第 1 章　线性规划基础

1.1　线性规划基础习题

1. 一个建材厂用大理石和水泥生产 A、B、C 三种建材，生产 1 个单位产品所需要的原料见下表。三种产品的单位利润分别为 5、1、4，每月可购进的原料限额分别为大理石 5000 单位、水泥 12000 单位，请建立建材厂获得最大利润的线性规划模型。

建材产品 \ 原料消耗	大理石	水泥
A	2	5
B	2	1
C	4	5

2. 某农户年初承包了 40 公顷土地，并备有生产专用资金 30000 元，该农户安排劳动力的情况为：春夏季 4500 工时、秋冬季 3500 工时。如果有空闲时间，就为别的农户帮工，其收入分别为：春夏季 5 元/工时、秋冬季 4 元/工时。该农户承包的地块只适宜种植大豆、玉米、小麦，已备齐各种生产资料，因此不必动用现金。另外，该农户还饲养奶牛和鸡，每头奶牛每年需投资 5000 元，需要用 1.5 公顷地种植饲草，同时占用劳动力分别为：春夏季 50 工时、秋冬季 100 工时，牛棚最多能容纳 8 头奶牛，每年净收入 4000 元；每只鸡需投资 30 元，每只鸡占用劳动力分别为：春夏季 0.3 工时、秋冬季 0.5 工时，每年净收入 100 元，该农户现有鸡舍最多能容纳 300 只鸡。三种农作物一年需要的劳动力及收入情况见下表，试建立该问题的线性规划模型，确定该农户当年净收入最大的经营方案。

作物种类＼需用工时	春夏季需工时/公顷	秋冬季需工时/公顷	净收入（元）/公顷
A	20	50	500
B	35	75	800
C	10	40	400

3. 某车间有两台机床甲和乙，可用来加工三种工件，假定这两台机床的可用台时数分别为 700 和 800，三种工件的数量分别为 300、500 和 400，用不同机床加工单位数量的不同工件所需的台时数和加工费用如下表所示。试建立既能满足加工工件要求，又使总加工费用最低的机床加工任务的线性规划模型。

机床类型	单位工件所需加工台时			单位工件的加工费用			可用台时数
	工件 1	工件 2	工件 3	工件 1	工件 2	工件 3	
甲	0.4	1.1	1.0	13	9	10	700
乙	0.5	1.2	1.3	11	12	8	800

4. 某公司要从甲、乙两个子公司调出物资，分别供应 A、B、C、D 四个厂商，已知各地的供应量、最小需求量及每吨运费如下表所示。假定运费与运量成正比，试确定总运费最小的调拨方案线性规划模型。

子公司＼厂商	A	B	C	D	供应量
甲	2	5	7	4	2000
乙	5	3	6	8	1100
需求量	1700	1100	200	100	

1.2　线性规划基础习题答案

1. **解：**设 x_1、x_2、x_3 分别为 A、B、C 的产量，则该问题的数学模型为：

$$\max z = 5x_1 + x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 5000 \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 \leqslant 12000 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

2. **解**：设 x_1、x_2、x_3 分别代表大豆、玉米、麦子的种植数（公顷）；x_4、x_5 分别代表奶牛和鸡的饲养数；x_6、x_7 分别代表春夏季和秋冬季多余的劳动力（人/日数），则有：

$$\max z = 500x_1 + 800x_2 + 400x_3 + 4000x_4 + 100x_5 + 5x_6 + 4x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 1.5x_4 \leqslant 40 \\ 5000x_4 + 30x_5 \leqslant 30000 \\ 20x_1 + 35x_2 + 10x_3 + 50x_4 + 0.3x_5 + x_6 \leqslant 4500 \\ 50x_1 + 75x_2 + 40x_3 + 100x_4 + 0.5x_5 + x_7 \leqslant 3500 \\ x_4 \leqslant 8 \\ x_5 \leqslant 300 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{cases}$$

3. **解**：设 x_1、x_2、x_3 分别为在机床甲上加工工件 1、2、3 的数量，x_4、x_5、x_6 分别为在机床乙上加工工件 1、2、3 的数量。根据这三种工件的数量限制，有：

$$x_1 + x_4 = 300\ (\text{对工件 }1),\quad x_2 + x_5 = 500\ (\text{对工件 }2),\quad x_3 + x_6 = 400\ (\text{对工件 }3)$$

再由机床甲和乙的可用总台时限制，有：

$$0.4x_1 + 1.1x_2 + x_3 \leqslant 700\ (\text{机床甲}),\quad 0.5x_4 + 1.2x_5 + 1.3x_6 \leqslant 800\ (\text{机床乙})$$

而总加工费用为：

$$z = 13x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 11x_4 + 12x_5 + 8x_6$$

综上所述，该问题的数学模型为：

$$\min z = 13x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 11x_4 + 12x_5 + 8x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_4 = 300 \\ x_2 + x_5 = 500 \\ x_3 + x_6 = 400 \\ 0.4x_1 + 1.1x_2 + x_3 \leqslant 700 \\ 0.5x_4 + 1.2x_5 + 1.3x_6 \leqslant 800 \\ x_j \geqslant 0,\ \ j = 1,2,3,4,5,6 \end{cases}$$

4. **解**　设 x_{ij} 为从 i 地运到 j 地的物资数量，则各变量在运输表上对应如下：

	A	B	C	D
甲	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
乙	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}

故数学模型为：

$$\min z = 2x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} + 8x_{24}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 2000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1100 \\ x_{11} + x_{21} = 1700 \\ x_{12} + x_{22} = 1100 \\ x_{13} + x_{23} = 200 \\ x_{14} + x_{24} = 100 \\ x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3, 4,\ \text{且} x_{ij} \text{为整数} \end{cases}$$