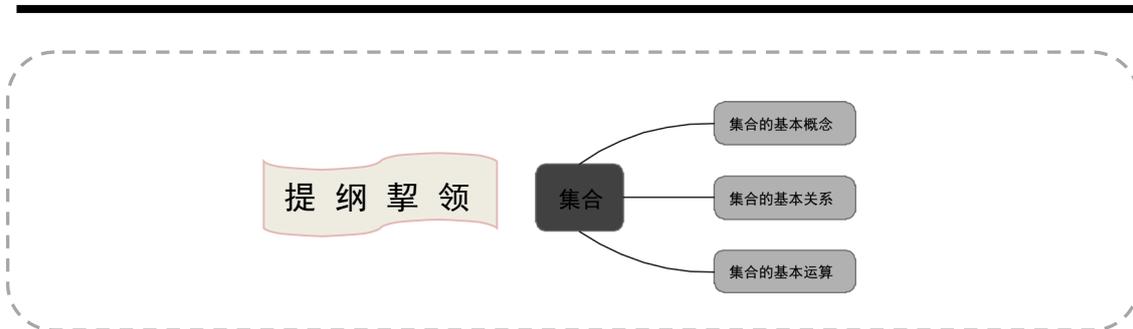


第一部分 复习专题



复习专题一 集 合



知识建档 ◆ 快速扫描

1. □ □ □ □ □

- (1) 集合元素的三个特征：_____、_____、_____。
- (2) 元素与集合的关系是_____或_____关系，用符号_____或_____表示。
- (3) 集合的表示法：_____、_____、_____。
- (4) 常见数集的记法

集合	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号					

2. □ □ □ □ □ □ □ □ □

(1) 集合关系图解

关系	韦恩(Venn)图表示	符号表示
子集		真子集 $A \subsetneq B$
_____		集合相等 $A = B$

(2) 不含任何元素的集合叫做_____，记作_____，并规定空集是任何集合的_____，是任何非空集合的_____。

3. □ □ □ □ □ □ □ □ □

	集合的并集	集合的交集	集合的补集
图形语言			

突破考点★典例精讲

◎ 考点一 集合的基本概念

- 典例** 11. 已知集合 $M = \{1, m+2, m^2+4\}$, 且 $5 \in M$, 则 m 的值为().
- A. 1 或 -1 B. -1 或 3 C. 1 或 3 D. 1, -1 或 3
12. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | y = x\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为().
- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0
13. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\} = \{a^2, a+b, 0\}$, 则 $a^{2022} + b^{2022}$ 的值为().
- A. 1 B. 0 C. -1 D. ± 1

◎ 考点二 集合间的基本关系

- 典例** 14. 设集合 $P = \{x | x > 1\}$, $Q = \{x | x^2 - x > 0\}$, 则下列结论正确的是().
- A. $P \subseteq Q$ B. $Q \subseteq P$ C. $P = Q$ D. $P \cap Q = \mathbf{R}$
15. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | 0 < x < 5, x \in \mathbf{N}\}$, 则满足条件 $A \subseteq C \subseteq B$ 的集合 C 的个数为().
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
16. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{x | -m < x < m\}$, 若 $B \subseteq A$, 则 m 的取值范围为_____.

◎ 考点三 集合的基本运算 (高频考点)



注意

集合的基本运算是历年重庆市分类考试的热点, 每年必考, 常和不等式的解集、函数的定义域、值域相结合命题, 主要以选择题的形式出现. 试题难度不大, 为低档题.

高职分类考试对集合运算的考查主要有以下两个命题角度:

- (1) 求集合间的交、并、补运算;
- (2) 已知集合的运算结果求参数的值(或参数的取值范围).

- 典例** 17. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 0, 2, 3\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} | -1 < x < 2\}$, 则 $(A \cap B) \cap C =$ ().
- A. $\{-1, 1\}$ B. $\{0, 1\}$
- C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{2, 3, 4\}$
18. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x \leq 1\}$, $B = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $A \cap B =$ ().
- A. \emptyset B. $\{x | 2 < x < 3\}$
- C. $\{x | 2 \leq x < 3\}$ D. $\{x | -1 < x \leq 2\}$

A. \emptyset B. $\{1, 3\}$ C. $\{2, 4, 5\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

34. 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, a^2 + 3\}$, 若 $A \cap B = \{1\}$, 则实数 a 的值为_____.

35. 设全集 $I = \mathbf{R}$, 已知集合 $M = \{x | (x + 3)^2 = 0\}$, $N = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$.

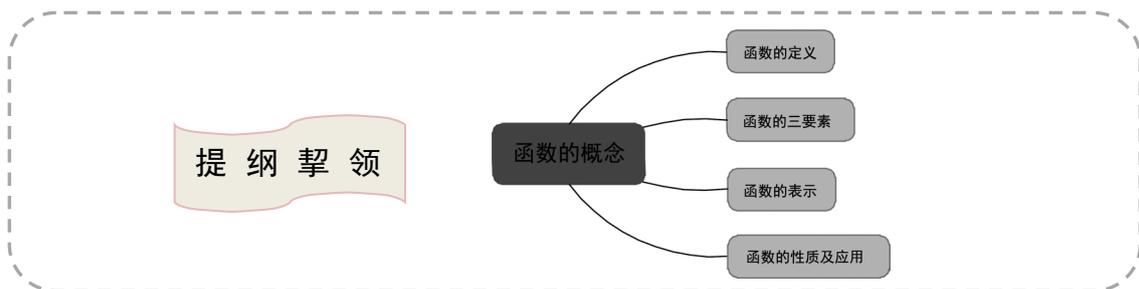
(1) 求 $(\complement_I M) \cap N$;

(2) 记集合 $A = (\complement_I M) \cap N$, 已知集合 $B = \{x | a - 1 \leq x \leq 5 - a, a \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B = A$, 求实数 a 的取值范围.

36. 若集合 $A = \{x | x^2 + ax + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{1, 2\}$, 且 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

复习专题二 基本初等函数

复习专题 2.1 函数的基本概念



知识建档 ◆ 快速扫描

1. □ □ □ □ □ □ □ □

	函数	映射
两集合 A, B	设 A, B 是两个非空的_____	设 A, B 是两个非空的_____
对应关系 $f: A \rightarrow B$	按照某种确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的一个数 x , 在集合 B 中都有_____数 $f(x)$ 和它对应	按某一个确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的一个元素 x , 在集合 B 中都有元素 y 与之对应
名称	称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个_____	称对应 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个_____
记法	_____ ($x \in A$)	对应 $f: A \rightarrow B$ 是一个_____

2. □ □ □ □ □ □ □ □

(1) 函数的定义域、值域：

在函数 $y=f(x)$, $x \in A$ 中, x 叫做_____, x 的取值范围 A 叫做函数的_____；与 x 的值相对应的 y 值叫做_____, 函数值的集合 $\{f(x)|x \in A\}$ 叫做函数的_____. 显然, 值域是集合 B 的_____.

(2) 函数的三要素：_____、_____和_____.

(3) 相等函数：如果两个函数的_____和_____完全一致, 则这两个函数_____, 这是判断两函数相等的依据.

(4) 函数的表示法.

表示函数的常用方法有：_____、_____、_____。

3. □ □ □ □

若函数在其定义域的_____上，因对应关系_____而分别用_____来表示，这种函数称为_____函数。

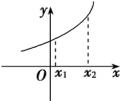
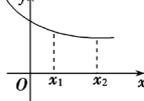
4. □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

- (1) 分式函数中分母_____。
- (2) 偶次根式函数被开方式_____。
- (3) 一次函数、二次函数的定义域为_____。
- (4) $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, 定义域均为_____。
- (5) $y = \tan x$ 的定义域为_____。

5. □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

- (1) $y = kx + b (k \neq 0)$ 的值域是_____。
- (2) $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的值域是：
当 $a > 0$ 时，值域为_____；当 $a < 0$ 时，值域为_____。
- (3) $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的值域是_____。
- (4) $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的值域是_____。
- (5) $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的值域是_____。
- (6) $y = \sin x$, $y = \cos x$ 的值域是_____。
- (7) $y = \tan x$ 的值域是_____。

6. □ □ □ 、 □ □ □

	增函数	减函数
定义	一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I . 如果对于定义域 I 内某个区间 A 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有_____, 那么就称函数 $f(x)$ 在区间 A 上是增加的	当 $x_1 < x_2$ 时, 都有_____, 那么就称函数 $f(x)$ 在区间 A 上是减少的
图像描述	 自左向右看图像是_____	 自左向右看图像是_____

7. □ □ □ 、 □ □ □ □ □ □ □ □

若函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上是_____或_____, 则称函数 $y = f(x)$ 在这一区间上具有(严格的)单调性, 区间 D 叫做 $y = f(x)$ 的_____。

8. □ □ □ □ □

前提	设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 如果存在实数 M 满足
----	--

条件	(1) 对于任意 $x \in I$, 都有_____ ; (2) 存在 $x_0 \in I$, 使得_____	(1) 对于任意 $x \in I$, 都有_____ ; (2) 存在 $x_0 \in I$, 使得_____
结论	M 为_____值	M 为_____值

9. □ □ □ □ □ □

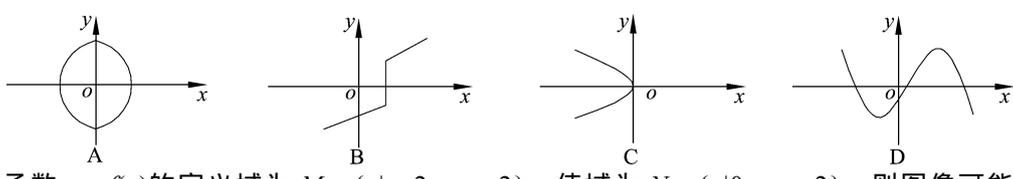
奇偶性	定义	图像特点
偶函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x , 都有_____, 那么函数 $f(x)$ 是偶函数	关于_____轴对称
奇函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x , 都有_____, 那么函数 $f(x)$ 是奇函数	关于_____对称

10. □ □ □

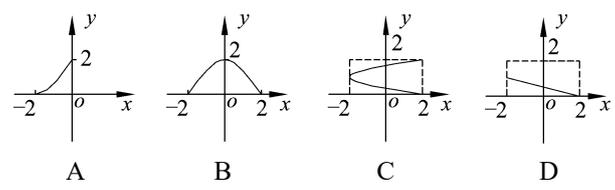
- (1) 周期函数：对于函数 $y = f(x)$, 如果存在一个非零常数 T , 使得当 x 取定义域内的任何值时, 都有_____, 那么就称函数 $y = f(x)$ 为_____函数, 称_____为这个函数的周期.
- (2) 最小正周期：如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个_____正数, 那么这个_____就叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

自测温故 ☆ 知己知彼

1. 下列图形可以表示函数 $y = f(x)$ 图像的是().



2. 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 值域为 $N = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$, 则图像可能是().



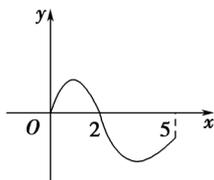
3. 函数 $f(x) = \log_2(x + 1)$ 的定义域为().
 A. $(0, +\infty)$ B. $[-1, +\infty)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

4. $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是().
 A. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ 与 $g(x) = \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 1}$
 B. $f(x) = x$ 与 $g(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$
 C. $y = x$ 与 $y = (\sqrt{x})^2$
 D. $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$

20. 函数 $y = x^2 - 6x + 10$ 在区间 $(2, 4)$ 上().
 A. 递减 B. 递增 C. 先递减后递增 D. 先递增后递减
21. 下列函数中, 定义域是 \mathbf{R} 且为增函数的是().
 A. $y = e^{-x}$ B. $y = x^3$ C. $y = \ln x$ D. $y = |x|$
22. 函数 $f(x) = 2x^2 - mx + 3$, 当 $x \in [-2, +\infty)$ 时是增函数, 当 $x \in [-\infty, -2]$ 时是减函数, 则 $f(1)$ 等于().
 A. -3 B. 13 C. 7 D. 5
23. 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $x \in [2, 6]$, 则 $f(x)$ 的最大值为 _____, 最小值为 _____.
24. 函数 $f(x) = x^2 - 2x$ ($x \in [-2, 4]$) 的单调增区间为 _____; $f(x)_{\max} =$ _____.
25. 函数 $f(x) = \log_5(2x+1)$ 的单调增区间是 _____.
26. 若函数 $f(x) = 8x^2 - 2kx - 7$ 在 $[1, 5]$ 上为单调函数, 则实数 k 的取值范围是().
 A. $(-\infty, 8]$ B. $[40, +\infty)$
 C. $(-\infty, 8] \cup [40, +\infty)$ D. $[8, 40]$
27. 函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbf{R}$) 的值域是().
 A. $(0, 1)$ B. $(0, 1]$ C. $[0, 1)$ D. $[0, 1]$
28. 设函数 $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ 在区间 $[3, 4]$ 上的最大值和最小值分别为 M, m , 则 $\frac{m^2}{M} =$ _____.
29. 下列函数为偶函数的是().
 A. $f(x) = x - 1$ B. $f(x) = x^2 + x$
 C. $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ D. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$
30. 已知 $f(x) = ax^2 + bx$ 是定义在 $[a-1, 2a]$ 上的偶函数, 那么 $a+b$ 的值是().
 A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
31. 设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则正确的是().
 A. $f(x)g(x)$ 是偶函数 B. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数
 C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数 D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数
32. 设函数 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = \log_2 x$, 则 $f(-\sqrt{2}) =$ ().
 A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2
33. 函数 $y = f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$, 则当 $x > 0$ 时, $f(x) =$ ().
 A. -2^x B. 2^{-x} C. -2^{-x} D. 2^x
34. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = -f(x+2)$, 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = 2^x + \log_2 x$, 则 $f(2019) =$ ().
 A. 5 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2
35. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的周期为 2 的函数, 当 $x \in [-1, 1)$ 时, $f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 2, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \end{cases}$
 则 $f\left(\frac{3}{2}\right) =$ _____.

36. 设函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 对任意实数 x 有 $f\left(\frac{3}{2}x\right) = -f\left(\frac{3}{2}x\right)$ 成立, 其周期 $T =$ _____.

37. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5, 5]$, 若当 $x \in [0, 5]$ 时, $f(x)$ 的图像如图所示, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 _____.



38. 若函数 $f(x) = x^3\left(\frac{1}{2^x - 1} + a\right)$ 为偶函数, 则 a 的值为 _____.

39. 若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 $2T$ 也是 $f(x)$ 的周期;

若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 $\frac{T}{2}$ 也是 $f(x)$ 的周期;

已知 x_0 为 $y = f(x)$ 定义域上的某一个值, T 是非零常数, 若 $f(x_0 + T) = f(x_0)$, 则 T 是 $y = f(x)$ 的周期.

以上叙述中, 正确的个数是().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

40. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$. 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50) =$ ().

A. -50

B. 0

C. 2

D. 50

突破考点★典例精讲

◎ 考点一 函数的基本概念

典例 41. 下面各组函数中为相同函数的是().

A. $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$, $g(x) = x-1$ B. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $g(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$

C. $f(x) = \ln e^x$ 与 $g(x) = e^{\ln x}$

D. $f(x) = x^0$ 与 $g(x) = \frac{1}{x^0}$

42. 有以下判断:

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ 与 $g(x) = \begin{cases} 1, & (x > 0) \\ -1, & (x < 0) \end{cases}$ 表示同一函数; 函数 $y = f(x)$ 的图像与直线 $x = 1$ 的交点最

多有 1 个; $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 与 $g(t) = t^2 - 2t + 1$ 是同一函数; 若 $f(x) = |x-1| - |x|$, 则 $f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 0$.

其中正确判断的序号是 _____.

◎ 考点二 函数的定义域



函数的定义域是使函数有意义的自变量取值的集合, 归纳起来常见的命题探究角度有:

(1) 求给定函数解析式的定义域.

(2) 求复合函数的定义域；若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$ ，其复合函数 $f(g(x))$ 的定义域由不等式 $a \leq g(x) \leq b$ 求出；若已知函数 $f(g(x))$ 的定义域为 $[a, b]$ ，则 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 上的值域。

(3) 已知定义域，确定参数取值的问题。

典例 43. 函数 $y = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x}$ 的定义域是()。

A. $[-1, 0) \cup (0, 1)$

B. $[-1, 0) \cup (0, 1]$

C. $(-1, 0) \cup (0, 1]$

D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

44. 若函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 3]$ ，则函数 $g(x) = \frac{f(3x)}{x-1}$ 的定义域是()。

A. $[0, 1)$

B. $[0, 1]$

C. $[0, 1) \cup (1, 9]$

D. $(0, 1)$

45. 已知函数 $y = f(2x-1)$ 的定义域是 $[0, 1]$ ，则函数 $\frac{f(2x+1)}{\log_2(x+1)}$ 的定义域是()。

A. $[1, 2]$

B. $(-1, 1]$

C. $[-\frac{1}{2}, 0]$

D. $(-1, 0)$

46. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) > 1$ 的 x 的取值范围是_____。

◎ 考点三 函数的解析式



求函数解析式的常用方法：

(1) 待定系数法。

先设出含有待定系数的解析式，再利用恒等式的性质，或将已知条件代入，建立方程(组)，通过解方程(组)求出相应的待定系数。

(2) 换元法。

对于形如 $y = f(g(x))$ 的函数解析式，令 $t = g(x)$ ，从中求出 $x = \varphi(t)$ ，然后代入表达式求出 $f(t)$ ，再将 t 换成 x ，得到 $f(x)$ 的解析式，要注意新元的取值范围。

(3) 配凑法。

由已知条件 $f(g(x)) = F(x)$ ，可将 $F(x)$ 改写成关于 $g(x)$ 的表达式，然后以 x 替代 $g(x)$ ，便得 $f(x)$ 的解析式。

(4) 解方程组法。

已知关于 $f(x)$ 与 $f(\frac{1}{x})$ 或 $f(-x)$ 的表达式，可根据已知条件再构造出另外一个等式组成方程组，通过解方程组求出 $f(x)$ 。

47. 已知函数 $f(x+2) = x^2$ ，则 $f(x) =$ _____。

48. 已知二次函数 $f(2x+1) = 4x^2 - 6x + 5$ ，求 $f(x)$ 。

49. 定义在 $(-1, 1)$ 内的函数 $f(x)$ 满足 $2f(x) - f(-x) = \lg(x+1)$, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

50. 已知 $f(x)$ 满足 $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$, 求 $f(x)$ 的解析式.

考点四 分段函数

 对分段函数的考查主要有以下三个命题角度:

- (1) 由分段函数解析式, 求函数值(或最值);
- (2) 由分段函数解析式与方程, 求参数的值;
- (3) 由分段函数解析式, 求解不等式.

典例 51. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ 2^x, & x < 0, \end{cases}$ 则 $f(f(-2)) =$ _____.

52. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 2, & x \leq 1, \\ -\log_2(x+1), & x > 1, \end{cases}$ 且 $f(a) = -3$, 则 $f(6-a) =$ ().

- A. $-\frac{7}{4}$ B. $-\frac{5}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

53. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x - 7, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & x \geq 0, \end{cases}$ 若 $f(a) < 1$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

考点五 函数的值域

 求函数值域, 常用的方法有:

- (1) 观察法; (2) 配方法; (3) 换元法; (4) 分离常数法; (5) 单调性法; (6) 数形结合法.
特别注意定义域对值域的制约作用.

典例 54. 求下列函数的值域.

(1) $y = x^2 + 4x (x \in [-1, 4])$;

(2) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(3) $y = x + \frac{4}{x} (x < 0)$;

(4) $f(x) = x - \sqrt{1-2x}$.

考点六 函数的单调性 (高频考点)



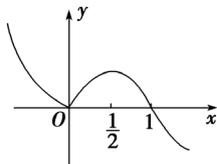
在公共定义域内：

- (1) 函数 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x) + g(x)$ 是增函数;
- (2) 函数 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) + g(x)$ 是减函数;
- (3) 函数 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 是增函数;
- (4) 函数 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x) - g(x)$ 是减函数;
- (5) 若 $k > 0$, 则 $kf(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相同; 若 $k < 0$, 则 $kf(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相反;
- (6) 函数 $y = f(x)(f(x) > 0)$ 在公共定义域内与 $y = -f(x)$, $y = \frac{1}{f(x)}$ 的单调性相反;
- (7) 复合函数 $y = f[g(x)]$ 的单调性与 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的单调性有关. 简记: “同增异减”.

典例 55. (1) 求函数 $f(x) = -x^2 + 2|x| + 1$ 的单调区间.

(2) 试讨论函数 $f(x) = \frac{ax}{x-1} (a > 0)$ 在 $(-1, 1)$ 上的单调性.

56. 函数 $y = f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的图像如图所示, 则函数 $g(x) = f(\log_a x) (0 < a < 1)$ 的单调减区间是_____.



57. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x} - 3, & x \geq 1, \\ \lg(x^2 + 1), & x < 1, \end{cases}$ 则 $f(f(-3)) =$ _____, $f(x)$ 的最

小值是_____.

58. 若 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$, 则().

- A. $\ln(y-x+1) > 0$
- B. $\ln(y-x+1) < 0$
- C. $\ln|x-y| > 0$
- D. $\ln|x-y| < 0$

59. 已知函数 $f(x) = \ln x + x$, 若 $f(a^2 - a) > f(a + 3)$, 则正数 a 的取值范围是_____.

60. 已知 $f(x) = \begin{cases} (2-a)x + 1 & (x < 1), \\ a^x(x-1) & (x \geq 1) \end{cases}$ 满足对任意 $x_1 < x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立, 那么 a 的取值

范围是().

- A. $[\frac{3}{2}, 2)$
- B. $(1, \frac{3}{2}]$
- C. $(1, 2)$
- D. $(1, +\infty)$

考点七 函数的奇偶性 (高频考点)



(1) 如果函数 $f(x)$ 是奇函数且在 $x = 0$ 处有定义, 则一定有 $f(0) = 0$; 如果函数 $f(x)$ 是偶函数, 那么 $f(x) = f(|x|)$.

(2) 奇函数在两个对称的区间上具有相同的单调性; 偶函数在两个对称的区间上具有相反的单调性.

(3) 在公共定义域内有：奇 ± 奇 = 奇，偶 ± 偶 = 偶，奇 × 奇 = 偶，偶 × 偶 = 偶，奇 × 偶 = 奇。

(4) 可以利用函数的奇偶性来求函数值、求函数解析式、求函数解析式中参数的值、作函数图像或判断单调性。

典例 61. 下列函数为偶函数的是()。

A. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

B. $y = x^2 + e^{|x|}$

C. $y = x \cos x$

D. $y = \ln|x| - \sin x$

62. 已知函数 $f(x)$ 为奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 - x$ ，则当 $x < 0$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为_____。

63. $f(x) = \frac{(x+2)(x+k)}{\tan x}$ 为奇函数，则 $k =$ _____。

考点八 函数的周期性

★ 对 $f(x)$ 定义域内任一自变量 x ：

(1) 若 $f(x+a) = -f(x)$ ，则 $T = 2a(a > 0)$ 。(2) 若 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)}$ ，则 $T = 2a(a > 0)$ 。

(3) 若 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)}$ ，则 $T = 2a(a > 0)$ 。

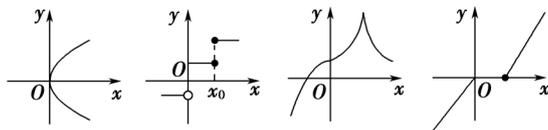
典例 64. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(x)(x \in \mathbf{R})$ ，且在区间 $(-2, 2]$ 上， $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ x + \frac{1}{2}, & -2 < x \leq 0, \end{cases}$ 则

$f(f(15))$ 的值为_____。

65. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数，且 $f(x+4) = f(x-2)$ 。若当 $x \in [-3, 0]$ 时， $f(x) = 6^{-x}$ ，则 $f(919) =$ _____。

能力演练 ◆ 闯关冲刺

66. 下列所给图像是函数图像的个数为()。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

67. 若二次函数 $g(x)$ 满足 $g(1) = 1$ ， $g(-1) = 5$ ，且图像过原点，则 $g(x)$ 的解析式为()。

A. $g(x) = 2x^2 - 3x$

B. $g(x) = 3x^2 - 2x$

C. $g(x) = 3x^2 + 2x$

D. $g(x) = -3x^2 - 2x$

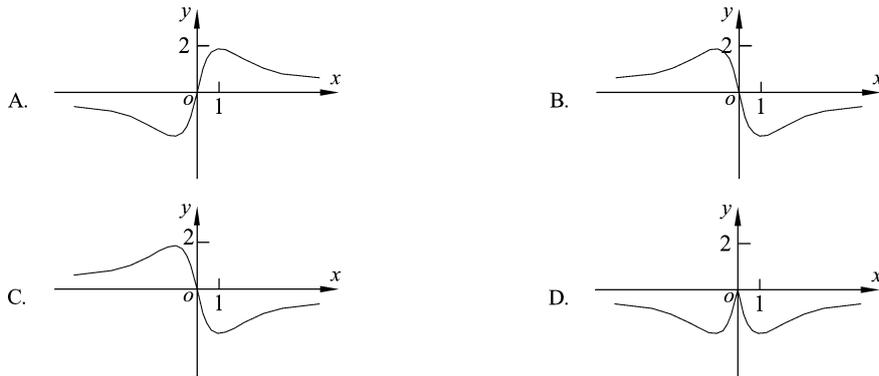
68. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 6, & x \leq 0, \\ -x + 6, & x > 0, \end{cases}$ 则不等式 $f(x) < f(-1)$ 的解集是().

- A. $(-3, -1) \cup (3, +\infty)$ B. $(-3, -1) \cup (2, +\infty)$
 C. $(-3, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (-1, 3)$

69. 设函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$, 则 $f(x)$ ().

- A. 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增 B. 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减
 C. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增 D. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减

70. 函数 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的图像大致为().



71. 函数 $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln x$ 的定义域是_____.

72. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ ().

- A. $e^{-x} - 1$ B. $e^{-x} + 1$ C. $-e^{-x} - 1$ D. $-e^{-x} + 1$

73. 设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域都为 \mathbf{R} , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则正确的是().

- A. $f(x)g(x)$ 是偶函数 B. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数
 C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数 D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

74. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, 则该函数的单调递增区间为_____.

75. 若函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[\frac{1}{3}, 1]$, 则 $a + b =$ _____.

76. 若 $f(x) = \frac{x+a-1}{x+2}$ 在区间 $(-2, +\infty)$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

77. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减, $f(2) = 0$. 若 $f(x-1) > 0$, 则 x 的取值范围是_____.

78. 已知函数 $f(x) = a - \frac{2}{e^x + 1}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是奇函数, 则函数 $f(x)$ 的值域为().

- A. $(-1, 1)$ B. $(-2, 2)$
 C. $(-3, 3)$ D. $(-4, 4)$

79. 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

80. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(x+5) = f(x)$, 当 $x \in (-3, 0]$ 时, $f(x) = -x - 1$, 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = \log_2 x$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2019)$ 的值等于().

- A. 403 B. 405 C. 806 D. 809

81. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 且为奇函数. 若 $f(1) = -1$, 则满足 $-1 < f(x-2) < 1$ 的 x

的取值范围是().

- A . $[-2, 2]$ B . $[-1, 1]$ C . $[0, 4]$ D . $[1, 3]$

82. 下列函数中, 既是奇函数又在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是().

- A . $y = e^x + e^{-x}$ B . $y = \ln(|x| + 1)$ C . $y = \frac{\sin x}{|x|}$ D . $y = x - \frac{1}{x}$

83. 设 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 则().

A . $f(\log_3 \frac{1}{4}) > f(2^{\frac{3}{2}}) > f(2^{\frac{2}{3}})$

B . $f(\log_3 \frac{1}{4}) > f(2^{\frac{2}{3}}) > f(2^{\frac{3}{2}})$.

C . $f(2^{\frac{3}{2}}) > f(2^{\frac{2}{3}}) > f(\log_3 \frac{1}{4})$.

D . $f(2^{\frac{2}{3}}) > f(2^{\frac{3}{2}}) > f(\log_3 \frac{1}{4})$.

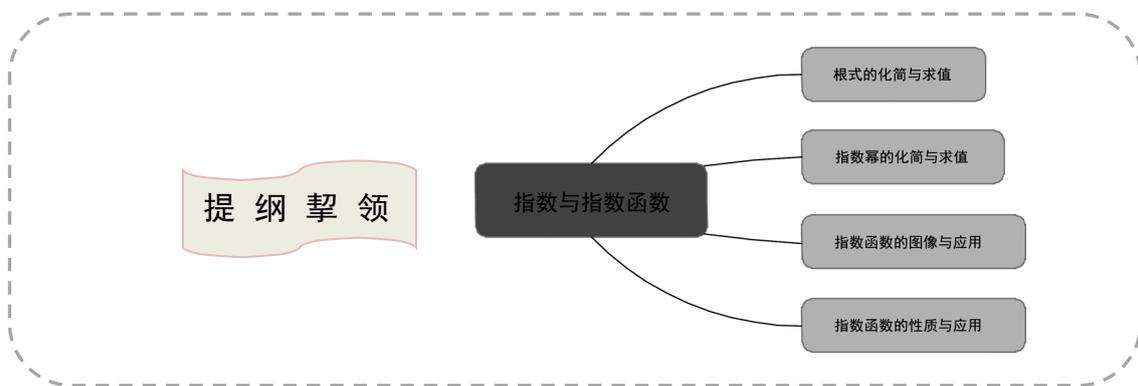
84. 函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是().

- A . $(-\infty, -2)$ B . $(-\infty, 1)$ C . $(1, +\infty)$ D . $(4, +\infty)$

85. 若定义在 \mathbf{R} 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是().

- A . $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ B . $[-3, -1] \cup [0, 1]$
 C . $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ D . $[-1, 0] \cup [1, 3]$

复习专题 2.2 指数函数



知识建档 ◆ 快速扫描

1. □ □

(1) n 次方根的概念.

若 _____, 则 x 叫做 a 的 n 次方根, 其中 $n > 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$. 式子 _____ 叫做根式, 这

里_____叫做根指数，_____叫做被开方数。

a 的 n 次方根的表示：

$$x^n = a \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[n]{a}, & \text{当 } n \text{ 为奇数且 } n \in \mathbf{N}^*, n > 1 \text{ 时,} \\ x = \pm \sqrt[n]{a}, & \text{当 } n \text{ 为偶数且 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 时.} \end{cases}$$

(2) 根式的性质.

$$(\sqrt[n]{a})^n = \underline{\hspace{2cm}} (n \in \mathbf{N}^*, n > 1).$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数,} \\ |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases} & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

2. □ □ □ □ □ □

(1) 幂的有关概念.

正分数指数幂： $a^{\frac{m}{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } n > 1$).

负分数指数幂： $a^{-\frac{m}{n}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } n > 1$).

0 的正分数指数幂等于_____，0 的负分数指数幂_____。

(2) 有理数指数幂的运算性质.

$$a^r a^s = \underline{\hspace{2cm}} (a > 0, r, s \in \mathbf{Q}); (a^r)^s = \underline{\hspace{2cm}} (a > 0, r, s \in \mathbf{Q});$$

$$(ab)^r = \underline{\hspace{2cm}} (a > 0, b > 0, r \in \mathbf{Q}).$$

3. □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

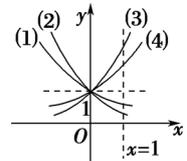
$y = a^x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
图像		
定义域	_____	
值域	_____	
性质	过定点_____	
	当 $x > 0$ 时，_____； 当 $x < 0$ 时，_____	当 $x > 0$ 时，_____； 当 $x < 0$ 时，_____
	在 \mathbf{R} 上是_____函数	在 \mathbf{R} 上是_____函数

4. □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

画指数函数 $y = a^x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图像，应抓住三个关键点：_____，_____，_____。

5. □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

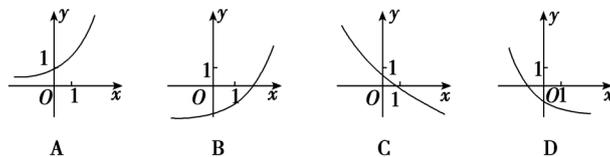
如图是指数函数 (1) $y = a^x$, (2) $y = b^x$, (3) $y = c^x$, (4) $y = d^x$ 的图像, 底数 a, b, c, d 与 1 之间的大小关系为_____. 由此我们可得到以下规律: 在第一象限内, 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的图像越高, 底数越大.



注意 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的图像和性质跟 a 的取值有关, 要特别注意应分_____与_____来研究.

自测温故 ☆ 知己知彼

1. 函数 $y = a^x - a (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 的图像可能是().



2. 函数 $y = 2^{|x|}$ 的值域为().

- A. $[0, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, 1]$

3. 已知 $a = 2^{\frac{4}{3}}, b = 4^{\frac{2}{5}}, c = 25^{\frac{1}{3}}$, 则().

- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

4. 函数 $f(x) = a^{x-1} (a > 0, a \neq 1)$ 的图像恒过点 A, 下列函数中图像不经过点 A 的是().

- A. $y = \sqrt{1-x}$ B. $y = |x-2|$ C. $y = 2^x - 1$ D. $y = \log_2(2x)$

5. 化简 $4a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} \div \left(-\frac{2}{3} a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right)$ 的结果为().

- A. $-\frac{2a}{3b}$ B. $-\frac{8a}{b}$ C. $-\frac{6a}{b}$ D. $-6ab$

6. 若函数 $y = (a^2 - 1)^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为减函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

7. 若函数 $f(x) = a^{|2x-4|} (a > 0, a \neq 1)$, 满足 $f(1) = \frac{1}{9}$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间是().

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, +\infty)$ C. $[-2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2]$

8. 若实数 $a > 0$, 则下列等式成立的是().

- A. $(-2)^{-2} = 4$ B. $2a^{-3} = \frac{1}{2a^3}$ C. $(-2)^0 = -1$ D. $(a^{-\frac{1}{4}})^4 = \frac{1}{a}$

9. 计算: $-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} + (0.002)^{-\frac{1}{2}} =$ _____.

10. 当 $x \in (-\infty, -1]$ 时, 不等式 $(m^2 - m) \cdot 4^x - 2^x < 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.
11. 若偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 2^x - 4(x > 0)$, 则不等式 $f(x - 2) > 0$ 的解集为_____.

突破考点★典例精讲

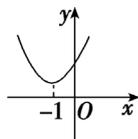
◎ 考点一 根式的化简求值

典例 12. (1) $\left(2\frac{3}{5}\right)^0 + 2^{-2} \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} - (0.01)^{0.5}$;

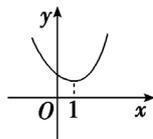
(2) $\frac{5}{6}a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-2} \cdot \left(-3a^{\frac{1}{2}}b^{-1}\right) \div (4a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-3})^{\frac{1}{2}}$.

◎ 考点二 指数函数的图像及应用

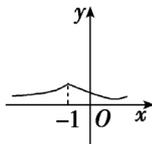
典例 13. 函数 $f(x) = 2^{|x-1|}$ 的图像是().



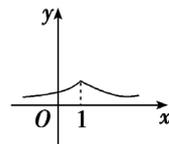
A



B



C



D

14. 若函数 $y = |3^x - 1|$ 在 $(-\infty, k]$ 上单调递减, 则 k 的取值范围为_____.

15. 若函数 $f(x) = e^{-(x-\mu)^2}$ (e 是自然对数的底数) 的最大值是 m , 且 $f(x)$ 是偶函数, 则 $m + \mu =$ _____.

◎ 考点三 指数函数的性质及应用



指数函数的性质主要是其单调性, 主要有以下三个方面考查:

(1) 比较大小问题. 常利用指数函数的单调性及中间值(0 或 1)法.

(2) 简单的指数方程或不等式的求解问题. 解决此类问题应利用指数函数的单调性, 要特别注意底数 a 的取值范围, 并在必要时进行分类讨论.

(3) 解决指数函数的综合问题时, 要把指数函数的概念和性质同函数的其他性质(如奇偶性、周期性)相结合, 同时要特别注意底数不确定时, 对底数的分类讨论.

典例 16. 设 $a = 0.6^{0.6}$, $b = 0.6^{1.5}$, $c = 1.5^{0.6}$, 则 a, b, c 的大小关系是().

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

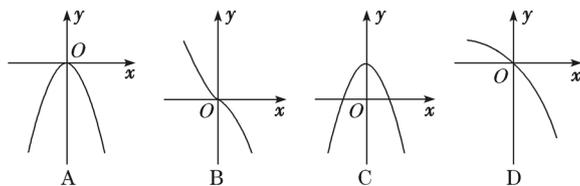
17. 已知函数 $f(x) = b \cdot a^x$ (其中 a, b 为常量, 且 $a > 0, a \neq 1$) 的图像经过点 $A(1, 6), B(3, 24)$. 若不等式 $\left(\frac{1}{a}\right)^x + \left(\frac{1}{b}\right)^x - m \geq 0$ 在 $x \in (-\infty, 1]$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.

18. 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+2x+1}$ 的单调减区间为_____.

19. 已知函数 $f(x) = a^x + b$ ($a > 0, a \neq 1$) 的定义域和值域都是 $[-1, 0]$, 则 $a + b =$ _____.

能力演练 闯关冲刺

20. 函数 $f(x) = 1 - e^{|x|}$ 的图像大致是().



21. 设 $a = 3^{0.7}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$, $c = \log_{0.7} 0.8$, 则 a, b, c 的大小关系为().

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

22. 在同一坐标系中, 函数 $y = 2^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像之间的关系是().

- A. 关于 y 轴对称 B. 关于 x 轴对称
C. 关于原点对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称

23. 已知函数 $f(x) = 4 + 2a^{x-1}$ 的图像恒过定点 P , 则点 P 的坐标是().

- A. $(1, 6)$ B. $(1, 5)$ C. $(0, 5)$ D. $(5, 0)$

24. 已知实数 a, b 满足等式 $2019^a = 2020^b$, 下列五个关系式:

$0 < b < a$; $a < b < 0$; $0 < a < b$; $b < a < 0$; $a = b$.

其中不可能成立的关系式有_____ (填序号) .

25. 已知 $f(x) = 3^{x-b}$ ($2 < x < 4$, b 为常数) 的图像经过点 $(2, 1)$, 则 $f(x)$ 的值域为().

- A. $[9, 81]$ B. $[3, 9]$ C. $[1, 9]$ D. $[1, +\infty)$

26. 不等式 $2^{-x^2+2x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}$ 的解集为_____ .

27. 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x-x^2}}$ 的单调递增区间是().

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

28. 函数 $f(x) = a^{|x+1|}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 的值域为 $[1, +\infty)$, 则 $f(-4)$ 与 $f(1)$ 的关系是().

- A. $f(-4) > f(1)$ B. $f(-4) = f(1)$ C. $f(-4) < f(1)$ D. 不能确定

29. 函数 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ 在 $[-3, 2]$ 上的值域是_____ .

30. 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{ax}$, a 为常数, 且函数的图像过点 $(-1, 2)$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $g(x) = 4^{-x} - 2$, 且 $g(x) = f(x)$, 求满足条件的 x 的值.

31. 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{ax^2-4x+3}$.

(1) 若 $a = -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 有最大值 3, 求 a 的值;

(3) 若 $f(x)$ 的值域是 $(0, +\infty)$, 求 a 的值.