

四川省教育厅人文社会科学重点研究基地四川省教师教育研究中心项目  
(TER2019-022)

四川省高校人文社科研究基地四川省中小学教师专业发展研究中心项目  
(PDTR2017-06)

西华师范大学英才科研基金项目

西华师范大学精品课程项目

# 实践取向的

## 高中数学教学研究

汤强 ◎ 著

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

---

图书在版编目 ( C I P ) 数据

实践取向的高中数学教学研究 / 汤强著. —成都 :  
西南交通大学出版社, 2021.5  
ISBN 978-7-5643-8019-9

实践... 汤... 中学数学课 - 教学研究  
- 高中 . . . G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2021) 第 075633 号

---

Shijian Quxiang de Gaozhong Shuxue Jiaoxue Yanjiu

实践取向的高中数学教学研究

汤强

著

责任编辑 张宝华

封面设计 何东琳设计工作室

印张 19.5 字数 309千

出版发行 西南交通大学出版社

成品尺寸 170 mm × 230 mm

网址 <http://www.xnjdcbs.com>

版次 2021 年 5 月第 1 版

地址 四川省成都市二环路北一段111号  
西南交通大学创新大厦21楼

印次 2021 年 5 月第 1 次

邮政编码 610031

印刷 四川森林印务有限责任公司

发行部电话 028-87600564 028-87600533

书号 ISBN 978-7-5643-8019-9

定价 78.00元

图书如有印装质量问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话 : 028-87600562

随着《普通高中数学课程标准（2017年版）》的颁布，高中数学课程改革进入了“素养时代”，高中数学课程改革的“知识—能力—素养”走向已经逐渐清晰。回顾21世纪初，高中数学课程改革针对的“过于注重知识传授倾向”“课程结构过于强调学科本位、科目过多和缺乏整合的现状”“课程内容‘难、繁、偏、旧’和过于注重书本知识的现状”“课程实施过于强调接受学习、死记硬背、机械训练的现状”以及“课程评价过分强调甄别与选拔的功能”等诸多问题已经得到了初步解决。但是，在改革过程中，一些诸如“新瓶装旧酒”“新鞋走老路”“一切为了应试”等新问题也逐渐显现，这些问题极大地制约着高中数学课程改革的进程。因此，不论是为了更高效地落实从知识到能力、从能力到素养的目标，还是更全面地转变“应试风向”，深入研究作为高中数学课程改革主阵地的高中数学教学就显得尤为必要了。

事实上，对高中数学教学进行研究的步伐一刻也没有停歇，大家也认识到，缺乏理论的教学研究，会导致实践无“根”；而离开实践的教学研究，会导致理论无“源”。也就是说，大多数相关研究不是“限”于实践本身，就实践论实践，就是“陷”于理论本源，为理论谈理论；即使涉及理论与实践结合的研究，也处于偏向哪一方的两难境地。而本书以实践取向“串起”高中数学教学研究的“根”与“源”，力图将实践与理论在高中数学教学研究层面有机地整合起来。我们认为，高中数学教学研究的“实践取向”源于三个方面：

（1）源于对教材的理解。

教材作为教学活动开展的主要“文本”，对它的理解对于研究高中数学教学有着举足轻重的作用。然而，如今的高中数学教材“变更”频繁，自从2003年高中数学课程改革以来，随着《普通高中数学课程标准》的颁布和修订，教材整体改编就经历了两次，更不要说，使用过程中教材本身的多次调整。如今的高中数学教材版本很多，课程改革也改变了以往“一纲一本”的现状，“一标多本”预示着多个版本的高中数学教材同时存在。这对于高中数学一线教师而言，多变更、多版本的高中数学教材，一方面为教学的广度延展增添了更多的、可供加工的“素材”，另一方面为教学的深度拓展提供了更多的、可供选择的途径。因此，对教材的理解已经成为高中数学教学研究的实践取向来源之一。

### （2）源于教师认知。

尽管我们都认同“理念决定行为”，但是，对于一线教师而言，理念往往“高高在上”、难接地气，与行为常常不能“直接相连”。一线教师更多的是“我认为就是这样，我就这样做”，因而，对于高中数学一线教师而言，对教学相关事物的认识才是决定其教学行为的直接“因素”。因此，他们对课标、教材、学生和学校等方面“有何认识”应该是高中数学教学研究的又一实践取向来源。

### （3）源于教学现状。

教学是高中数学一线教师的常规工作，他们在教学过程中所呈现出来的情绪、言语和行为无一不反映着对数学知识、数学方法以及数学课堂、数学教育教学等的理解和认识。通过对他们在教学过程中的言语和行为的观察可以获得最原始的研究素材，对所获得的教学过程素材的分析是最接近课堂实际的研究。因此，对高中数学一线教师教学现状的调查研究是我们研究的另一个实践取向来源。

全书共7章，从教材、教师和学生等实践层面针对课程改革过程中的高中数学核心内容教学进行了较为系统的研究。

第1章“作为数学模型的高中函数内容教学研究”主要从

教材、课堂等方面研究在“数学模型思想”进入高中数学课程之后已经将函数视为数学模型的情况下，高中数学教师在教学中如何将指数函数、对数函数、三角函数处理为数学模型的构建、分析及应用过程.

第2章“高中数学‘三角函数’教学研究”主要研究高中数学教师面对高中三角函数的教学内容,以及要求出现诸如“三角函数的‘终边-始边’定义与‘单位圆’定义之间的转变”“三角函数教学的中心任务由服务于‘三角恒等变换’转变为‘作为刻画现实世界中周期运动的数学模型’”等变化时,他们在实际教学中做得如何?有哪些问题?

第3章“高中数学导数教学研究”主要从课堂、学生等方面研究高中数学教师的教学如何适应课程改革过程中导数内容在编排结构及内容安排上都发生变化的情况.

第4章“高中数学解析几何教学研究”、第5章“高中数学立体几何教学研究”、第6章“高中概率内容教学研究”这三部分内容主要采用问卷、访谈等调查法以及课堂观察法、个案分析法研究高中数学教师在应对课程改革对高中数学立体几何、解析几何、统计与概率等领域的核心内容的教学现状与对策.

第7章“基于教材解读的高中 HPM 教学研究”主要研究针对教材中的数学史素材,高中数学教师如何将它们融入课堂,其融入的有效途径和策略是什么等问题.

本书第1章由汤强、李家鑫、任小平撰写;第2章由汤强、张安涛撰写;第3章由江玩红、汤强撰写;第4章由汤强、王友春、任小平撰写;第5章由汤强、唐梦莹撰写;第6章由罗晓强、汤强撰写;第7章由汤强、赵瑜、任小平撰写.本书的作者大都具有研究生学习经历和一线教学经验,他们带着实践取向的目标去观察课堂、访谈教师、测试学生,所关注的研究问题直指高中数学教学实践的“痛处”,所获得的研究结论回应了高中数学教学实践的需要,这对于高中数学教学有着直接的指导意义.

本书的出版得到了西华师范大学英才科研基金项目、西华

师范大学精品课程项目、四川省教育厅人文社会科学重点研究基地四川省教师教育研究中心项目( TER2019-022 )、四川省高校人文社科研究基地四川省中小学教师专业发展研究中心项目( PDTR2017-06 )的资助,在此表示感谢!

本书适用于高等院校数学师范专业的本科生和研究生、高中数学教师、教研员以及数学教育教学研究者.由于本书对不同的研究内容采用了不同的研究视野、运用了不同的研究方法,撰写时难免出现疏漏,不足之处敬请读者给予批评和指正!

汤强

2020年12月20日

于西华师范大学

# 目录

## CONTENTS

第 1 章 作为数学模型的高中函数内容教学研究	001
1.1 函数的认识历程	001
1.2 已有研究简介	003
1.3 研究问题	004
1.4 研究方法	005
1.5 作为函数模型的指数函数的教学分析	008
1.6 作为函数模型的三角函数的教学分析	019
1.7 作为函数模型的数列的教学分析	028
1.8 教学现状及建议	039
【附录】教师问卷调查表	045
第 2 章 高中数学“三角函数”教学研究	049
2.1 已有研究简介	049
2.2 研究设计	050
2.3 基于高中教材分析的“三角函数”定义研究	052
2.4 问卷调查的结果分析	058
2.5 一些反思	076
【附录】高中三角函数内容教学现状调查问卷	080
第 3 章 高中数学导数内容教学研究	083
3.1 微积分的发展历程	083
3.2 已有研究简介	084
3.3 研究设计	086

3.4	教师对高中数学导数内容的认知状况分析	091
3.5	教师对高中数学导数内容的处理	103
3.6	教学建议	112
	<b>【附录】教师问卷调查表</b>	116
<b>第4章 高中数学解析几何教学研究</b> 118		
4.1	已有研究简介	118
4.2	研究设计	121
4.3	高中数学解析几何课程结构设置分析	125
4.4	教师对解析几何教材的教学认知分析	131
4.5	高中数学解析几何的教学案例分析	142
4.6	影响解析几何教学的因素分析	156
4.7	教学建议	159
	<b>【附录】高中数学解析几何教学现状调查研究</b>	162
<b>第5章 高中数学立体几何教学研究</b> 164		
5.1	已有研究简介	164
5.2	研究问题	170
5.3	调查结果及分析	172
5.4	教学建议	194
	<b>【附录1】教师问卷</b>	205
	<b>【附录2】教师访谈提纲</b>	208
<b>第6章 高中概率内容教学研究</b> 210		
6.1	已有研究简介	210
6.2	研究问题	213
6.3	研究设计	213
6.4	教师对“概率”内容的认知状况	217
6.5	“概率”内容教学现状分析	231
6.6	教学建议	242
	<b>【附录】新课程下高中“概率”内容教学</b>	
	<b>调查研究问卷</b>	248



第 7 章 基于教材解读的高中 HPM 教学研究 .....	252
7.1 已有研究简介 .....	252
7.2 研究问题与内容 .....	254
7.3 教材中的数学史内容解析	
以高中数学人教 A 版为例 .....	254
7.4 基于教材解读的 HPM 教学案例研究 .....	266
7.5 例析教材中数学史内容在	
教学中的进一步运用 .....	272
7.6 基于教材解读的 HPM 教学策略 .....	295
参考文献 .....	298



## 第 1 章

# 作为数学模型的高中函数内容教学研究

函数是高中数学课程内容的一条主线，函数的思想和方法自始至终贯穿于整个高中数学教学。与函数内容有关的教学研究屡见不鲜，有从函数的发展史来研究函数概念教学的，有从函数的三要素来研究函数教学的，也有从函数的三种常见表达式来研究函数教学的，还有从函数的思想和方法来研究数学解题的。由于已将“数学模型思想”引入高中数学课程，课程开发者也将函数视为了数学模型，并建议将指数函数、对数函数、三角函数的教学过程视为数学模型的构建、分析及应用过程。为此，本章内容将基于教材、教师和课堂等对作为数学模型的函数教学进行深入研究。

### 1.1 函数的认识历程

函数是高中数学中的一个核心概念。人类对函数的认识经历了一个漫长曲折的过程，由具体到抽象、由模糊到准确，逐步形成一个更加抽象和精确的认识系统。

函数的一般概念虽在 17 世纪形成，但函数的思想，早在原始社会，伴随着人类的生产也就产生了。例如，中国的结绳计数，就是“一一对应”函数思想的体现。在经历了漫长的岁月之后，人们对函数的认识有了更加具体的体现。在 14 世纪，法国奥雷斯姆 (N.Oresme) 运用曲线来表示速率与时间之间的关系，到了 17 世纪，函数更多的则以曲线形态呈现出来，这就是函数的早期认识形态。

直到 1673 年，德国数学家、哲学家莱布尼兹 (G.W.Leibniz) 在他的手稿里最先用“function”一词来表示任何一个随着曲线上的点的变动而变动的量。1692 年，他第一次明确给出了函数定义：“像曲线上的点的横坐标和纵坐标、切线的长度、垂线的长度等，这些所有与曲线上的点有关的量，

即称为函数。”这时的函数已经蕴含了一种依赖关系。

到 1718 年，瑞士数学家约翰·伯努利（Johann Bernoulli）打破几何思想的束缚，把函数定义为：“变量的函数是由这个量和常量组成的解析表达式”，即函数就是解析式。这是对函数认识的第一次升华。

瑞士数学家欧拉（Leonard Euler）于 1734 年，首次使用“ $f()$ ”来表示函数。为使函数概念适应积分的需要，在经历了一番探究和研究后，他对函数有了新的认识。于 1755 年他这样写道：“如果某些量以某种方式依赖于另一些量，而当后者改变时它也发生某种变化，则称前者为后者的函数。”这是从“变化说”或“依赖说”来认识函数的，是对函数认识的第二次升华。

法国数学家柯西（Cauchy）对函数的认识是：“对于  $x$  的每一个值，如果  $y$  都有唯一确定的值与之对应，则  $y$  叫作  $x$  的函数”。此定义中，把用分段解析式表示的关系式纳入函数定义中，基本上摆脱了“解析表达式”的要求，它侧重于关于变量间关系的认识。也就是说，到 18 世纪末，人们把函数拓展到了“分段函数”。这是对函数概念进行的第三次扩充。

1807 年，法国数学家、物理学家傅里叶（Fourier）发现一个函数可以表示成一个无穷三角级数。1812 年，高斯（Gauss）把超几何级数作为函数，其表达式是无穷级数。这就是我们在高等数学中认识的函数：“函数在某点可展开成一个无穷多项式。”

直到 1837 年，德国数学家狄利克雷（Dirichet）给出新的函数定义：“如果对于给定区间上  $x$  的所有值都对应着完全确定的  $y$  值，则称  $y$  是  $x$  的函数。至于用怎样的方法建立所指出的对应关系并不重要。”这就是人们常说的经典函数定义，他还给出一个著名函数例子：

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数} \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases} \text{ 这是对函数认识的第四次升华。}$$

19 世纪 70 年代，美国维布伦（Veblen，1880—1960）用德国康托尔（Cantor）的“集合论”给出了近代函数的定义。此定义打破了“变量是数”的限制，强调对应关系的存在性，也就是高等数学中所指的“泛函”，它使函数的概念更为抽象，更加完备。这实现了对函数概念的第五次扩充。

20 世纪中叶，“函数就是一种关系”是对函数更广泛的认识，这是对函数认识的第六次升华。

综上所述,历经三百多年,对函数的认识,大体经历了:“图像”→“解析式”→“依赖说”→“对应说”→“关系说”,同时也适应了数学学科自身的发展要求和社会科技发展需求,展现和凝聚了无数数学家们的科研成果和智慧.

## 1.2 已有研究简介

与国外的数学课程相比,我国数学课程中引入函数概念相对较晚.像日本、美国、俄罗斯等国家在小学四五年级就开始学习函数,且多是从实际生活问题中引出函数概念,注重函数的知识背景和应用价值;而我国是在八年级(初二下)才开始真正学习函数概念,而且是从形式定义角度来学习函数概念,注重知识的系统化和完整性.

纵观我国数学课程对函数的安排和学习,大体遵循“变量说”→“对应说”→“关系说”的顺序,体现了函数的发展历程和教材编排的螺旋式结构.在初中,首次学习函数,是从运动变化观点来解释函数概念的;到了高中阶段,就用集合对应的方式来定义函数,这是对函数概念的更严谨、更全面的定义;而到了高等教育阶段,我们常把函数看成一种“关系”,对函数概念有了更加抽象、更加完备的概述.

近几年,随着课程改革步伐的加快,对中学数学中函数的研究也愈来愈广泛和深入.

首都师范大学朱文芳博士在《初中生函数概念的发展研究》一文中指出,“初中生有将近一半的人不能用运动和变化的观点看待问题,而初二是学生对函数概念认识的一个转折点,初二以后,学生无论是对文字信息还是图形信息进行加工的能力都有明显增强,但将文字信息和图形信息进行转换的能力还很低.”可见,初中阶段,我们主要是从运动变化的观点来学习和研究函数的,这正是莱布尼兹(G.W.Leibniz)和欧拉(Leonard Euler)时期对函数的认识:“依赖说或变化说”.

曾国光老师在《中学生函数概念认知发展研究》一文中指出:“根据对初三、高一、高三学生的访谈调查,中学生对函数概念的认知发展有以下三个阶段:作为“算式”的函数,作为“变化过程”的函数,作为“对应关系”的函数.这三个阶段符合由低级到高级、由具体到抽象的认知规

律。”由此可见，我国中学数学课程对函数的学习是按照函数的发展历程来设置安排的，对函数的认识也符合学生的一般认知规律。

东北师范大学郑颖萍在其硕士学位论文《高中数学函数内容教学研究》中从教材编排、课程要求以及教师的教学情况方面分析了函数教学现状中存在的不足之处，并对学生学习函数内容的实际情况进行了调查。另外，还特意从教材分析、目标把握、重难点解析、教法指导、教学案例及案例分析六个维度提出了函数内容的教学策略。显然，她主要是从课标、教材以及教师三个角度来分析和研究高中函数的教学情况并提出教学建议的。

北京师范大学戈冉冉在她的硕士学位论文《新课程理念与高中函数教学研究》中，针对高中函数教学出现的异化现象，提出了情景创设应注重实效、使用信息技术应恰到好处、教学中要把握好“过程与结论、接受与探究、传统与现代”三个平衡等建议。另外，还分别从概念、应用和学生的水平角度对函数概念和基本初等函数（ $y = a^x$ ）以及三角函数等内容提供了教学资源的开发素材。可见，此文主要是基于《普通高中数学课程标准》对函数提出的新要求：“注重函数的知识背景和实际应用、突出函数的思想和方法、将现代信息技术与课堂教学有机地整合起来”，而进行的教学研究。

上海师范大学朱慧敏在其硕士论文《基于 APOS 理论的三角函数教学设计研究》中着重指出：“在 APOS 理论指导下寻求三角函数的教学模式、教学设计、学生学习障碍以及相应的解决策略，从而探究新的教学理论和教学方式，寻找更加适应学生发展的教与学的契合点。”

而华东师范大学张中发用 APOS 理论对数列教学进行了实证研究，得出：“将 APOS 理论应用于教学能显著提高教学成绩；应用 APOS 理论指导教学能提高学生解决问题的能力；应用 APOS 理论指导教学能使学生的非认知因素得到改善。”基于 APOS 理论来研究数学教学正是最近几年研究的热点，备受数学教育家和数学教育工作者的青睐。

### 1.3 研究问题

在高中阶段，函数被看作一种数学模型来学习，它是描述和刻画现实世界变化规律的重要数学模型。在我们的生活周围随处可见运动变化的事物，如打车时的票价随里程数的变化而变化，家庭使用的电费随用电量的

变化而变化，我国人口数随时间的变化而变化，等等。《普通高中数学课程标准》要求学生学会用数学知识来解决生活问题，以培养学生的数学应用意识。为了达到这一基本目标，需要先了解作为教育实施者的教师是怎么认识函数模型的？在教学实践中，又是如何设计和操作的？本章立足于以上问题，将在以下方面开展研究：

(1) 普通高中数学教师对函数作为数学模型来教学有着怎样的总的认知？

(2) 普通高中数学教师对指数函数、三角函数、数列三种不同函数模型有着怎样的认知程度？

(3) 普通高中数学教师对指数函数、三角函数、数列三种不同函数模型的教学行为是怎样的？

## 1.4 研究方法

### 1.4.1 文献分析法

通过查阅和分析相关文献，了解函数概念的发展演变史，对函数概念有了一个更准确、更深刻的认识；了解高中函数教学的相关理论和研究现状；总结别人的研究成果，提出自己的研究方向。文献资料来源于：(1) 中学数学教学类杂志，如《中学数学教学参考》《中学数学》等；(2) 相关函数的专著或论文集；(3) 通过 Internet 网络搜索相关文献资料，如 cnki 网站，中国期刊数据库和中国优秀博士、硕士学位论文数据库中的相关学术论文和学位论文等。

### 1.4.2 问卷调查法

为了了解高中数学教师对这一新理念的认知情况和新课改后关于高中数学中三类典型函数模型（指数函数模型、三角函数模型、数列模型）的教学现状，在认真研究《普通高中数学课程标准》并参考相关函数教学的论文、著作后，结合教学实践经验，根据研究目的，精心编制了此份问卷。此份问卷共分两部分：第一部分是选取教师的基本信息情况（见表 1-1）；第二部分是对教师关于函数模型教学的认知情况调查（见本章附录）。问卷调查表中共有 23 道选择题，其中第 1~7 题是了解一线教师对“把函数作

为一种描述客观世界变化规律的数学模型”来教学的总体认知情况；第 8~11 题是了解一线教师对作为一种典型的刻画增减变化的数学模型——指数函数的认知和态度；第 12~16 题是了解一线教师对作为一种典型的刻画具有周期变化规律的数学模型——三角函数的认知和态度；第 17~23 题是了解一线教师对作为一种典型的描述离散现象的数学模型——数列的认知和态度。

### 1. 调查对象

随机调查高中数学教师 76 名,发放问卷 76 份,回收有效问卷 63 份。有效回收率 82.9% (涉及的百分比精确度为 0.1)。表 1-1 是统计的被选取教师的相关信息:

表 1-1 被选取教师的主要信息

	性别	教龄	职称	学历	班级人数	培训次数	学校类别
A	50	3	6	0	1	3	48
B	13	7	35	1	3	15	6
C		42	22	61	15	17	9
D		11		1	44	28	
总人数	63	63	63	63	63	63	63

注:A~D 分别为附录中间卷调查表中对应的选项。

由表 1-1 可得知:(1)这次随机调查的高中数学教师中,男教师居多,占 79.4%,说明普通高中中从事数学教育工作的主力军为男教师。(2)教师的教龄大部分都在 11 年以上(包括 11 年),说明被调查的教师大都具备较丰富的教学经验。(3)教师们的学历基本上都为大学本科学历及其以上,说明普通高中数学教育中已形成一支具有较高学历、较高水平、较高质量的师资队伍。(4)所有被调查教师都参加过近三年县级以上的教师培训,说明所选取的教师对高中数学新课程是比较熟悉和了解的,同时也反映出教师们的专业知识较扎实。(5)被调查教师所任教的学校主要集中为城市学校,说明这次所调查的对象主要是城市里的教师,所研究的结果更能代表教育比较发达的城市学校教育。(6)所授班级基本都为大班级教学,少



于 50 人的班级仅占 6.3%，这也反映出在相对较发达的城市学校里普遍还是大班级授课，说明我国的基础教育资源还匮乏，教育硬件设施还有待改善和提高。

## 2. 问卷的信度

根据教育测量与统计原理，本问卷采用了五点态度量表，以测量其内部的一致性信度（即  $\alpha$  系数）。采用 SPSS Statistics17 算得  $\alpha = 0.816$ （见表 1-2），说明这份问卷测试题的可信度较高。

表 1-2 可靠性统计量

Cronbach's Alpha	基于标准化项的 Cronbach's Alpha	项数
.816	.844	23

## 3. 问卷统计方法

根据教育测量和统计学原理，调查研究的数据用 SPSS Statistics17 工具来处理，并用卡方检验来分析不同教师对某些问题的态度存在的差异性。同时结合教师访谈，通过定量和定性的方式得出研究结果。

### 1.4.3 访谈调查法

本次访谈的目的主要是对问卷调查做补充和说明，以便进一步分析问卷中教师对某些问题持不同态度的原因。现设计了以下访谈提纲：

（1）有部分高中一线教师不赞成：进行函数模型教学时，应避免对函数的定义域和值域做烦琐、复杂的训练。对此，您怎么看？

（2）少部分高中数学教师不认同：指数函数是一个典型的描述现实中增减变化的数学模型。您认为可能的原因是什么？

（3）有部分高中数学教师不认为：进行指数函数概念教学时，很有必要给学生介绍指数型函数的概念。对此，您是什么态度？为什么？

（4）部分教师不赞成：三角函数是学生最难学的一种函数，也是学生进一步学习函数的最大障碍。请问，您如何看待？

（5）部分教师不赞成：高中三角函数是对初中所学的三角函数的扩充。请问，您怎么看待？