

# 第 1 章

## 绪 论

在测量工作中，受测量过程中客观存在的各种因素影响，一切测量结果都不可避免地存在误差。例如，对一段距离进行重复观测时，各次观测的长度总是不完全相同。又如，一个平面三角形三内角之和理论上应等于  $180^\circ$ ，实际上，如果对这三个内角进行观测，其三内角观测值之和一般不等于  $180^\circ$ ，而会存在一定的差异。这种差异的产生，是由于观测值中含有观测误差。于是，研究观测误差的内在规律，对带有误差的观测数据进行数学处理并评定其精确程度等，就成为测量工作中需要解决的重要实际问题。



### 1.1 测量平差基本概念

观测误差产生的原因很多，概括起来主要有以下四个方面。

## 1. 观测者

由于观测者在感觉器官上的鉴别能力有一定的局限性，所以在仪器的安置、照准、读数等方面都会产生误差。同时，观测者的工作态度、技术水平以及情绪的变化，也会对观测成果的质量产生影响。

## 2. 测量仪器

测量是利用测量仪器进行的，由于测量仪器结构的不完善，测量的精密度有一定的限度，使观测值及测量结果产生误差，例如光学经纬仪，理论上要求横轴、视准轴和垂直轴三轴要正交，但实际上不可能严格正交；水准仪的视准轴不平行于水准轴；电磁波测距仪的零位误差、电路延迟；经纬仪、测距仪的度盘刻划误差等。

## 3. 外界环境

观测过程所处的客观环境，如温度、湿度、风力、风向、大气折光、电离层延迟等因素都会对观测结果产生影响；同时，随着这些因素的变化，如温度的高低、湿度的大小、风力的强弱及大气折光的不同，对观测结果的影响也发生变化。在这种多样而变化的外界自然条件下进行观测，就必然使观测结果产生误差。

## 4. 观测对象

观测目标本身的结构、状态和清晰程度等，也会对观测结果直接产生影响，如三角测量中的观测目标觇标和圆筒由于风吹日晒而产生了偏差；GPS 导航定位中的卫星星历误差、卫星钟误差及设备延迟误差等，都会使测量结果产生误差。

上述的观测者、测量仪器、外界环境及观测对象四个方面的因素是使测量产生误差的主要来源，我们把这四个因素合称为测量条件。

显然，测量条件的好坏直接影响着观测成果的质量。测量条件好，产生的观测误差就会小，观测成果的质量就会高；测量条件差，产生的观测误差就会大，观测成果的质量就会低；如果测量条件相同，观测误差的量级应该相同。我们把测量条件相同的观测称为等精度观测，在相同测量条件下所获取的观测值称为等精度观测值；而测量条件不同的观测称为非等精度观测，相应的观测值称为非等精度观测值。

由于测量条件不尽完善，测量误差是客观存在的。为了检验观测结果的精确性和提高观测结果的可靠性，实践中得出的有效方法是进行多余观测（也称过剩观测）。事实上不难发现，当测量足够精细时，同一量的多次观测结果常会有一些的差异。存在固有关系的几个量的观测结果，常会出现某种程度的不符，这就是测量误差存在的反映。测量工作中正是根据这一现象，将反复观测、多方印证即进行多余观测的方法，作为揭示误差、发现错误、提高观测结果质量并进行精度评定的基本手段。

所谓多余观测，就是多于必要观测的观测。如直接测定某一段距离的大小时，不

是只观测一次，而是观测多次，这时，其中一次是必要观测，其他则为多余观测；又如，在测定一个平面三角形的三个内角时，不只是观测任意两角，由此推算第三角，而是三个角都观测，这时，有两个是必要观测，另一个是多余观测。

多余观测可以揭示测量误差，但多余观测又使观测结果产生了矛盾，如平面三角形三内角观测值之和不等于  $180^\circ$ ，即闭合差不等于零。为了消除矛盾，必须对观测结果进行平差，为此我们给出测量平差的基本概念。在多余观测的基础上，依据一定的数学模型和某种平差原则，对观测结果进行合理的调整，从而求得一组没有矛盾的最可靠结果，并评定精度，这一过程称为平差。测量平差所依据的原则为最小二乘原理。

设  $L_1, L_2, \dots, L_n$  表示  $n$  个独立的等精度观测结果，为消除矛盾而赋予观测结果对应的改正数为  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ，在  $L_1, L_2, \dots, L_n$  可信赖程度相同，即等精度情况下，最小二乘原理要求这些改正数的平方和为最小，即

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \min \quad (1.1)$$

若令

$$\mathbf{V} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)^T$$

这里上标 T 指矩阵的转置，则式 (1.1) 又可表示为

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \min$$

更为一般地，当观测值  $L_1, L_2, \dots, L_n$  的可信赖程度不同，即非等精度情况，而且顾及它们之间内在的关联时，最小二乘原理可表示为

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \min \quad (1.2)$$

式中

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & \frac{1}{p_{12}} & \dots & \frac{1}{p_{1n}} \\ \frac{1}{p_{21}} & \frac{1}{p_2} & \dots & \frac{1}{p_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{p_{n1}} & \frac{1}{p_{n2}} & \dots & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \quad (1.3)$$

这里  $\mathbf{P}$  称为观测结果的权阵， $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$  称为对应的权逆阵。权阵中的  $p_i$  是反映观测结果之间相对精确程度的数值，称为对应观测结果  $L_i$  的权；权阵中的  $p_{ij}$  与观测结果间关联的状况有关，称为观测结果的相关权。

当式 (1.3) 中的  $\frac{1}{p_{ij}} = 0$  时, 即

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

则式 (1.2) 可写为

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = \min$$

又若式 (1.4) 中的  $p_i$  都为 1, 则权阵  $\mathbf{P}$  为单位阵, 即

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

这时式 (1.2) 则变为式 (1.1).

$\mathbf{P}$  为单位阵或对角阵时, 表明观测结果  $L_1, L_2, \dots, L_n$  之间是相互独立的.

依最小二乘原理, 平差计算所得的观测值改正数, 称为最或然改正数 (有时简称为改正数), 也称残差; 经最小二乘原理平差计算求得的有关量的最可靠值, 称为该量的最或然值, 或者最似然值、最佳值, 又称平差值.

不仅是通过观测直接或间接得到的数据要进行平差处理, 有时对于一些已平差过的值也要进行再平差处理. 因此参加平差的数据不仅包括直接观测值, 还包括间接观测值和在一定范围内已进行过平差的数据, 今后无特别注明, 概括地称它们为观测值.

## 1.2 测量误差分类

根据观测误差对测量结果的影响性质的不同, 测量误差可分为粗差、系统误差、偶然误差三类.

### 1. 粗差

粗差主要是由失误引起的, 一般以异常值或孤值的形式表现出来, 如测错、读错、

记录错、计算错、仪器故障等所引起的偏差。经典测量中，一般采取变更仪器或操作程序、重复观测和检核算、分析等方式，检出粗差并予以剔除。因此，可以认为观测值中已基本没有粗差。现代测量中，观测过程中的电子化、自动化程度日益提高，观测数据自动记录、自动传输和计算，粗差的检测和分析，已成为一个重要问题。所以，在观测方案的设计和实施、观测中的检核以及观测后的分析处理中，采取有效措施进行粗差的探测和消除是非常重要的。

## 2. 系统误差

由测量条件中某些特定因素的系统性影响而产生的误差称为系统误差。同等测量条件下的一系列观测中，系统误差的大小和符号常常固定不变，或呈系统性变化。对于一定的测量条件和作业程序，系统误差在数值上服从一定的函数性规律。

测量条件中能引起系统误差的因素有许多。如，在天文测量中，由于观测者的习惯，观测者误以目标偏于某一侧为恰好照准，使观测成果带有的系统误差，称为人差，由观测者的影响所致；又如，用带有一定误差的尺子量距，使观测结果带有的系统误差，属于仪器误差；再如，风向、风力、温度、湿度、大气折射、地球弯曲等外界因素，也都可能引起系统误差。

系统误差对观测结果的影响一般具有累积性，它对观测成果质量的影响也很显著。所以在测量结果中，应尽量消除或减弱系统误差对观测成果的影响。为达到这一目的，通常采取如下措施：

(1) 找出系统误差出现的规律并设法求出它的数值，然后对观测结果进行改正。例如，尺长改正、经纬仪测微器行差改正、折光差改正等。

(2) 改进仪器结构并制订有效的观测方法和操作程序，使系统误差按数值接近、符号相反的规律交错出现，从而在观测结果的综合中实现较好的抵消。例如，经纬仪按度盘的两个相对位置读数的装置、测角时纵转望远镜的操作方法、水准测量中前后视尽量等距的设站要求以及高精度水平角测量中日、夜的测回数各为一半的时间规定等。

(3) 综合分析观测资料，发现系统误差，在平差计算中将其消除。

从测量结果中完全消除系统误差是不可能的，实际上只能尽量将它们的影响减至最低。在具体测量工作中，对于系统误差所引起的问题如何处理，将在各有关专业课中予以讨论，经典平差中不多涉及这方面内容。作为平差对象的观测数据，一般均被认为已经消除了系统误差。

## 3. 偶然误差

由测量条件中各种随机因素的偶然性影响而产生的误差称为偶然误差。偶然误差的出现，就单个而言，无论数值还是符号都无规律性，而对于大量误差的总体，却存在一定的统计规律。

整个自然界都在永不停顿地运动着，即使看起来相同的测量条件，也时刻有不规

则的变化，这种不断的偶然性变化，就是引起偶然误差的随机因素。偶然误差是许多随机因素影响所致的小误差的代数和。例如，用经纬仪测角时，测角误差主要由照准、读数等引起的误差所构成，而这里的每项误差又由许多随机因素所致。如其中的照准误差，就可能是受到脚架或觇标晃动及扭转、风力风向变化、目标背景、大气折光与大气透明度等的影响，而这里的任何一种影响又都是产生于许多偶然因素。可见，测角误差是许许多多微小误差的代数和，而每一项微小误差又随着偶然因素影响的变化而变化，其数值可大可小，符号或正或负。因此，测量中数不清的受偶然因素影响而产生的小误差，它们的大小和正负，我们既不能控制也不能事先预知，当然由它们的代数和所构成的偶然误差的数值大小和符号正负也是偶然的。

在一切测量中，偶然误差是不可避免的。经典最小二乘平差就是在认为观测值仅含有偶然误差的情况下，调整误差、消除矛盾，求出最或然值，并进行精度评定。

### 1.3 测量平差简史

18 世纪末，在天文学、大地测量学以及与观测自然现象有关的其他科学领域中，常常提出这样的问题，即如何消除由观测误差引起的观测值之间的矛盾，从多于待估量的观测值中求出待估量的最优值。当时各国许多科学家都开始研究这一课题。

1794 年，年仅 17 岁的高斯 (C. F. Gauss) 首先提出了解决这个问题的方法——最小二乘法 (Least Square)。他以算术平均值为待求量的最或然值，假设观测误差服从正态分布从而导出了最小二乘原理。1801 年，天文学家对刚发现的谷神星运行轨道的一段弧长进行了一系列观测，后来因故中止了观测。对此，需要根据这些极其有限且带有误差的观测结果求出该星运行的实际轨道，高斯用自己提出的最小二乘法解决了当时这个难题，对谷神星运行轨道进行了预报，天文学家才及时找到了这颗彗星。但高斯并没有及时行文发表他所提出的最小二乘法。直到 1809 年，高斯才在《天体运动的理论》一文中，从概率的观点详细叙述了他所提出的最小二乘原理。而在此之前，1806 年，勒戎德尔 (A. M. Legendre) 发表了《决定彗星轨道新方法》一文，从代数的观点独立地提出了最小二乘法，并定名为最小二乘法。所以，后人称它为高斯-勒戎德尔方法。

自高斯 1794 年提出最小二乘原理到 20 世纪五六十年代的一百多年来，许多学者对测量平差的理论和方法进行了大量的研究，提出了一系列解决各类测量问题的平差方法。这些平差方法大都是基于观测值随机独立的高斯最小二乘原则，所以一般被称为经典最小二乘平差。这一时期，由于计算工具的限制，测量平差的主要研究方向是如何求解线性方程组。许多分组解算线性方程组的方法的提出，如克吕格分组平差、赫尔默特分区平差等，都是为了使解算方程组变得简单。

自 20 世纪六七十年代开始，测量工程的精密化和现代化，特别是电子计算机、矩阵代数、泛函分析、最优化理论和概率统计在测量平差中的广泛应用，对测量平差的理

论和实际产生了深刻影响,测量平差得到了很大发展,出现了许多新的平差理论和方法.

## 1. 相关平差

1947年,田斯特拉(T. M. Tienstra)提出相关观测值的平差理论,将经典平差中对观测值随机独立的要求推广到随机相关的观测值.随着相关平差的出现,观测值的概念广义化了,不仅随机独立的直接观测值可以作为平差元素,而且它的导出量,如随机独立直接观测值的函数或任何一种初步平差的结果都可作为平差元素.相关平差对测量平差的理论研究有重大的促进作用,并将经典的最小二乘平差推向了更广泛的应用领域.

## 2. 最小二乘滤波、推估和配置

高斯的最小二乘法所选平差参数假设是非随机变量.随着测量技术的进步,需要解决观测量和平差参数均为随机变量的平差问题.20世纪60年代,产生了顾及随机参数的最小二乘平差方法——最小二乘滤波、推估和配置,它起源于最小二乘内插和外推重力异常的平差问题,由克拉鲁普(T. Krarup)于1969年提出.克拉鲁普把推估重力异常的方法推广到利用重力异常场中不同类型的数据,如重力异常、垂线偏差等,去估计重力异常场中的任一元素,如扰动位、大地水准面差距等,从而提出了最小二乘滤波、推估和配置,也称拟合推估法.莫里兹(H. Moritz)对比进行了系统研究,提出了带系统参数的最小二乘配置,并概述了这种方法在大地测量其他方面的应用.1972年,克劳斯(H. Krauss)将这一方法引入到航空摄影测量中.

## 3. 秩亏自由网平差

高斯的最小二乘平差法是一种满秩平差问题,即间接平差的函数模型的系数阵是列满秩阵,权矩阵和权逆阵(协方差阵)也是满秩方阵,方程有唯一解.1962年,迈塞尔(P. Meissl)从测量平差观点,将高斯最小二乘平差模型中列满秩的系数阵推广到奇异阵,提出了解决非满秩平差问题的秩亏自由网平差方法.1964年,高德曼(A. J. Goldmen)和蔡勒(M. Zelen)将满秩权逆阵扩展到奇异阵,提出具有奇异权逆阵的最小二乘平差方法.1971年,劳(C. R. Rao)综合了各种可能情况,得出了广义高斯-马尔可夫平差模型,并把广义高斯-马尔可夫模型的参数估计称为最小二乘统一理论.现经众多学者的深入研究,已形成一整套秩亏自由网平差的理论体系和多种解法,并广泛应用于测量实践.

## 4. 方差-协方差分量估计

关于经典平差,人们一直致力于平差函数模型的研究工作.随着新技术的不断发展和应用,测量平差的对象已从过去单一同类观测量扩展为不同类、多种、不同精度的观测量.因此,经典平差中的定权理论和方法必须革新,许多学者致力于将经典的

先验定权方法改进为后验定权方法的研究工作,提出了多种方差-协方差分量的验后估计法.到20世纪80年代,方差-协方差分量估计理论已经形成并得到广泛应用.方差-协方差分量的验后估计主要有三种: Helmert 型方差-协方差分量估计法、方差分量的最小范数二次无偏估计法( Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimator),简称 MINQUE 法和方差分量的极大似然估计法.

## 5. 系统误差和粗差的处理方法

观测误差按性质不同可分为粗差、系统误差和偶然误差三种.经典最小二乘平差仅讨论含有偶然误差的观测值.实际上,在平差前完全剔除粗差和消除系统误差的影响是不可能的.随着测量精度的不断提高,对平差结果的精度要求也越来越高,出现了通过平差剔除粗差和消除系统误差影响的平差方法.

## 6. 有偏估计的相关知识

当观测值严格服从正态分布,平差模型方程中的系数阵满秩且无病态的情况下,参数的最小二乘估计在所有无偏估计类中方差最小.但是,在实际测量中,有时因参数很多,参数间难免存在近似的线性关系,或因图形结构较差,导致观测方程系数阵的列向量呈近似的线性相关.例如,在 GPS 定位中,相位观测值误差方程中,点位参数的系数阵之间呈近似的线性相关,这种近似线性关系通常称为复共线关系,我们称这样的设计阵为病态矩阵.当设计阵呈病态时,法方程系数阵接近奇异,这时虽然最小二乘估计的方差在线性无偏估计类中最小,但其值很大,使得最小二乘估计的精度比较差,表现出相当的不稳定,参数求解过程对观测误差相当敏感.于是20世纪70年代,许多学者致力于改进最小二乘估计,提出了许多新的估计,其中很重要的一类估计就是有偏估计,如岭估计、广义岭估计、主成分估计和 Stein 压缩估计等.

总之,自20世纪70年代以来,随着现代测量新技术的应用,如 GPS、GIS 和 RS 在测绘中的应用,测量平差理论和方法得到了飞速发展,出现了许多新的测量数据处理理论和方法,也推动了测量平差理论的发展.



## 1.4 本书的主要内容

由测量平差的基本概念可知,测量平差的主要任务有两个:一是依据最小二乘原理求出待定量最可靠值;二是评定观测结果和平差结果的精度.本课程“误差理论与测量数据处理原理方法”的主要任务是系统介绍最小二乘法与测量平差的基本理论和基本方法,为以后的专业课学习以及进一步学习和研究测量平差打下坚实基础.其主要内容为:

(1) 偶然误差理论.包括偶然误差的概率特性、精度指标、中误差和权的定义、方差阵及权逆阵的传播规律等.



(2) 测量平差函数模型和随机模型的概念及建立, 参数估计概念及最小二乘原理.

(3) 测量平差基本方法. 介绍条件平差方法、附有参数的条件平差方法, 间接平差方法、附有限制条件的间接平差方法等.

(4) 误差椭圆的相关知识.

(5) 测量数据的统计假设检验方法.

最后, 简要介绍一些现代测量平差理论和方法, 以便与以后的测量平差课程相连接, 为进一步学习与研究这种理论和方法打下基础.