第一章　概率论的基本概念

第一节　概率论的起源与发展

一、故事三则

概率论起源且发展于日常生活中的问题，下面先介绍三则故事.

（1）一门源于赌博的学科.

三四百年前在欧洲许多国家，贵族之间盛行赌博之风，掷骰子是他们常用的一种赌博方式. 因骰子的形状为小正方体，当它被掷到桌面上时，每个面向上的可能性是相等的，即出现 1 点至 6 点中任何一个点数的可能性是相等的. 有的参赌者就想：如果同时掷两枚骰子，则点数之和为 9 与点数之和为 10，哪种情况出现的可能性较大？

17 世纪中叶，法国一位热衷于掷骰子游戏的贵族德 · 梅耳，发现了这样一个事实：将一枚骰子连掷 4 次至少出现一个 6 点的机会比较多，而同时将两枚骰子掷 24 次，至少出现一次双 6 的机会却很少. 这是什么原因呢？后人称此为著名的德 · 梅耳问题. 后来，又有人提出了“ 分赌注问题 ”：两个人决定赌若干局，事先约定谁先赢得 6 局便算赢家，如果在一个人赢 3 局、另一人赢 4 局时因故终止赌博，应如何分赌本？诸如此类需要计算可能性大小的赌博问题提出了不少，但他们自己无法给出答案.

（2）数学家们“ 参与 ”赌博.

参赌者将他们遇到的上述问题请教当时法国数学家帕斯卡，但帕斯卡没有立即回答，而是把它交给另一位法国数学家费尔马. 之后，他们两个频频通信，互相交流，围绕着赌博中的数学问题开始了深入细致的研究. 这些问题后来又被来到巴黎的荷兰科学家惠更斯获悉，等他回荷兰后，便独立地进行研究.

帕斯卡和费尔马一边亲自做赌博实验，一边仔细分析和计算赌博过程中出现的各种问题，终于完整地解决了“ 分赌注问题 ”，并将此问题的解法向更一般的情况进行推广，从而建立了概率论的一个基本概念 ——数学期望. 数学期望是描述随机变量取值的平均水平的一个量. 而惠更斯经过多年的潜心研究，终于解决了掷骰子过程中的一些数学问题. 1657 年，他将自己的研究成果写成了专著《论掷骰子游戏中的计算》，这本书被认为是迄今为止概率论中最早的论著. 因此可以说，早期概率论的真正创立者是帕斯卡、费尔马和惠更斯，这一时期也被称为组合概率时期，主要计算各种古典概率. 在他们之后，对概率论这一学科做出巨大贡献的是瑞士数学家族 ——贝努利家族的几位成员. 雅可布 · 贝努利在前人研究的基础上，继续分析赌博中的其他问题，给出了“ 赌徒输光问题 ”的详尽解法，并证明了被称为“ 大数

定律”的一个定理. 这是研究等可能性事件的古典概率论中的极其重要的结果. 大数定律的证明是极其困难的，他首先做了大量的实验计算，之后猜想到这一事实，然后为了完善这一猜想的证明，雅可布花了近 20 年的时光. 可以说，雅可布将他的全部心血都倾注到这一数学研究之中，从中他也发展了不少新方法，取得了许多新成果.

1713 年，雅可布的著作《猜度术》出版. 遗憾的是，在他的大作问世之时，雅可布已谢世 8 年之久. 雅可布的侄子尼古拉 · 贝努利也真正地参与了“赌博”，他提出了著名的“圣彼得堡问题”∶甲、乙两人赌博，规定∶甲掷一枚硬币到掷出正面为一局. 若甲掷一次出现正面，则乙付给甲 1 个卢布；若甲第一次掷得反面，第二次掷得正面，乙付给甲 2 个卢布；若甲前两次掷得反面，第三次得到正面，乙付给甲 2^2 个卢布. 一般地，若甲前 $n-1$ 次掷得反面，第 n 次掷得正面，则乙需付给甲 2^{n-1} 个卢布. 问在赌博开始前甲应付给乙多少卢布才有权参加赌博而不使乙方亏损？与尼古拉同时代的许多数学家研究了这个问题，并给出了一些不同的解法，但其结果都是很奇特的，即甲所付的款数竟为无限大. 即不管甲事先拿出多少钱给乙，只要赌博不断地进行，乙肯定是要赔钱的.

(3) 概率问题走出“赌博”，影响了其他学科的发展.

随着 18、19 世纪科学的发展，人们注意到，某些生物以及物理和社会现象都与机会游戏相似，从而将由机会游戏起源的概率论应用到这些领域中，同时也大大推动了概率论本身的发展.

法国数学家拉普拉斯将古典概率论向近代概率论进行了推进，他首先明确给出了概率的古典定义，并在概率论中引入了更有力的数学分析工具，将概率论推向了一个新的发展阶段. 他还证明了“棣莫弗-拉普拉斯定理”，并把棣莫弗的结论推广到一般场合. 另外，他还建立了观测误差理论和最小二乘法. 拉普拉斯于 1812 年出版了他的著作《分析的概率理论》，这是一部继往开来的作品. 这时候人们最想知道的就是概率论是否会有更大的应用价值？是否能有更大的发展空间成为严谨的学科.

概率论在 20 世纪再度迅速地发展起来，是由于科学技术发展的迫切需要. 1906 年，俄国数学家马尔科夫提出了所谓“马尔科夫链”的数学模型. 1934 年，苏联数学家辛钦又提出一种在时间中均匀进行着的平稳过程理论. 那么，如何把概率论建立在严格的逻辑基础之上？这也是从概率论诞生之日起人们就关注的问题，好多数学家也为此进行过尝试，但终因条件不成熟，一直拖了 300 年才得以解决. 20 世纪初完成的勒贝格测度与积分理论以及随后发展起来的抽象测度和积分理论，为概率公理体系的建立奠定了基础. 在这种背景下，柯尔莫哥洛夫于 1933 年在他的《概率论基础》一书中首次给出了概率的测度论式定义和一套严密的公理体系. 他的公理化方法成为现代概率论的基础，也使概率论成为严谨的数学分支.

现在，概率论与以它作为基础的数理统计学科一起，在自然科学、社会科学、工程技术、军事科学及工农业生产等诸多领域中都发挥着不可或缺的作用. 直观来说就是，卫星上天、导弹巡航、飞机制造、宇宙飞船遨游太空等都有概率论的一份功劳；及时准确的天气预报、海洋探险、考古研究等更离不开概率论与数理统计；电子技术发展、影视文化的进步、人口普查及教育等与概率论与数理统计也是密不可分的.

根据概率论中用投针试验估计 π 值的思想产生的蒙特卡罗方法，是一种建立在概率论与数理统计基础上的计算方法. 它借助电子计算机这一工具，在核物理、表面物理、电子学、

生物学、高分子化学等学科的研究中正发挥着重要的作用. 概率论作为理论严谨、应用广泛的数学分支正日益受到人们的重视，并将随着科学技术的发展而得到发展.

二、随机现象

试验，是指在已知某种事物的情况下，为了了解它的性能或者结果而进行的试用操作. 它与实验不同. 人们为了探求大量发生的事件中的一些规律或者特性都会进行一些试验. 例如，抛掷一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上. 然而在一次抛掷过程中，我们却无法预知究竟会出现哪一种结果. 再例如，将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H 和反面 T 出现的情况；抛一枚骰子，观察出现的点数；记录某城市 120 急救电话台一昼夜接到的呼唤次数；在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命；某地一昼夜的最高温度和最低温度，等等. 这些试验在相同的试验条件下是可以重复进行的，而且在每次试验之前我们无法预知这些试验的结果，并且每次试验的结果是唯一和确定的，我们将这类试验现象称为随机现象.

概括起来说，这些试验具有以下几个特点：

（1）可以在相同的条件下重复地进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

（3）在进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中，我们将具有上述三个特点的试验称为随机试验. 本书中以后提到的试验都是指随机试验. 我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

第二节　样本空间、随机事件

一、样本空间和样本点

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点.

例如，设随机试验 E 为“ 抛一枚骰子，观察出现的点数 ”，那么随机试验 E 的样本空间为 S：$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

有些试验有两个或多个可能的样本空间. 例如，从 52 张扑克牌中随机抽出一张，一个可能的样本空间是数字（A 到 K），另外一个可能的样本空间是花色（黑桃，红桃，梅花，方块）.

二、随机事件

事件是一种数学语言，通俗地说就是，事件是事情或者现象. 宇宙间的客观现象是多种多样的，大致分为确定性事件、随机事件和模糊事件三类.

随机事件是在一定条件下，可能发生，也可能不发生的事件. 与确定性事件相比，随机事件是不确定的，因为对这种事件，我们不能确定它是发生还是不发生，即事件的结果是无

法确定的.

在实际中，当进行随机试验时，人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合. 例如，若规定某种灯泡使用的寿命（h）小于 50000 为次品，则在试验 E 中我们关心灯泡的寿命是否满足 $t \geq 50000$. 满足这一条件的样本点组成 S 的一个子集：$A=\{t \mid t \geqslant 50000\}$，我们称 A 为试验 E 的一个随机事件. 显然，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，有 $t \geq 50000$.

一般地，我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，简称事件. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件. 例如，在一个抛三次硬币的试验 E_1 中，试验 E_1 有两个基本事件：正面 $\{\mathrm{H}\}$、反面 $\{\mathrm{T}\}$；而抛骰子的试验 E_2 中，有 6 个基本事件：$\{1\}, \{2\}, \cdots, \{6\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，我们称 S 为必然事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也是样本空间的子集，在每次试验中它都不发生，我们称 $\varnothing$ 为不可能事件.

下面举几个事件的例子.

例 1　在试验 E_1 中，事件 A_1：“ 第一次出现的是 H ”，即

$$A_1=\{\mathrm{HHH}, \mathrm{HHT}, \mathrm{HTH}, \mathrm{HTT}\};$$

事件 A_2：“ 三次出现同一面 ”，即

$$A_2=\{\mathrm{HHH}, \mathrm{TTT}\}.$$

在试验 E 中，事件 A：“ 使用寿命大于 60000 h ” 即

$$A=\{t \mid 0 \leqslant t<60000\}.$$

三、事件间的关系

研究原因：通过对简单事件的了解来掌握较复杂的事件.

研究规则：事件间的关系和运算应该按照集合之间的关系和运算来规定. 即事件间的关系及运算与集合之间的关系及运算是一致的.

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然能够按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“ 事件发生 ”的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A, B, A_k(k=1, 2, \cdots)$是 S 的子集.

1. 子事件或包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，称事件 A 是事件 B 的子事件，记为 $A \subset B$.

一般地有：$\varnothing \subset A \subset \Omega$.

2. 相等事件

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，且若事件 B 发生必然导致事件 A 发生，称事件 A 与事件 B 为相等事件，记为 $A=B$.

即 $B \supset A$ 且 $A \supset B \Leftrightarrow A = B$.

注：事件 A 与事件 B 相等实际上是指事件 A 与事件 B 含有相同的样本点.

例如：在投掷一枚骰子的试验中，事件“ 出现偶数点 ”与事件“ 出现 2,4 或 6 点 ”是相等事件.

3. 和事件或并事件

事件 $A \cup B$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ 或 $x \in B \}$.

即：事件 $A \cup B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 发生或事件 B 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 与 B 至少有一个发生.

称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件 ；

称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件.

4. 积事件或交事件

事件 $A \cap B$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$，积事件 $A \cap B$ 可简记为 AB.

即：事件 $A \cap B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 与事件 B 同时发生.

称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件;

称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积事件.

5. 事件的差

事件 $A - B$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A - B = \{x \mid x \in A 且 x \notin B\}$.

即：事件 $A - B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 发生而事件 B 不发生.

注：$A - B = A - AB$.

例如，在抛硬币试验 E 中，若记 $A = \{\mathrm{HH}, \mathrm{TT}\}$, $B = \{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}\}$，则有

$$A \cup B = \{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TT}\}; \quad A \cap B = \{\mathrm{HH}\}; \quad A - B = \{\mathrm{TT}\}.$$

6. 互斥事件或互不相容事件

若 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的，或互斥的.

即 $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow$ 事件 A 和事件 B 不能同时发生.

注：任一个随机试验 E 的基本事件都是两两互不相容的.

推广：设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足 $A_i A_j = \varnothing \ (i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j)$，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的.

7. 对立事件或互逆事件

若事件 A 和事件 B 中有且仅有一个发生，即 $A \cup B = \Omega,\ AB = \varnothing$，则称事件 A 和事件 B 为

互逆事件或对立事件. 记 A 的对立事件为 $\overline{A}$.

即：事件 $\overline{A}$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 不发生.

即 $A\cap\overline{A}=\varnothing,\ A\cup\overline{A}=\Omega$.

因此，在每次试验中，事件 $A,\overline{A}$ 中必有一个且仅有一个发生，其中 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，所以称事件 A 与 $\overline{A}$ 互逆.

注：互逆事件必为互斥事件，反之，互斥事件未必为互逆事件.

事件的关系与运算可用图 1-1 直观地表示.

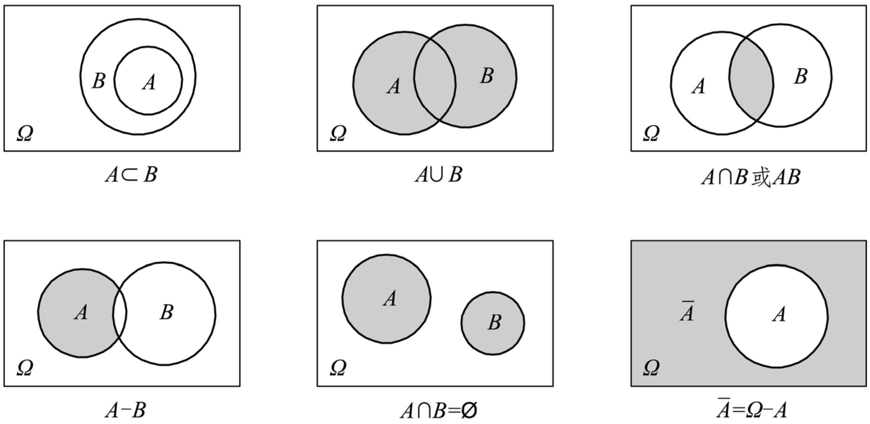

图 1-1

注：事件的运算满足如下基本关系：

(1) $A\cap\overline{A}=\varnothing$， $A\cup\overline{A}=\Omega$， $\overline{A}=\Omega-A$.

(2) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$， $A\cap B=A$.

(3) $A-B=A\cap\overline{B}=A-A\cap B$， $A\cup B=A\cup(B-A)$.

8. 完备事件组

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 是有限或可列个事件，若其满足：

(1) $A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\neq j, i,j=1,2,\cdots;$

(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\Omega$，

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是样本空间的一个完备事件组或一个划分.

注：A 与 $\overline{A}$ 构成一个完备事件组.

例 2　设 A, B, C 为三事件，用 A, B, C 的运算关系表示下列事件.

(1) A 发生，B 与 C 不发生.

表示为：$A\overline{(B\cup C)}$.

(2) A, B 都发生，而 C 不发生.

表示为：$AB\overline{C}$.

(3) A, B, C 中至少有一个发生

表示为：$A+B+C$.

四、随机事件的运算规律

随机事件的运算具有以下规律：

(1) 幂等律：$A\bigcup A=A$, $A\bigcap A=A$.

(2) 交换律：$A\bigcup B=B\bigcup A$, $A\bigcap B=B\bigcap A$.

(3) 结合律：$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$，$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$.

(4) 分配律：$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$，$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

(5) 德摩根（De Morgan）定律：

$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$；

$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A}_i$, $\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A}_i$.

例 3 一名射手向某个目标连续射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标 $(i=1,2,3)$，试用 A_1,A_2,A_3 表示下列各事件.

(1) 前两次射击时至少有一次击中目标；

(2) 第一次击中目标而第二次未击中目标；

(3) 三次射击中，只有第三次未击中目标；

(4) 三次射击中，恰好有一次击中目标；

(5) 三次射击中，至少有一次未击中目标；

(6) 三次射击都未击中目标；

(7) 三次射击中，至少有两次击中目标；

(8) 三次射击中，至多有一次击中目标

解：分别用 $D_i(i=1,2,\cdots,8)$ 表示（1）（2）…（8）中所给出的事件.

(1) $D_1=A_1\bigcup A_2$.

(2) $D_2=A_1\overline{A}_2$ 或 $D_2=A_1-A_2$.

(3) $D_3=A_1A_2\overline{A}_3$.

(4) $D_4=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\bigcup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\bigcup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

(5) $D_5=\overline{A}_1\bigcup\overline{A}_2\bigcup\overline{A}_3$ 或 $\overline{A_1A_2A_3}$.

(6) $D_6=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(7) $D_7=A_1A_2\bigcup A_2A_3\bigcup A_1A_3$.

(8) $D_8=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\bigcup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\bigcup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\bigcup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

例 4 在一个抛三次硬币的试验 E 中，观察正面 T、反面 H 出现的情况. 设这个事件为 A，则它的样本空间 S 为：

{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}.

设 A_1={HHH, HHT, HTH, HTT}，A_2={HHH, TTT}，则事件 A_1 和 A_2 之间的关系为：

$A_1\bigcup A_2=$ {HHH, HHT, HTH, HTT, TTT}；

$A_1\bigcap A_2=$ {HHH}；

$A_2-A_1=$ {TTT}；

$\overline{A_1\bigcup A_2}=$ {THH, TTH, THT}.

课堂练习

1. 设当事件 A 与 B 同时发生时 C 也发生，则（　　）.

（A）$A\cup B$ 是 C 的子事件　　（B）$\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

（C）AB 是 C 的子事件　　（D）C 是 AB 的子事件

2. 设事件 $A=\{$甲种产品畅销，乙种产品滞销$\}$，则 A 的对立事件为（　　）.

（A）甲种产品滞销，乙种产品畅销

（B）甲种产品滞销

（C）甲、乙两种产品均畅销

（D）甲种产品滞销或者乙种产品畅销