数字信号处理

学习指导及实验

主　编　袁世英　姚道金　曹　东

副主编　钟燕科　周菁菁　陶勇剑　甘方成

西南交通大学出版社

·成　都·

前言 PREFACE

本书是《数字信号处理》（袁世英、姚道金主编，西南交通大学出版社出版）配套的学习指导和实验辅导教材。

本书立足于工程应用型本科的教学实践，根据数字信号处理课程的特点，突出理论与实践相结合。全书分为学习指导与实验两部分。学习指导部分共 7 章，各章均对其重点与难点进行了归纳、总结和概括，并对全部习题进行了较为全面细致的解答，方便学生进行课后的系统练习和巩固基本知识；实验部分根据数字信号处理的基本概念与原理、重要算法与应用，安排了 5 个实验，方便学生上机练习，以加深理解数字信号处理的基本原理，并熟悉 Matlab 的使用。

本书由袁世英、姚道金、曹东担任主编，钟燕科、周菁菁、陶勇剑、甘方成担任副主编。具体编写分工为：第 1 章由钟燕科、邓芳芳编写，第 2 章由周菁菁（华东交通大学理工学院）、曹晖编写，第 3 章由陶勇剑、甘方成编写，第 4 章、第 5 章由姚道金、朱路编写，第 6 章、第 7 章由袁世英、程宵编写，第 8 章、附录由曹东（广州中医药大学医学信息工程学院）、程宵编写，全书由袁世英统稿。学校相关部门负责同志，西南交大出版社黄庆斌、穆丰编辑对本书编写工作给予了许多支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

本书在编写构思和选材过程中参考了国内外诸多的文献资料，在此向文献资料的作者表示最衷心的感谢。

由于编者学识有限，书中难免有疏漏和不妥之处，希望得到使用本书的老师和读者的批评指正。

作　者

2021 年 1 月

目录 CONTENTS

第1章 离散时间信号与系统

1.1 重点与难点

1.1.1 信号与信号处理

1. 信号

信号是传递信息的载体。信号可分类为模拟信号与离散时间信号。离散时间信号可以采用函数、图形、序列描述。从自变量、函数值是否连续对信号进行分类，常用的有以下几类：自变量和函数值都取连续值的模拟信号（也称为时域连续信号）；自变量为离散值，函数值为连续值的时域离散信号（一般来源于模拟信号的采样）；自变量离散、幅度被量化并编码的数字信号。

2. 信号处理

信号处理是对信号进行分析、变换、综合、识别等加工，以达到提取有用信息和便于利用目的的过程。如果处理设备采用模拟部件，则为模拟信号处理（ASP）；若系统中的部件采用数字电路，信号也是数字信号，则这样的处理方法就为数字信号处理（DSP）。

1.1.2 序列与基本运算

1. 常用典型序列及波形图

1）单位脉冲序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

单位脉冲序列如图 1.1.1 所示。

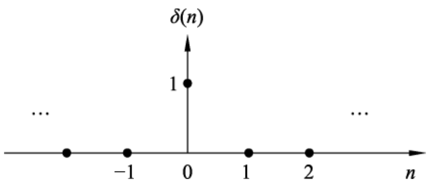


图 1.1.1 单位脉冲序列

2）单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

单位阶跃序列如图 1.1.2 所示。

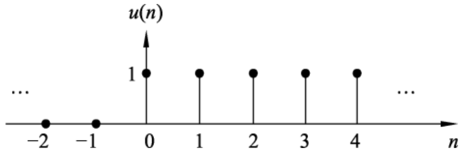


图 1.1.2　单位阶跃序列

3）单位矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & n<0,\quad n\geqslant N\end{cases}$$

单位矩形序列如图 1.1.3 所示。

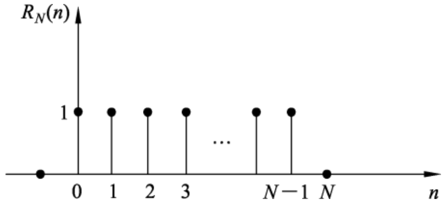
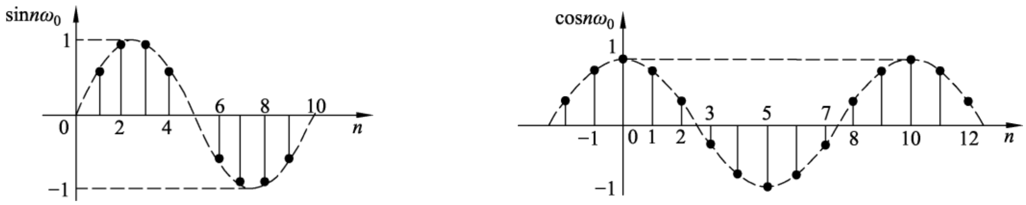


图 1.1.3　单位矩形序列

4）正弦型序列

$$x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi_0)$$

正弦型序列如图 1.1.4 所示。



（a）$\varphi_0=0$　　　　（b）$\varphi_0=\frac{\pi}{2}$

图 1.1.4　正弦型序列

5）实指数序列

$$x(n)=a^n\ ,\ -\infty<n<\infty\ ,\ a\text{ 为实数}$$

实指数序列当 0< a <1 时的波形如图 1.1.5 所示。

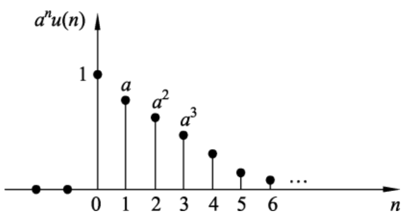


图 1.1.5　$0<a<1$ 时的单边实指数序列 $x(n)=a^n u(n)$

6）复指数序列

$$x(n)=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega_0)n}=\mathrm{e}^{\sigma n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}=\mathrm{e}^{\sigma n}(\cos\omega_0 n+\mathrm{j}\sin\omega_0 n)=|x(n)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(n)}$$

式中，$|x(n)|=\mathrm{e}^{\sigma n}$；$\varphi(n)=n\omega_0$。

7）周期序列

$$x(n)=x(n+N),\quad -\infty<n<\infty$$

对模拟正、余弦信号采样得到的序列未必是周期序列。例如，模拟正弦型采样信号一般表示为

$$x(n)=A\cos(\omega_0 n+\varphi_0)=A\cos\left(\frac{2\pi}{2\pi}\omega_0 n+\varphi_0\right)=A\cos\left(2\pi\frac{\omega_0 n}{2\pi}+\varphi_0\right)$$

$$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\Omega_0 T}=\frac{2\pi f_s}{\Omega_0}=\frac{f_s}{f_0}$$

式中，f_s 是取样频率；f_0 是模拟周期信号频率。

（1）$\frac{2\pi}{\omega_0}=N$，N 为整数，则 $x(n)$ 是周期序列，周期为 N。

（2）$\frac{2\pi}{\omega_0}=S=\frac{N}{L}$，$L$、$N$ 为整数，则 $x(n)$ 是周期序列，周期为 $N=SL$。

（3）$2\pi/\omega_0$ 为无理数，则 $x(n)=A\cos(\omega_0 n+\varphi_0)$ 不是周期序列。

2. 序列的基本运算

1）相加

$$z(n)=x(n)+y(n)$$

2）相乘

$$z(n)=x(n)\cdot y(n)$$

标量相乘 $$z(n)=ax(n)$$

3）延时或移位

$$z(n)=x(n\pm m)\,,m>0$$

是原序列 $x(n)$ 每项左、右移 m 位形成的新序列。

4）折叠

$$y(n)=x(-n)$$

是以纵轴为对称轴翻转 180°形成的序列。

5）尺度变换

$$y(n)=x(mn)$$

$y(n)$ 是只取 $x(n)$ 序列中 m 整数倍点（每 m 点取一点）序列值形成的新序列，即时间轴 n 压缩了 m 倍。

$$y(n)=x(n/m)$$

$y(n)$ 是 $x(n)$ 序列每一点加 $m-1$ 个零值点形成的，时间轴 n 扩展了 m 倍。

1.1.3 离散时间系统

1. 离散时间系统

$$y(n)=T[x(n)]$$

2. 非时变离散系统

离散系统的非时变性也称非移变性。若 $T[x(n)]=y(n)$ ，则非时变离散系统的响应为

$$T[x(n-n_0)]=y(n-n_0)$$

3. 线性非时变离散系统

线性非时变离散系统，简写为 LSI 离散系统。LSI 离散系统的响应为

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n-m)h(m)\\&=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)\end{aligned}$$

4. 卷积

$$x_1(n)*x_2(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_2(m)x_1(n-m)=x_2(n)*x_1(n)$$

1）卷积计算

常用卷积计算方法有图解法、解析法。常用序列卷积结果如表 1.1.1 所示。

表 1.1.1 常用序列卷积结果

序号	$x_1(n)$	$x_2(n)$	$x_1(n)*x_2(n)$
1	$\delta(n)$	$x(n)$	$x(n)$
2	$u(n)$	$x(n)u(n)$	$\sum_{m=0}^{n}x(m)$
3	$a^n u(n)$	$u(n)$	$\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$
4	$u(n)$	$u(n)$	$(n+1)u(n)$
5	$a^n u(n)$	$a^n u(n)$	$(n+1)a^n u(n)$
6	$a^n u(n)$	$nu(n)$	$\left[\frac{n}{1-a}+\frac{a(a^n-1)}{(1-a)^2}\right]u(n)$
7	$a_1^n u(n)$	$a_2^n u(n)$	$\left[\frac{a_1^{n+1}-a_2^{n+1}}{a_1-a_2}\right]u(n)$

2）卷积性质

（1）当 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 、 $x_3(n)$ 分别满足可和条件时，卷积具有以下代数性质：

交换律：

$$x_1(n)*x_2(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m)$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_2(m)x_1(n-m)=x_2(n)*x_1(n)$$

分配律：

$$x_1(n)*[x_2(n)+x_3(n)]=x_1(n)*x_2(n)+x_1(n)*x_3(n)$$

结合律：

$$x_1(n)*x_2(n)*x_3(n)=x_1(n)*[x_2(n)*x_3(n)]=x_2(n)*[x_1(n)*x_3(n)]$$

（2）任意序列与 $\delta(n)$ 卷积：

$$\delta(n)*x(n)=x(n)$$
$$\delta(n-m)*x(n)=x(n-m)$$

（3）任意因果序列与 $u(n)$ 卷积：

$$u(n)*x(n)=\sum_{m=0}^{n}x(m)$$

（4）卷积的移序：

$$y(n\pm m)=x_1(n\pm m)*x_2(n)=x_1(n)*x_2(n\pm m)$$
$$y(n\pm m_1\pm m_2)=x_1(n\pm m_1)*x_2(n\pm m_2)$$

5. 常系数线性差分方程

线性非时变离散系统的数学模型是常系数线性差分方程。N 阶差分方程一般表示为

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

式中，a_k、b_r 为任意常数。为方便，一般取 $a_0=1$，上式还可表示为

$$y(n)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)$$

未知（待求）序列变量的序号最高与最低值之差是差分方程的阶数；各未知序列序号以递减方式给出：$y(n),\ y(n-1), y(n-2),\cdots, y(n-N)$，称为后向形式差分方程；各未知序列序号以递增方式给出：$y(n),\ y(n+1), y(n+2),\cdots, y(n+N)$，称为前向形式差分方程。

6. 系统的稳定性

对任意有界输入激励产生有界输出响应的系统具有稳定性。线性非时变系统稳定的充要条件是单位脉冲响应绝对可和，即

$$S=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h(m)|<\infty$$

7. 系统的因果性

线性非时变系统具有因果性的充要条件是其单位脉冲响应 $h(n)=0$，$n<0$。

8. 因果稳定系统

线性非时变系统为因果稳定的条件是

$$h(n)=\begin{cases}h(n)\,,\ n\geqslant 0\\ 0\,,\,n<0\end{cases}\text{，且}\sum_{n=0}^{\infty}|\,h(n)\,|<\infty$$

1.1.4 连续时间信号的取样与重建

1. 时域采样

时域采样信号 $\hat{x}_{\mathrm{a}}(t)$ 可以等效为信号 $x_{\mathrm{a}}(t)$ 与周期开关函数 $p_{\delta}(t)$ 相乘，即

$$\hat{x}_{\mathrm{a}}(t)=x_{\mathrm{a}}(t)\cdot p_{\delta}(t)$$

1）取样信号 $\hat{x}_{\mathrm{a}}(t)$ 的频谱函数 $\hat{X}_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\varOmega)$

$$\hat{X}_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\varOmega)=\frac{1}{2\pi}X_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\varOmega)*P_{\delta}(\mathrm{j}\varOmega)$$

2）理想取样（周期冲激取样）信号的频谱 $P_{\delta}(\mathrm{j}\varOmega)$

当开关函数 $p_{\delta}(t)$ 为周期冲激序列时，也称为理想抽样，即

$$\hat{X}_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\varOmega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\varOmega-\mathrm{j}k\varOmega_{\mathrm{s}})$$

3）取样定理

设频谱受限信号 $x_{\mathrm{a}}(t)$ 的最高频率为 f_{m}，则 $x_{\mathrm{a}}(t)$ 可以用不大于 $1/(2f_{\mathrm{m}})$ 的时间间隔进行取样的取样值唯一地确定。

通常把允许的最低取样频率 $f_{\mathrm{s}}=2f_{\mathrm{m}}$ 定义为奈奎斯特频率；把允许的最大 $T_{\max}=\pi/\varOmega_{\mathrm{m}}=1/(2f_{\mathrm{m}})$ 定义为奈奎斯特间隔。

4）频率归一化

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\Big|_{\omega=\varOmega T}=\hat{X}_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\varOmega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\varOmega-\mathrm{j}k\varOmega_{\mathrm{s}})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_{\mathrm{a}}\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{T}-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\right)$$

如果 $\omega=\varOmega T$，那么 $x(n)$ 的频谱与取样信号的频谱相等。由于 $\omega=\Omega T=\dfrac{2\pi f}{f_{\mathrm{s}}}$ 是 f 对 f_{s} 归一化的结果，故可以认为，离散时间信号 $x(n)$ 的频谱是取样信号的频谱经频率归一化后的结果。

2. 信号重建

$\hat{x}_{\mathrm{a}}(t)$ 经 $H(\mathrm{j}\varOmega)$ 的理想低通滤波器可以恢复为 $y_{\mathrm{a}}(t)$，即

$$y_{\mathrm{a}}(t)=x_{\mathrm{a}}(t)=\hat{x}_{\mathrm{a}}(t)*h(t)==\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{a}}(nT)\mathrm{S}_{\mathrm{a}}(t-nT)$$

其中

$$S_{\mathrm{a}}(t-nT)=\frac{\sin\left[\dfrac{\pi}{T}(t-nT)\right]}{\dfrac{\pi}{T}(t-nT)}$$

1.2　习题解答

1. 已知矩形序列 $x(n)=R_4(n)$，试画出以下序列的图形：

（1）$x(n-1)$；（2）$x(3-n)$。

解：（1）$x(n-1)=R_4(n-1)$，图形如图 1.2.1（a）所示；

（2）$x(3-n)=R_4(3-n)$，图形如图 1.2.1（b）所示。

（a）　　　　　　　　　　　　（b）

图 1.2.1　习题 1 第（1）、(2)波形图

2. 用单位脉冲序列及其加权和表示图 1.2.2 所示的序列 $x(n)$ 及 $x(-n)$。

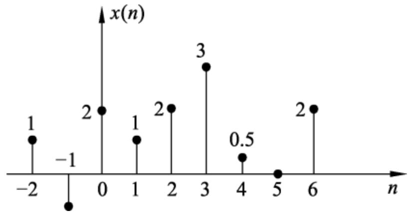


图 1.2.2　题 2 图

解： $x(n)=\delta(n+2)-\delta(n+1)+2\delta(n)+\delta(n-1)+2\delta(n-2)+3\delta(n-3)+0.5\delta(n-4)+2\delta(n-6)$

$x(-n)=2\delta(n+6)+0.5\delta(n+4)+3\delta(n+3)+2\delta(n+2)+\delta(n+1)+2\delta(n)-\delta(n-1)+\delta(n-2)$

3. 对图 1.2.2 给出的 $x(n)$，要求：

（1）计算 $x_e(n)=\dfrac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$，并画出 $x_e(n)$ 波形；

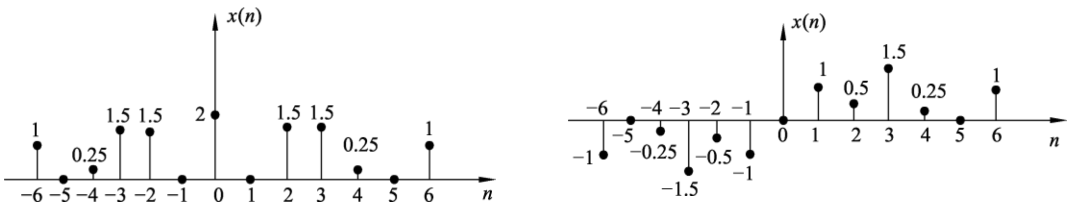
（2）计算 $x_o(n)=\dfrac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$，并画出 $x_o(n)$ 波形；

（3）令 $x_1(n)=x_e(n)+x_o(n)$，将 $x_1(n)$ 与 $x(n)$ 进行比较，你能得到什么结论?

解：

（1）将 $x(n)$ 与 $x(-n)$ 的波形相加，再除以 2，得到 $x_e(n)$。毫无疑问，这是一个偶对称序列，如图 1.2.3（a）所示。

$$x_e(n)=\delta(n+6)+0.25\delta(n+4)+1.5\delta(n+3)+1.5\delta(n+2)+2\delta(n)+$$
$$1.5\delta(n-2)+1.5\delta(n-3)+0.25\delta(n-4)+\delta(n-6)$$



（a）　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（b）

图 1.2.3　习题 3 第（1）、（2)波形图

（2） $x_o(n)=-\delta(n+6)-0.25\delta(n+4)-1.5\delta(n+3)-0.5\delta(n+2)-\delta(n+1)+$
$\delta(n-1)+0.5\delta(n-2)+1.5\delta(n-3)+0.25\delta(n-4)+\delta(n-6)$

$x_o(n)$为奇对称序列，如图 1.2.3（b）所示。

（3）一般实数序列可以分解为偶对称序列 $x_e(n)$ 和奇对称序列 $x_o(n)$，即

$$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$$

式中，$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$；$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$。

4. 判断下列每个序列是否是周期的，如果是，试确定其周期。

（1） $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{2}-\pi\right)}$；（2） $x(n)=3\cos\left(\frac{3}{7}\pi n-\frac{\pi}{8}\right)$；（3） $x(n)=A\sin\left(\frac{3}{4}\pi n-\frac{\pi}{5}\right)$。

解：（1） $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{2}-\pi\right)}=\cos\left(\frac{n}{2}-\pi\right)+\mathrm{j}\sin\left(\frac{n}{2}-\pi\right)=\cos\frac{n}{2}-\mathrm{j}\sin\frac{n}{2}$，

$\frac{2\pi}{\omega_0}=4\pi$，$T$ 为无理数，该序列是非周期的。

（2） $x(n)=3\cos\left(\frac{3}{7}\pi n-\frac{\pi}{8}\right)$，

$2\pi/\omega_0=\frac{2\pi}{\frac{3}{7}\pi}=\frac{14}{3}$，因此该序列是周期的，且周期为 14。

（3） $x(n)=\mathrm{A}\sin\left(\frac{3}{4}\pi n-\frac{\pi}{5}\right)$，

$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\frac{3}{4}\pi}=\frac{8}{3}$，因此该序列是周期的，周期为 8。

5. 判断下列系统的线性和时不变性。

（1） $y(n)=-3x(n)+2$；（2） $y(n)=-3x(n)+2x(n-1)$；（3） $y(n)=3x(-n)$；

（4） $y(n)=-2x(n^2)$；（5） $y(n)=|x(n)|^2$；（6） $y(n)=x(n)\sin(\omega n)$；

（7） $y(n)=[x(n)]^2$。

解：（1）设 $y_1(n)=-3x_1(n)+2,\ y_2(n)=-3x_2(n)+2$，由于

$$y(n)=-3[x_1(n)+x_2(n)]+2\neq y_1(n)+y_2(n)=-3[x_1(n)+x_2(n)]+4$$

故系统不是线性系统。

由于 $y(n-k)=-3x(n-k)+2,\ T[x(n-k)]=-3x(n-k)+2$，因而

$$y(n-k)=T[x(n-k)]$$

故系统为时不变系统。

（2）令输入为 $x(n-n_0)$，输出为

$$y'(n)=-3x(n-n_0)+2x(n-n_0-1)$$

而 $$y(n-n_0)=-3x(n-n_0)+2x(n-n_0-1)=y'(n)$$

故系统为时不变系统。

$$\begin{aligned} y(n)&=T[ax_1(n)+bx_2(n)] \\ &=-3[ax_1(n)+bx_2(n)]+2[ax_1(n-1)+bx_2(n-1)] \\ T[ax_1(n)]&=-3ax_1(n)+2ax_1(n-1) \\ T[bx_2(n)]&=-3bx_2(n)+2bx_2(n-1) \end{aligned}$$

所以

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

故系统为线性系统。

（3）令输入为 $x(n-n_0)$，输出为

$$y'(n)=3x(-n+n_0)$$

而 $$y(n-n_0)=3x(-n+n_0)=y'(n)$$

故系统为时不变系统。

$$\begin{aligned} T[ax_1(n)+bx_2(n)]&=3ax_1(-n)+3bx_2(-n) \\ &=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] \end{aligned}$$

故系统为线性系统。

（4）令输入为 $x(n-n_0)$，输出为

$$y'(n)=-2x((n-n_0)^2)$$

而 $$y(n-n_0)=-2x((n-n_0)^2)=y'(n)$$

故系统为时不变系统。

$$\begin{aligned} T[ax_1(n)+bx_2(n)]&=-2ax_1(n^2)-2bx_2(n^2) \\ &=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] \end{aligned}$$

故系统为线性系统。

（5）令输入为 $T[x_1(n)]=\left|[x_1(n)]\right|^2$， $T[x_2(n)]=\left|[x_2(n)]\right|^2$

$$T[x_1(n)+x_2(n)]=\left|x_1(n)+x_2(n)\right|^2=\left|x_1(n)\right|^2+\left|x_2(n)\right|^2+2\left|x_1(n)\right|\left|x_2(n)\right|\neq T[x_1(n)]+T[x_2(n)]$$

故系统为非线性系统。

$$T[x(n-m)]=\left|[x(n-m)]\right|^2,\quad y(n-m)=\left|[x(n-m)]\right|^2$$

故系统为时不变系统。

（6）令输入为 $x(n-n_0)$，输出为

$$y'(n)=x(n-n_0)\sin(\omega n)$$

而 $$y(n-n_0)=x(n-n_0)\sin[\omega(n-n_0)]\neq y'(n)$$

故系统为非时不变系统。

$$\begin{aligned} T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= ax_1(n)\sin(\omega n)+bx_2(n)\sin(\omega n) \\ &= aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] \end{aligned}$$

故系统为线性系统。

（7）令输入为 $x(n-n_0)$，输出为

$$y'(n)=[x(n-n_0)]^2$$

而 $$y(n-n_0)=[x(n-n_0)]^2=y'(n)$$
故系统为时不变系统。

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=[ax_1(n)+bx_2(n)]^2$$
$$=[ax_1(n)]^2+[bx_2(n)]^2+2abx_1(n)x_2(n)$$
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]\neq ay_1(n)+by_2(n)$$

故系统为非线性系统。

6. 判断下列系统的线性、时不变性、因果性和稳定性。

（1）$T[x(n)]=g(n)x(n)$；（2）$T[x(n)]=\sum_{k=0}^{n}x(k)$；

（3）$T[x(n)]=x(n-n_0)$；（4）$T[x(n)]=\mathrm{e}^{x(n)}$。

解：（1）

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=g(n)[ax_1(n)+bx_2(n)]=g(n)\times ax_1(n)+g(n)\times bx_2(n)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

因此，系统为线性系统。

$$T[x(n-m)]=g(n)x(n-m),\ \ y(n-m)=g(n-m)x(n-m)$$

即 $$T[x(n-m)]\neq y(n-m)$$

因此，系统为非时不变系统。

因为系统的输出只取决于当前输入，与未来输入无关，所以是因果系统。

若 $|x(n)|$ 有界，即 $|x(n)|\leqslant M<\infty$，则 $|T[x(n)]|\leqslant|g(n)|M$：

当 $|g(n)|<\infty$ 时，输出有界，系统稳定；

当 $|g(n)|=\infty$ 时，输出无界，为不稳定系统。

（2）$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum_{k=n_0}^{n}[ax_1(k)+bx_2(k)]=\sum_{k=n_0}^{n}ax_1(k)+\sum_{k=n_0}^{n}bx_2(k)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$

因此，系统为线性系统。

$$T[x(n-m)]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k-m)=\sum_{k=n_0-m}^{n-m}x(k),\ y(n-m)=\sum_{k=n_0}^{n-m}x(k)$$

即 $$T[x(n-m)]\neq y(n-m)$$

因此，系统不是移不变的。

当 $n\geqslant n_0$ 时，输出只取决于当前输入和以前的输入，而当 $n<n_0$ 时，输出还取决于未来输入，所以是非因果系统。

当 $|x(n)|\leqslant M<\infty$ 时，$|T[x(n)]|=\left|\sum_{k=0}^{n}x(k)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|x(k)|\leqslant(|n-n_0|+1)M$，当 $n\to\infty$，$|T[x(n)]|\to\infty$，

所以是不稳定系统。

（3）$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(n-n_0)+bx_2(n-n_0)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$

因此，系统为线性系统。

$$T[x(n-m)]=x(n-n_0-m),\ \ y(n-m)=x(n-n_0-m)$$

因此，系统为时不变系统。

假设 $n_0>0$，系统是因果系统，因为 n 时刻输出只和 n 时刻以后的输入有关。

如果 $|x(n)|\leqslant M$，则 $|y(n)|\leqslant M$，因此系统是稳定的。

（4）$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\mathrm{e}^{[ax_1(n)+bx_2(n)]}=\mathrm{e}^{ax_1(n)}\mathrm{e}^{bx_2(n)}\neq aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=a\mathrm{e}^{x_1(n)}+b\mathrm{e}^{x_2(n)}$

因此，系统为非线性系统。

$$T[x(n-m)]=\mathrm{e}^{x(n-m)}=y(n-m)$$

因此是移不变系统。

输出只取决于当前输入，与未来输入无关，为因果系统。

如果 $|x(n)|\leqslant M<\infty$，则 $|y(n)|=|\mathrm{e}^{x(n)}|\leqslant \mathrm{e}^{|x(n)|}\leqslant \mathrm{e}^{M}$，因此系统是稳定的。

7. 已知下列系统的单位抽样响应，判断系统的因果性和稳定性。

（1）$h(n)=2^n u(n)$；（2）$h(n)=2^n u(-n)$；

（3）$h(n)=0.2^n u(-n-1)$；（4）$h(n)=0.2^n u(n)$；

（5）$\dfrac{1}{n^2}u(n)$；（6）$\dfrac{1}{n!}u(n)$；（7）$\delta(n+4)$。

解：（1）当 $n<0, h(n)=0$，为因果系统；$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|2^n|=\infty$，为不稳定系统；

（2）当 $n<0, h(n)\neq 0$，为非因果系统；$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum\limits_{n=-\infty}^{0}|2^n|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|2^{-n}|=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2<\infty$，为稳定系统；

（3）当 $n<0, h(n)\neq 0$，为非因果系统；$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}|0.2^n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|5^n|=\infty$，为非稳定系统；

（4）当 $n<0, h(n)=0$，为因果系统；$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|0.2^n|=\dfrac{1}{1-0.2}=\dfrac{5}{4}<\infty$，为稳定系统；

（5）当 $n<0, h(n)=0$，为因果系统；$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}<\infty$，为稳定系统；

（6）当 $n<0, h(n)=0$，为因果系统；$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=\mathrm{e}<\infty$，为稳定系统；

（7）当 $n<0, h(n)\neq 0$，为非因果系统；$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=|\delta(n+4)|=1<\infty$，为稳定系统。

8. 计算下列线性卷积：

（1）$y(n)=u(n)*u(n)$；

（2）$y(n)=\lambda^n u(n)*u(n),\ \lambda\neq 1$。

解：（1）$y(n)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}u(k)u(n-k)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}u(k)u(n-k)=(n+1),\ n\geqslant 0$

即 $$y(n)=(n+1)u(n)$$

（2）$y(n)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\lambda^k u(k)u(n-k)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda^k u(n-k)=\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda^k=\dfrac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda},\ n\geqslant 0$

即 $y(n)=\dfrac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}u(n)$

9. 已知一个线性移不变系统的单位取样响应为

$$h(n)=a^n u(n), 0<a<1$$

用直接计算线性卷积的方法，求系统的单位阶跃响应。

解： $h(n)=a^n u(n)$，$x(n)=u(n)$，$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)=\sum_{m=0}^{\infty}a^m u(n-m)$

当 $n\leqslant -1$ 时

$$y(n)=0$$

当 $n\geqslant 0$ 时

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}a^m=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

所以

$$y(n)=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$$

10. 设线性时不变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入 $x(n)$ 分别有以下几种情况：

（1）$h(n)=R_4(n)$，$x(n)=R_5(n)$；（2）$h(n)=2R_4(n)$，$x(n)=\delta(n)-\delta(n-2)$；

（3）$h(n)=0.5^n u(n)$，$x(n)=\delta(n)$；（4）$h(n)=2^n u(-n-1)$，$x(n)=0.5^n u(n)$

分别求卷积输出 $y(n)$。

解：（1）$y(n)=x(n)*h(n)=R_4(n)*R_5(n)$

$$=[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)]*R_5(n)$$

$$=R_5(n)+R_5(n-1)+R_5(n-2)+R_5(n-3)$$

（2）$y(n)=x(n)*h(n)=2R_4(n)*[\delta(n)-\delta(n-2)]$

$$=2R_4(n)-2R_4(n-2)$$

（3）$y(n)=x(n)*h(n)=\delta(n)*0.5^n u(n)=0.5^n u(n)$

（4）$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

当 $n\leqslant -1$ 时，$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}2^m\cdot 0.5^{n-m}=2^{-n}\sum_{m=-\infty}^{n}4^m=2^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty}4^{-m}=2^{-n}\dfrac{4^n}{1-4^{-1}}=\dfrac{4}{3}\cdot 2^n$；

当 $n\geqslant 0$ 时，$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{-1}2^m\cdot 0.5^{n-m}=2^{-n}\sum_{m=-\infty}^{-1}4^m=2^{-n}\sum_{m=1}^{\infty}4^{-m}=2^{-n}\dfrac{4^{-1}}{1-4^{-1}}=\dfrac{1}{3}\cdot 2^{-n}$；

所以

$$y(n)=\frac{4}{3}\cdot 2^n u(-n-1)+\frac{1}{3}\cdot 2^{-n}u(n)$$

11. 证明线性卷积服从交换律、结合律和分配律，即证明下列等式成立：

（1）$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$；（2）$x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$；

（3）$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$。

证明：（1）交换律

$$x(n)*y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)y(n-m)$$

令 $k=n-m$，所以 $m=n-k$，又 $-\infty<k<\infty$，所以 $-\infty<m<\infty$，因此线性卷积公式变成

$$x(n)*y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-k)y(k)=y(n)*x(n)$$

交换律得证。

（2）结合律

$$\begin{aligned}[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)&=\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h_1(n-k)\right]*h_2(n)\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h_1(m-k)\right]h_2(n-m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\sum_{m=-\infty}^{\infty}[h_1(m-k)h_2(n-m)]\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\sum_{l=-\infty}^{\infty}h_1(l)h_2(n-k-l)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)[h_1(n-k)*h_2(n-k)]\\&=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]\end{aligned}$$

结合律得证。

（3）加法分配律

$$\begin{aligned}x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)[h_1(n-m)+h_2(n-m)]\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h_1(n-m)+\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h_2(n-m)\\&=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)\end{aligned}$$

加法分配律得证。

12. 设系统由下面差分方程描述：

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

如系统是因果的，利用递推法求系统的单位脉冲响应。

解：令 $x(n)=\delta(n)$，则

$$h(n)=\frac{1}{2}h(n-1)+\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$$

$n=0$ 时，

$$h(0)=\frac{1}{2}h(-1)+\delta(0)+\frac{1}{2}\delta(-1)=1$$

$n=1$ 时，

$$h(1)=\frac{1}{2}h(0)+\delta(1)+\frac{1}{2}\delta(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$n=2$ 时，

$$h(2)=\frac{1}{2}h(1)=\frac{1}{2}$$

$n=3$ 时，

$$h(3)=\frac{1}{2}h(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

归纳起来，结果为

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+\delta(n)$$

13. 设有一系统，其输入输出关系由以下差分方程确定：

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

设系统是因果性的。

（1）求该系统的单位抽样响应；

（2）由（1）的结果，利用卷积和求输入 $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$ 的响应。

解：（1）令 $x(n)=\delta(n)$，则

$y(n)=h(n)=0(n<0)$

$$h(0)=\frac{1}{2}y(-1)+x(0)+\frac{1}{2}x(-1)=1$$

$$h(1)=\frac{1}{2}y(0)+x(1)+\frac{1}{2}x(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$h(2)=\frac{1}{2}y(1)+x(2)+\frac{1}{2}x(1)=\frac{1}{2}$$

$$h(3)=\frac{1}{2}y(2)+x(3)+\frac{1}{2}x(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$\vdots$$

$$h(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

所以 $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+\delta(n)$

（2） $y(n)=x(n)*h(n)$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+\delta(n)\right]*\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)\right]*\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{(m-1)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(n-m)}u(n-1)+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)=2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(n+1)}}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}u(n-1)+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(n-1)}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}u(n-1)+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{2}}u(n-1)+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)$$

14. 有一连续信号 $x_{\mathrm{a}}(t)=\cos(2\pi ft+\varphi)$， $f=20\ \mathrm{Hz}$， $\varphi=\pi/2$。

（1）求出 $x_{\mathrm{a}}(t)$ 的周期；

（2）用采样间隔 $T=0.02\ \mathrm{s}$ 对 $x_{\mathrm{a}}(t)$ 进行采样，试写出采样信号 $\hat{x}_{\mathrm{a}}(t)$ 的表达式；

（3）画出对应 $\hat{x}_a(t)$ 的时域离散信号（序列）$x(n)$ 的波形，并求出 $x(n)$ 的周期。

解：（1）$x_a(t)$ 的周期为

$$T=\frac{1}{f}=0.05\ \text{s}$$

（2）$\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(2\pi fnT+\varphi)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(40\pi nT+\varphi)\delta(t-nT)$

（3）$x(n)$ 的数字频率 $\omega=0.8\pi$，故 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{5}{2}$，周期 $N=5$，$x(n)=\cos(0.8\pi n+\pi/2)$，所以画出其波形如图 1.2.4 所示。

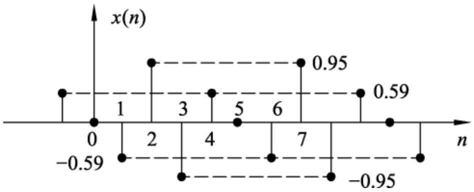


图 1.2.4　习题 14 $x(n)$ 波形图

15. 连续信号幅频 $|F(\mathrm{j}\Omega)|$ 如图 1.2.5 所示，试画出它的采样信号的幅度频谱 $|F^*(\mathrm{j}\Omega)|$（不考虑相位）。图中，$\Omega_1=6\ \text{rad/s}$，$\Omega_2=8\ \text{rad/s}$，$\Omega_s=10\ \text{rad/s}$。

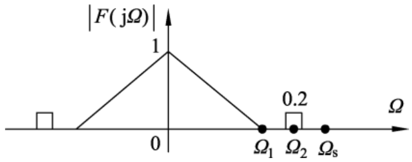


图 1.2.5　题 15 图

解：采样信号的频谱是原信号频谱以 ω_s 为周期进行周期延拓得到的，幅度是原来的 $1/T$，其中 $T=\frac{2\pi}{\omega_s}$，得到采样信号频谱如图 1.2.6 所示。

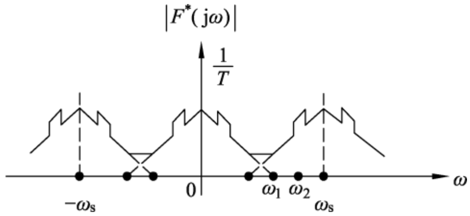


图 1.2.6　采样信号频谱

16. 有一理想抽样系统，抽样频率 $\Omega_s=6\pi$，抽样后经理想低通滤波器 $H_a(\mathrm{j}\Omega)$ 还原，其中

$$H_a(\mathrm{j}\Omega)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |\Omega|<3\pi\\ 0, & |\Omega|\geqslant 3\pi\end{cases}$$

现有两个输入 $x_{a_1}(t)=\cos 2\pi t$，$x_{a_2}(t)=\cos 5\pi t$，通过该系统后，输出信号 $y_{a_1}(t)$，$y_{a_2}(t)$ 有无失真？为什么？

解：根据奈奎斯特定理可知：

因为 $x_{a_1}(t)=\cos 2\pi t$，频谱中最高频率 $\Omega_{a_1}=2\pi<\dfrac{6\pi}{2}=3\pi$，所以 $y_{a_1}(t)$ 无失真。

因为 $x_{a_2}(t)=\cos 5\pi t$，频谱中最高频率 $\Omega_{a_2}=5\pi>\dfrac{6\pi}{2}=3\pi$，所以 $y_{a_2}(t)$ 失真。

17. 当需要对带限模拟信号滤波时，经常采用数字滤波器，如图 1.2.7 所示。图中 T 表示取样周期，假设 T 很小，足以防止混叠失真。把从 $x_a(t)$ 到 $y_a(t)$ 的整个系统等效成一个模拟滤波器：

（1）如果数字滤波器 $h(n)$ 的截止频率 ω 等于 $\pi/8$，$1/T=10\ \text{kHz}$，求整个系统的截止频率 f_{ac}，并求出理想低通滤波器的截止频率 f_c；

（2）对 $1/T=20\ \text{kHz}$，重复（1）的计算。

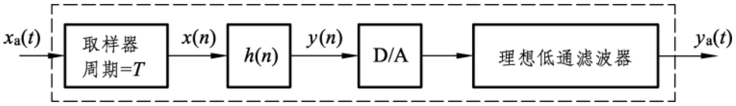


图 1.2.7　题 17 图

解：（1）理想低通滤波器的截止频率 $\dfrac{\pi}{T}$（弧度/秒）折合成数字频率为 π（弧度），它比数字滤波器 $h(n)$ 的截止频率 $\dfrac{\pi}{8}$（弧度）要大，故整个系统的截止频率由数字滤波器 $h(n)$ 的截止频率 $\dfrac{\pi}{8}$（弧度）来决定。将其换算成实际频率，即将 $f_s=\dfrac{1}{T}=10\,000\ \text{Hz}$ 代入 $\dfrac{2\pi f_{ac}}{f_s}=\dfrac{\pi}{8}$，得到

$$f_{ac}=625\ \text{Hz}$$

理想低通滤波的截止频率（弧度/秒）换算成实际频率得到 f_c，即由 $\dfrac{\pi}{T}=2\pi f_c$ 得到

$$f_c=\frac{1}{2T}=\frac{10\,000}{2}=5000\ \text{Hz}$$

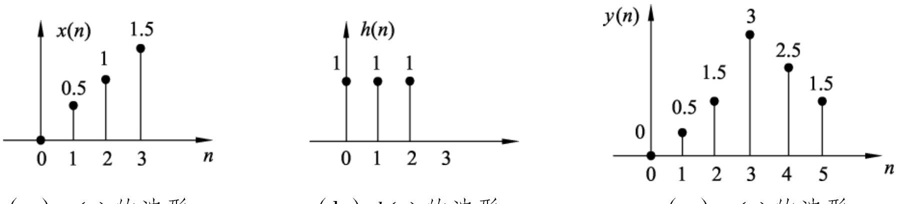
（2）同理可求得

$$f_{ac}=1250\ \text{Hz}$$
$$f_c=10\ \text{kHz}$$

18. 已知 $x(n)=\{0,0.5,1,1.5\},\ 0\leqslant n\leqslant 3$；$h(n)=\{1,1,1\},\ 0\leqslant n\leqslant 2$，计算 $y(n)=x(n)*h(n)$，并画出原序列 $x(n)$、$h(n)$ 和卷积结果 $y(n)$ 的图形。

解：

$$y(n)=x(n)*h(n)=x(n)*[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)]=x(n)+x(n-1)+x(n-2)=\{\underline{0},0.5,1.5,3,2.5,1.5\}$$



（a）$x(n)$ 的波形　（b）$h(n)$ 的波形　（c）$y(n)$ 的波形

图 1.2.8　习题 18 波形图

19. 已知

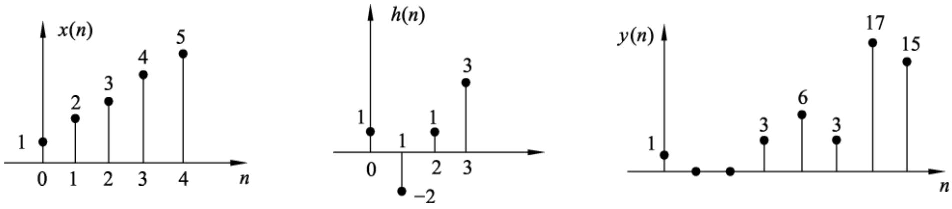
$$x(n)=\{1,2.3,4,5\},0\leqslant n\leqslant 4$$

$$h(n)=\{1,-2,1,3\},0\leqslant n\leqslant 3$$

计算 $y(n)=x(n)*h(n)$，并画出 $x(n)$、$h(n)$ 和卷积结果 $y(n)$ 的图形。

解： $y(n)=x(n)*h(n)=x(n)*[\delta(n)-2\delta(n-1)+\delta(n-2)+3\delta(n-3)]$

$=x(n)-2x(n-1)+x(n-2)+3x(n-3)=[\underline{1},0,0,3,6,3,17,15]$



（a） $x(n)$ 的波形　　（b） $h(n)$ 的波形　　（c） $y(n)$ 的波形

图 1.2.9　习题 19 波形图

20. 已知系统的差分方程为

$$y(n)=-a_1 y(n-1)-a_2 y(n-2)+bx(n)$$

其中，$a_1=-0.8$，$a_2=0.64$，$b=0.866$。

（1）编写求解系统单位脉冲响应 $h(n)(0\leqslant n\leqslant 49)$ 的程序，并画出 $h(n)$；

（2）编写求解系统零状态单位阶跃响应 $s(n)(0\leqslant n\leqslant 100)$ 的程序，并画出 $s(n)$。

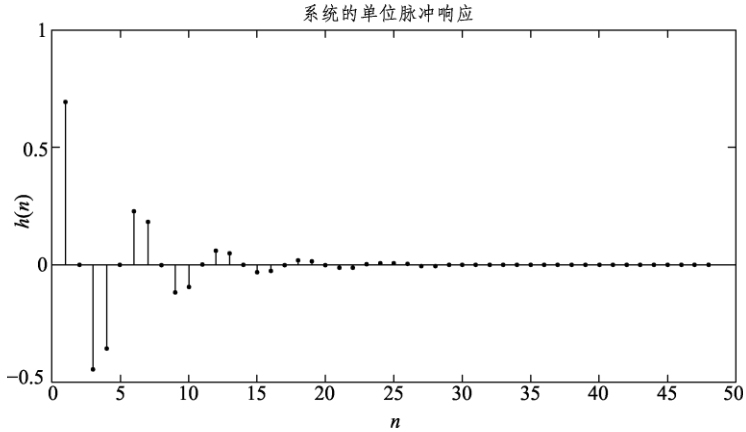
解：（1）

```
B=0.866,A=[1,-0.8,0.64];
xn=[1,zeros(1,48)];
hn=filter(B,A,xn);
n=0:length(hn)-1;
stem(n,hn,’.’);
title(‘系统的单位脉冲响应’);xlabel(‘n’);ylabel(‘h(n)’);
```

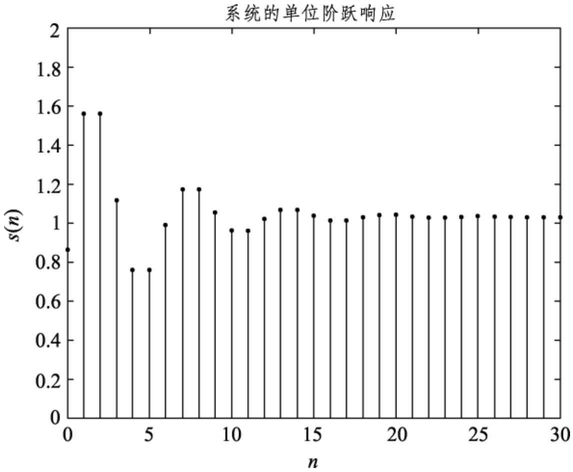
(2)

```
B=0.866,A=[1,-0.8,0.64];
xn=ones(1,100);
sn=filter(B,A,xn);
n=0:length(sn)-1;
stem(n,sn,’.’);axis([0,30,0,2])
title(‘系统的单位阶跃响应’);xlabel(‘n’);ylabel(‘s(n)’);
```

$h(n)$、$s(n)$ 波形如图 1.2.10 所示。



（a） $h(n)$ 的波形



（b） $s(n)$ 的波形

图 1.2.10　习题 20 第（1）、（2）波形图