函的重量的函数关系可表示为：

$$f(x)=\begin{cases}1.2, & 0<x\leqslant 20\\ 2.4, & 20<x\leqslant 40\\ 3.6, & 40<x\leqslant 60\\ 4.8, & 60<x\leqslant 80\\ 6.0, & 80<x\leqslant 100\end{cases}$$

例 8　设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x<0\\ 1, & x=0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$，求函数的定义域和函数值 $f(-1)$，$f(0)$，$f(4)$，并做出此函数的图像.

解　易知，函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，则

$$f(-1)=3\times(-1)+1=-2.$$

同理，$f(0)=1$，$f(4)=2^4=16$.

此函数的图像如图 1.2 所示.

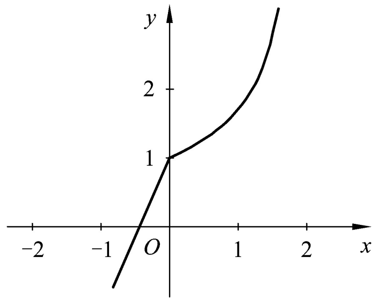

图 1.2

例 9　设符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$，其图像如图 1.3 所示.

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域为 $\{-1, 0, 1\}$.

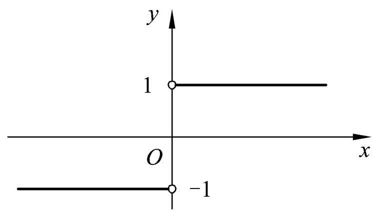

图 1.3

例 10　设取整函数 $y = [x]$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，其图像如图 1.4 所示.

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域为 $\mathbf{Z}$.

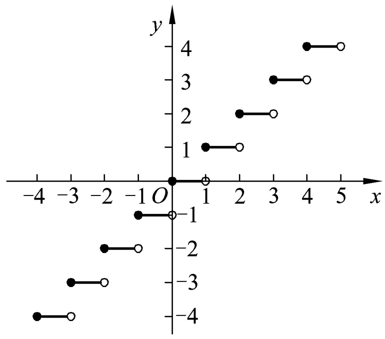

图 1.4

6. 函数的几种特性

(1) 函数的单调性.

设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，对于任意的 x_1，$x_2 \in (a,b)$，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的；当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数．相应地，区间 (a,b) 称为函数的单调区间．

单调增加函数的图像是随着自变量 x 的增大而上升的曲线；单调减少函数的图像是随着自变量 x 的增大而下降的曲线．

例如，函数 $y=x^2$，其图像如图 1.5 所示．由图 1.5 可以看出，它在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的．

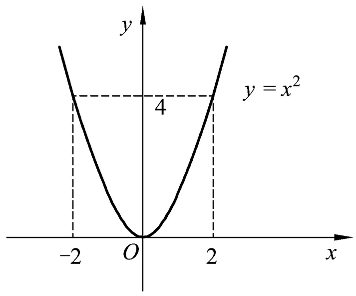

图 1.5

（2）函数的奇偶性．

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数；若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数．

如果函数 $y=f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数，我们则称它为非奇非偶函数．

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称．

例如，函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数，函数 $f(x)=1+x^2$ 是偶函数，函数 $f(x)=0$ 既是奇函数也是偶函数，函数 $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ 是非奇非偶函数．

例 11　符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的图像关于原点对称，它是奇函数．

例 12　取整函数 $y=[x]$ 是非奇非偶函数．

（3）函数的有界性．

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在一个正数 M，使得对于任意的 $x\in(a,b)$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界；否则，称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内无界．若存在一个正数 M，使得对于任意的 $x\in(a,b)$，有 $f(x)\leqslant M$ $(f(x)\geqslant -M)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有上界（有下界），否则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内无上界（无下界）．

函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界，从图形直观地看，其图像介于两条水平直线之间．

例如，对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，其图像如图 1.6 所示．函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，其图像如图 1.7 所示．对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $\mathrm{e}^x>0$，所以 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有下界，其图像如图 1.8 所示．函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 内有上界，无下界，如图 1.9 所示．

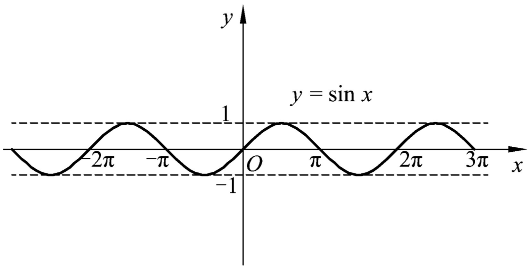

图 1.6

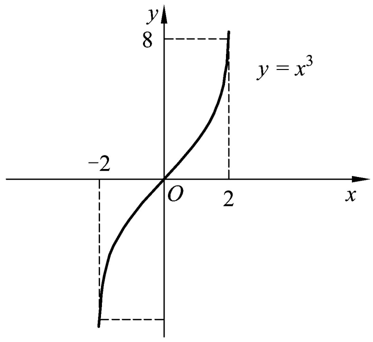

图 1.7

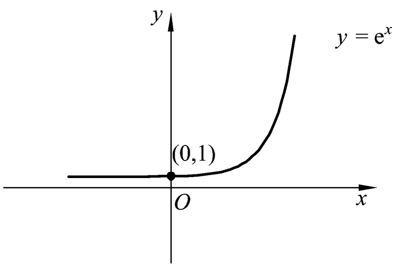

图 1.8

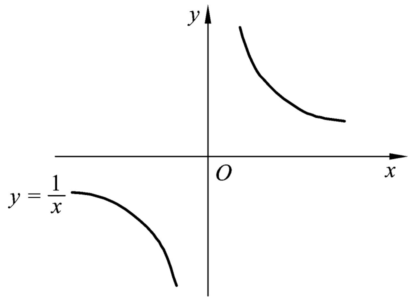

图 1.9

（4）函数的周期性.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在 $T>0$，使得对于任意的 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，满足这个式子的最小正数 T 称为函数的周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的函数；$f(x+2)=f(x)$ 是以 2 为周期的函数.

注：周期函数的最小正周期不一定存在. 例如，常量函数以任意非零实数为周期，它没有最小正周期.

1.1.2　初等函数

1. 基本初等函数

在微积分学中，我们将常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数统称为基本初等函数.

（1）常量函数 $y=c$（c 为常数）.

常量函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，其图像是过点 $(0,c)$ 且平行于 x 轴的一条直线，如图 1.10 所示.

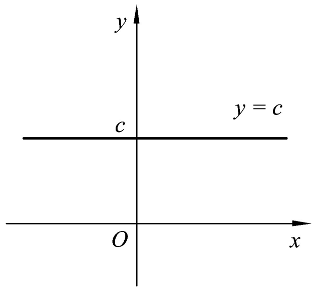

图 1.10

（2）幂函数 $y=x^{\alpha}$ （α 为常数）.

$y=x^{-2}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$；函数有下界，是偶函数；函数在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．其图像如图 1.11 所示．

$y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；函数是奇函数；函数在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上也单调递减．其图像如图 1.12 所示．

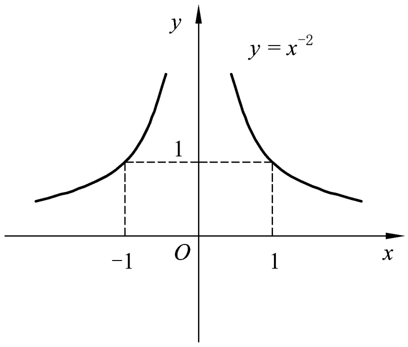

图 1.11

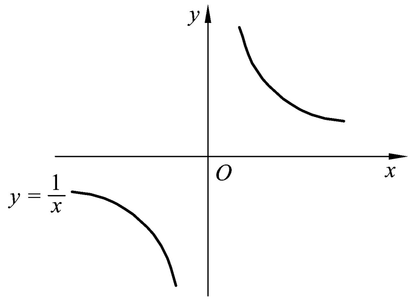

图 1.12

$y=x^2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[0,+\infty)$；函数有下界，是偶函数；函数在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0]$ 上单调递减．其图像如图 1.13 所示．

$y=x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$；函数无界，是奇函数；函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增．其图像如图 1.13 所示．

$y=\sqrt{x}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$；函数有下界，是非奇非偶函数；函数在 $[0,+\infty)$ 上单调递增．其图像如图 1.13 所示．

$y=x^3$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$；函数无界，是奇函数；函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增．其图像如图 1.14 所示．

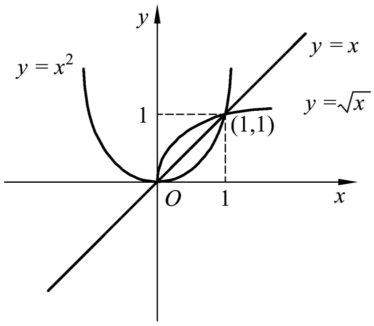

图 1.13

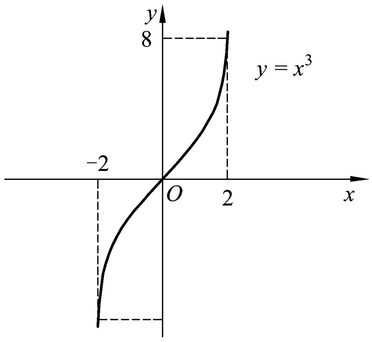

图 1.14

（3）指数函数 $y=a^x$ （$a>0$且$a\neq 1$， a为常数）.

指数函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$(0,+\infty)$．当$0<a<1$时，函数单调减少；当$a>1$时，函数单调增加．其图像如图 1.15 所示.

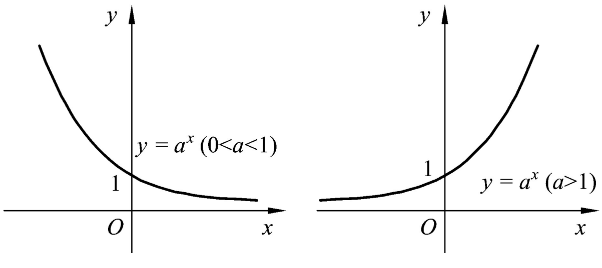

图 1.15

（4）对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0$且$a\neq 1, a$为常数）.

对数函数的定义域是$(0,+\infty)$，值域是$(-\infty,+\infty)$．当$0<a<1$时，函数单调减少；当$a>1$时，函数单调增加．其图像如图 1.16 所示.

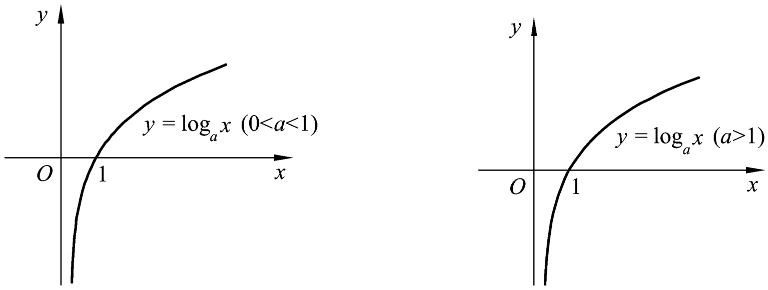

图 1.16

以 10 为底的对数函数称为常用对数，记作$y=\lg x$；以 e 为底的对数函数称为自然对数，记作$y=\ln x$，其中 e 是一个无理数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$.

（5）三角函数.

三角函数包括正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数六种函数.