

四川省高职单招考试复习指导

普高类

四川省高职单招 考试指南

数 学

主编 王 满

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

四川省高职单招考试指南：普高类. 2, 数学 / 王
满主编. —成都：西南交通大学出版社，2022.1
ISBN 978-7-5643-8376-3

I. ①四… II. ①王… III. ①中学数学课—高中—升
学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2021) 第 233374 号

前言

Preface

为了帮助广大考生全面、快速、高效地复习，并顺利通过四川省高职院校单独招生考试，鹏展教育组织部分资深骨干教师编写了“四川省高职单招考试复习指导”系列图书。为使考前指导更具有针对性，考虑到不同考生群体的知识水平和学习能力，我们将其分为了中职类和普高类。本系列图书根据考试结构和考生复习方法，在内容架构上设计了《考试指南》和《考前冲刺模拟试卷》。《考试指南》对语文、数学、英语三门学科的重要考点进行了全面的梳理和归纳，突出重难点，突破考点，旨在让考生对考纲要求和主要考点有一个全面的了解；《考前冲刺模拟试卷》则用于检测考生对考试结构、考试形式以及考点的掌握程度。

本系列图书在知识点讲解、题型分析和试题难度等方面均参考了历年考试真题和四川省最新考试大纲进行编写。本系列图书内容翔实、全面，难度适中，深入浅出，例题注重典型性，讲解注重基础性，练习具有针对性。例如《考试指南》循序渐进地点拨学习方法，精析典型例题，提示解题技巧，深入地探索了命题规律和解题规律，分析通俗易懂，分层次的知识点训练，强化知识的吸收、巩固，实现了知识的迁移，实用性、针对性较强。《考前冲刺模拟试卷》全面、系统、精确地分析了四川省高职单招考试的知识点，严格按照四川省真题难度命题，逼真模拟，并附有详细的答案及解题思路，以培养学生良好的作答习惯。本套试卷收录了经常考的题、举一反三的题、老师常讲的题以及学生易错的题、不会的题，具有较强的针对性和实用性。

本系列图书是为参加四川省高职院校单独招生考试的考生编写的一套学习指导用书，较为全面地介绍了高职院校单招文化课的知识要点，有针对性地进行应试指导，另外还附有资深教师的网络授课视频，能更加全面地指导考生掌握相关考点，全面复习。在编写过程中，我们参阅了大量有关高职院校单招考试方面的书籍，并引用了其中的一些资料，在此向作者表示感谢。由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，恳请各位同仁和读者批评指正，不胜感激。

“四川省高职单招考试复习指导”编写组

2021年8月

目 录

Content

第一章 集 合

第一节	集合的概念	1
第二节	集合的关系及运算	4
第三节	充要条件	8

第二章 不等式

第一节	不等式的基本性质	11
第二节	不等式的解法	13

第三章 函 数

第一节	函数的概念	18
第二节	函数的图像与性质	23
第三节	一次函数、二次函数的图像与性质	27
第四节	函数的应用	31

第四章 指数函数和对数函数

第一节	实数指数幂	35
第二节	幂函数	38
第三节	指数函数	42
第四节	对 数	45
第五节	对数函数	48

第五章 三角函数

第一节	角的推广及其度量	53
-----	----------	----

第二节	任意角的三角函数	55
第三节	诱导公式	58
第四节	和(差)角、倍(半)角公式	60
第五节	三角函数中的求角的问题	64
第六节	三角函数的图像和性质	66
第七节	正弦定理、余弦定理及其应用	71

第六章 数列

第一节	数列的概念	76
第二节	等差数列	78
第三节	等比数列	81

第七章 向量

第一节	向量及向量的加、减法	85
第二节	实数与向量的积、向量的数量积	87
第三节	向量的坐标运算	89

第八章 平面解析几何

第一节	两点间的距离公式及中点公式	93
第二节	直线的方程	95
第三节	两条直线的位置关系	97
第四节	圆	100
第五节	椭圆	102
第六节	双曲线	106
第七节	抛物线	109

第九章 立体几何

第一节	平面的基本性质	114
第二节	直线与直线、直线与平面、平面与平面平行的判定和性质	117
第三节	直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角	122
第四节	直线与直线、直线与平面、平面与平面垂直的判定和性质	128
第五节	柱、锥、球及简单几何体	135

第十章 概率与统计初步

第一节	排列与组合	141
第二节	二项式定理	148
第三节	概率初步	152
第四节	统计初步	156

第一章 集合

考点要求

1. 了解集合、空集的概念；掌握集合的表示方法.
2. 理解常用数集、解集的概念.
3. 理解集合用符号表示，元素与集合、集合与集合之间的关系（子集、真子集、集合相等）.
4. 理解集合与集合之间的关系及运算.
5. 理解充分条件、必要条件及充要条件.

第一节 集合的概念

知识要点

一、集合与元素

1. 集合与元素.

把某些确定的对象看成一个整体就构成一个集合，通常用大写字母 $A, B, C \dots$ 表示集合. 集合简称集. 集合中每个确定的对象称为这个集合的元素，通常用小写字母 $a, b, c \dots$ 表示集合中的元素.

2. 元素与集合的关系（见表 1-1）.

表 1-1 元素与集合的关系

关系	概念	符号	读法
属于	如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于集合 A	$a \in A$	a 属于集合 A
不属于	如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于集合 A	$a \notin A$	a 不属于集合 A

3. 集合中的元素的特性.

（1）确定性：对于一个给定的集合，任何一个对象或者是这个集合中的元素，或者不是它的元素，这是集合的最基本特性.

（2）互异性：集合中的任何两个元素都是能区分的（即互不相同的），相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素.

（3）无序性：在一个集合中，通常不考虑它的元素之间的顺序，如： $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$.

4. 集合的分类.

有限集：含有有限个元素的集合.

无限集：含有无限个元素的集合.

二、集合的表示方法

1. 常用数集（见表 1-2）.

表 1-2 常用数集

集合	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	\mathbf{N}	\mathbf{N}^+ 或 \mathbf{N}_+	\mathbf{Z}	\mathbf{Q}	\mathbf{R}

2. 空集.

不含任何元素的集合叫做空集，记作 \emptyset .

3. 集合表示的基本方法.

(1) 列举法：当集合元素不多时，常常把集合的元素一一列举出来，写在大括号内表示这个集合，这种表示集合的方法称为**列举法**. 如 $A = \{\text{小于 3 的自然数}\} = \{0, 1, 2\}$.

(2) 描述法：给定 x 的取值集合 I ，如果属于集合 A 的任一元素 x 都具有性质 $P(x)$ ，而不属于集合 A 的元素都不具有性质 $P(x)$ ，则性质 $P(x)$ 称为集合 A 的特征性质. 于是，集合 A 可用它的特征性质 $P(x)$ 描述为： $A = \{x | x \text{ 具有性质 } P(x), x \in I\}$. 这种表示集合的方法称为**描述法**. 如 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0, x \in \mathbf{R}\}$.

考点直击

例 1 下列表述中，可以构成集合的是（ ）.

- A. 本校身高较高的学生 B. 本班兴趣广泛的学生
C. 本校全体男生 D. 本班学习较好的女生

【分析与思路】 本题主要考查集合中元素的性质的确定性.

解 A、B、D 选项中都没有确定的标准，所以排除，答案选 C.

例 2 设集合 $A = \{x | x < 3, x \in \mathbf{N}\}$ ，则下列关系中正确的是（ ）.

- A. $-1 \in A$ B. $2 \in A$ C. $\{-1, 0, 1, 2\} \in A$ D. $A = \{1, 2, 3\}$

【分析与思路】 本题主要考查元素与集合之间的关系.

解 集合 A 包含的元素是“小于 3 的自然数”，即 $A = \{x | x < 3, x \in \mathbf{N}\} = \{0, 1, 2\}$ ，故答案选 B.

例 3 集合 $\{a, a^2 - a\}$ 中 a 满足的条件是_____.

【分析与思路】 本题主要考查集合中元素的性质：互异性.

解 因 a 和 $a^2 - a$ 是集合的两个元素，则有 $a \neq a^2 - a$ ，所以 $a^2 - 2a \neq 0$ ， $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$ ，即满足的条件是 $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$.

例 4 用列举法表示下列集合：

- (1) 小于 15 大于 4 的全体奇数；
(2) 方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集；
(3) $B = \{(x, y) | x + y = 4, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$.

【分析与思路】 本题考查集合的表示方法：列举法. 根据集合描述，列举集合所包含的元素即可.

解 (1) $A = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ ；(2) $C = \{-1, 1\}$ ；(3) 该集合表示平面点集，其中 x, y 都是自然数， x, y 满足 $x + y = 4$ ，故 $B = \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$.

例 5 用描述法表示下列集合：

- (1) 不大于 2 的全体实数；
(2) 不等式 $x^2 - 3x \leq 0$ 的解集；

(3) 平面直角坐标系中, 第二象限的点的集合.

【分析与思路】 本题考查集合的表示方法: 描述法. 只需要用集合的元素满足的性质 $P(x)$ 表示即可.

解 (1) $A = \{x | x \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$;

(2) $B = \{x | 0 \leq x \leq 3, x \in \mathbf{R}\}$;

(3) $C = \{(x, y) | x < 0, y > 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$.

例 6 已知 $A = \{x | x^2 + mx + 4 = 0, x \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 是空集, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若集合 A 只有一个元素, 求 m 的值, 并求集合 A 的元素.

【分析与思路】 本题考查集合、元素的概念及含有参数的二次方程根的判断.

解 (1) A 为空集, 即二次方程 $x^2 + mx + 4 = 0$ 在实数范围内没有解, 则 $\Delta = m^2 - 4 \times 4 < 0$, 解得 $-4 < m < 4$.

(2) A 中只有一个元素, 即二次方程有唯一解, 则 $\Delta = m^2 - 4 \times 4 = 0$, 解得 $m = \pm 4$.

当 $m = 4$ 时, $x = -2$, 此时 $A = \{-2\}$;

当 $m = -4$ 时, $x = 2$, 此时 $A = \{2\}$.

实战演练

一、选择题

- 下列表述不能确定为集合的是 ().
A. 小于 50 的质数的全体
B. 数轴上到原点的距离大于 1 的全体
C. 无限接近 2 的所有实数的全体
D. 体重不大于 60 公斤的人的全体
- 下列命题正确的是 ().
A. $\{2, 1\}$ 和 $\{1, 2\}$ 是两个不同的集合
B. $A = \{x | x^2 - x + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 是空集
C. 小于 10 的奇数的集合是有限集合
D. 若 $x \in \mathbf{N}_+, y \in \mathbf{N}$, 则 $x + y$ 的最小值为 2
- 已知集合 $A = \{(0, 2)\}$, 则下列表示正确的是 ().
A. $0 \in A$
B. $2 \in A$
C. $(0, 2) \in A$
D. $(2, 0) \in A$
- 若集合 $A = \{x | kx^2 + kx + 4 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 只有一个元素, 则实数 k 为 ().
A. 16
B. 0
C. 16 或 0
D. 以上选项都不对
- 方程组 $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ 的解集为 ().
A. $\{-1, 2\}$
B. $\{(-1, 2)\}$
C. $(-1, 2)$
D. $\{(x, y) | x = -1 \text{ 或 } y = -2\}$
- 下列不等式中, 解集为空集的是 ().
A. $4x^2 - 20x + 25 > 0$
B. $2x^2 - 4\sqrt{3}x + 6 \leq 0$
C. $3x^2 - 3x + 1 > 0$
D. $2x^2 - 2x + 1 < 0$
- 不等式 $x^2 + 2x + 1 > 0$ 的解集是 ().
A. \emptyset
B. \mathbf{R}
C. $\{x | x = -1\}$
D. $\{x | x \neq -1\}$

二、填空题

- 用列举法表示不等式组 $\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ x + 1 \geq 2x - 1 \end{cases}$ 的整数解集为_____.

2. 若方程 $x^2 + ax + b = 0$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的解集为 $\{-2, -1\}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 已知二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实根为 -3 和 5 , 而实数 $a > 0$, 则不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $\underline{\hspace{4cm}}$.
4. 已知 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x = |y|, y \in A\}$, 则集合 $B = \underline{\hspace{4cm}}$.

三、计算题

已知集合 $A = \{x | mx^2 + 2x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{R}\}$.

- (1) 若集合 A 只有一个元素, 求 m 的值, 并求集合 A 的元素;
 (2) 若 A 中至多有一个元素, 求 m 的取值范围.

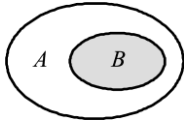
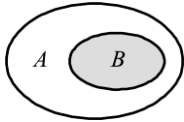
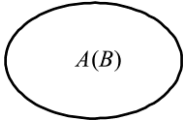
第二节 集合的关系及运算

知识要点

一、集合的关系

1. 子集、真子集与集合相等 (见表 1-3).

表 1-3 子集、真子集与集合相等

	子集	真子集	集合相等
概念	如果集合 B 中的元素都是集合 A 中的元素, 那么 B 叫做 A 的子集	如果集合 B 是集合 A 的子集, 并且 A 中至少有一个元素不属于 B , 那么 B 叫做 A 的真子集	如果两个集合的元素完全相同, 那么就说这两个集合相等
记法	$B \subseteq A$	$B \subsetneq A$	$B = A$
读法	B 包含于 A (A 包含 B)	B 真包含于 A (A 真包含 B)	集合 A 等于集合 B
图示			
性质	(1) 任何一个集合是它本身的子集; (2) 对于集合 A, B, C , 如果 $C \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $C \subseteq A$	(1) 对于集合 A, B , 如果 $B \subseteq A$ 且 $A \neq B$, 则 $B \subsetneq A$; (2) 对于集合 A, B, C , 如果 $C \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq A$, 则 $C \subsetneq A$	(1) $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$; (2) 两个集合中的元素完全相同

2. 空集.

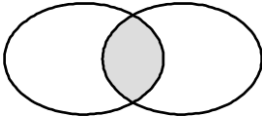
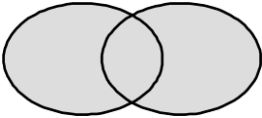
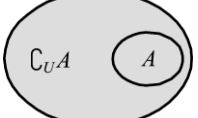
不含有任何元素的集合称为空集，记为 \emptyset 。

空集的性质：

- (1) 空集是任何集合的子集；
- (2) 空集是任何非空集合的真子集；
- (3) 空集只有一个子集，即它本身。

二、集合的运算 (见表 1-4)

表 1-4 集合的运算

类型	交集	并集	补集
定义	由所有属于 A 且所有属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$	由所有属于 A 或所有属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$	设 A 是 U 的子集，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为 U 中子集 A 的补集，记为 $\complement_U A$
数学语言	$A \cap B = \{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	$A \cup B = \{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$	$\complement_U A = \{x x \in U, x \notin A\}$
Venn 图			
性质	$A \cap A = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap B = B \cap A$ $(A \cap B) \subseteq A$ $(A \cap B) \subseteq B$	$A \cup A = A$ $A \cup \emptyset = A$ $A \cup B = B \cup A$ $A \subseteq (A \cup B)$ $B \subseteq (A \cup B)$	$(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U (A \cup B)$ $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \complement_U (A \cap B)$ $(\complement_U A) \cup A = U$ $(\complement_U A) \cap A = \emptyset$

考点直击

例 1 用适当的符号填空 ($=, \in, \notin, \subseteq, \supseteq$):

- (1) \emptyset _____ $\{a\}$; (2) a _____ $\{a\}$; (3) $\{a\}$ _____ $\{a, b\}$; (4) $\{a\}$ _____ $\{a\}$;
 (5) $\{1, 2\}$ _____ $\{1, 2, 3\}$; (6) 4 _____ $\{x | x^2 + 3x - 4 = 0\}$; (7) \emptyset _____ $\{x | |x| < 0\}$.

【分析与思路】 本题考查集合元素、集合与集合之间的关系。

解 (1) \supseteq ; (2) \in ; (3) \supseteq ; (4) $=$; (5) \supseteq ; (6) \notin ; (7) $=$.

例 2 已知集合 $A = \{x | x^2 = 1\}$, $B = \{-1, 0, 3a - 5\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的值为_____.

【分析与思路】 本题考查集合之间的关系. 题设中 $A \subseteq B$, 即 A 是 B 的子集, A 的所有元素被 B 包含.

解 因 $A \subseteq B$, 则 A 的所有元素被 B 包含, 而 $A = \{x | x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$, 则 $3a - 5 = 1$, 解得.

例 3 若 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$, $B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$, $C = \{4, 7, 9\}$, 则 $(A \cap B) \cup (A \cap C) =$ _____.

【分析与思路】 本题考查集合的交、并运算.

解 根据题设, $A \cap B = \{1, 4\}$, $A \cap C = \{4, 7\}$, 则 $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 4, 7\}$.

例 4 设集合 $M = \{(x, y) | x - y = 1\}$, $A = \left\{ (x, y) \left| \frac{y+1}{x} = 1 \right. \right\}$, 则 $\complement_M A =$ _____.

【分析与思路】 本题考查补集的运算.

解 集合 M 表示直线 $x - y = 1$ 上所有点的集合, 而集合 A 是直线 $x - y = 1$ 上的点除去点 $(0, -1)$, 因此 $\complement_M A = \{(0, -1)\}$.

例5 已知 $A = \{x | 1 \leq x < 4\}$, $B = \{x | x < a\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【分析与思路】 本题考查集合之间真包含的关系. 只需掌握真包含的概念, 借助数轴即可解决此类问题.

解 作图 (见图 1-1), 由图可知, 若要满足 $A \subseteq B$, 只需 $a > 4$.

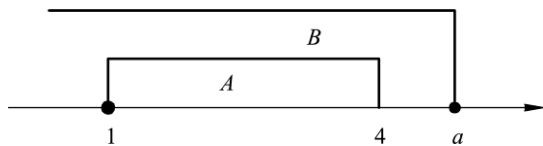


图 1-1

例6 已知 $A = \{x | 0 \leq x < 3\}$, $B = \{x | x \geq a\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【分析与思路】 本题考查集合之间交集的运算. 理解交集的运算、空集的定义, 借助数轴解决该问题.

解 根据题意, 作图 (见图 1-2), 若要 $A \cap B = \emptyset$, 只需 $a \geq 3$ 即可.



图 1-2

例7 满足 $\{1\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3\}$ 的集合 M 为_____.

【分析与思路】 本题主要考查集合之间的包含、真包含的定义及含有 n 个元素具有真子集、子集的个数. 首先确定集合 M 可以取得元素的范围, 再确定满足该条件的集合 M .

解 因为 $\{1\} \subseteq M$, 则集合 M 必须含有 1 这个元素. 又 $M \subseteq \{1, 2, 3\}$, 即 M 是 $\{1, 2, 3\}$ 的真子集, 故满足条件的集合 M 可以是 $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}$.

实战演练

一、选择题

- 集合 $\{1, 2, 3\}$ 含有的真子集的个数为 ().
A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
- 下列选项正确的是 ().
A. $2 \notin \{2, 3\}$ B. $\{2\} \in \{2, 3\}$ C. $\{2\} \subseteq \{2, 3\}$ D. $\{2\} = \{2, 3\}$
- 设 $A = \{x | x < 3\}$, $B = \{x | x > -1\}$, 则 $A \cap B =$ ().
A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{x | -1 < x < 3\}$
C. $\{x | x < 3 \text{ 或 } x > -1\}$ D. \emptyset
- 已知集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{x | x^2 + y^2 = 1, y \in A\}$, 则 A 与 B 的关系是 ().
A. $A = B$ B. $A \subseteq B$ C. $B \subseteq A$ D. $A \supseteq B$
- 若 A 为全体正实数的集合, $B = \{-2, -1, 1, 2\}$, 则下列结论中正确的是 ().
A. $A \cap B = \{-2, -1\}$ B. $(\partial_{\mathbb{R}} A) \cup B = (-\infty, 0)$
C. $A \cup B = (0, +\infty)$ D. $(\partial_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{-2, -1\}$
- 已知全集 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A = \{1, 3, 7\}$, 则 $\partial_U A =$ ().
A. $\{5, 7, 9\}$ B. $\{1, 3, 7\}$ C. $\{5, 9\}$ D. \emptyset
- 已知全集 $U = \mathbb{Z}$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | x = x^2\}$, 则 $(\partial_U B) \cap A =$ ().

- A. $\{-1,2\}$ B. $\{-1,0\}$ C. $\{0,1\}$ D. $\{1,2\}$
8. 设 U 是全集, 集合 P, Q 满足 $P \subseteq Q$, 则下列结论中错误的是 ().
- A. $P \cup \complement_U P = U$ B. $Q \cup \complement_U P = U$
- C. $P \cap \complement_U Q = \emptyset$ D. $(\complement_U P) \cap (\complement_U Q) = \complement_U P$

9. 下列命题中:

- (1) 空集没有子集; (2) 空集是任何集合的子集;
- (3) 空集的元素个数为零; (4) 任何一个集合必有两个或两个以上的子集.

其中正确的有 () 个.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
10. 设 $U = \{x | x \text{ 是小于 } 9 \text{ 的正整数}\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = ()$.
- A. $\{1, 2\}$ B. $\{3, 4\}$ C. $\{5, 6\}$ D. $\{7, 8\}$

二、填空题

1. 已知 $A = \{-1, 3, m\}$, $B = \{3, 4\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 $m =$ _____.
2. 设集合 $A = \{(x, y) | 2x + 3y = 0\}$, $B = \{(x, y) | x - y = 5\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
3. 全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x < 6\}$, $B = \{x | x \geq -1\}$, 则 $\complement_U (A \cup B) =$ _____.

三、计算题

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - px + 15 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, 若 $A \cap B = \{3\}$, 求 $A \cup B$, 并写出集合 $A \cup B$ 的所有子集.

2. 设集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 15 \leq 0\}$, $B = \{x | m - 2 < x < 2m - 3\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

3. 已知 $A = \{-2\}$, $B = \{x | x^2 + ax + a^2 - 12 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

实战演练

一、选择题

- 下列命题中, p 是 q 的充要条件的是 ().
 - $p: 3x+2>5, q: -2x-3>-5$
 - $p: a>2, b<2, q: a>b$
 - p : 四边形的两条对角线互相垂直平分, q : 四边形是正方形
 - $p: a \neq 0, q$: 关于 x 的方程 $ax=1$ 有唯一解
- 设 $p: 0 < x < 5, q: |x-2| < 3$, 则 p 是 q 的 ().
 - 充分条件
 - 必要条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- 对于 A, B, C 三个集合, 为使 $A \subseteq B \cup C$, 条件 $A \subseteq B$ 是 ().
 - 充分条件
 - 必要条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- 设甲、乙、丙是三个命题, 如果甲是乙的必要条件, 丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件, 那么 ().
 - 丙是甲的充分条件, 但不是甲的必要条件
 - 丙是甲的必要条件, 但不是甲的充分条件
 - 丙是甲的充要条件
 - 丙不是甲的充分条件, 也不是甲的必要条件
- 在 $\triangle ABC$ 中, $p: a > b, q: \angle BAC > \angle ABC$, 则 p 是 q 的 ().
 - 充分条件
 - 必要条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- $x=2$ 是 $(x-1)(x-2)=0$ 的 ().
 - 充分条件
 - 必要条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- 已知 $p: t \neq 2, q: t^2 \neq 4$, 则 p 是 q 的 ().
 - 充分条件
 - 必要条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- $a=2$ 是 $f(x) = x^2 + ax + 1$ 在区间 $[-1, +\infty)$ 上为增函数的 ().
 - 充分条件
 - 必要条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- “ θ 是锐角” 是 “ $\sin \theta > 0$ ” 的 ().
 - 充分条件
 - 必要条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- A, B 是两个集合, 则 $A \cap B = A$ 是 $A = B$ 的 ().
 - 充分条件
 - 必要条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件

二、填空题

1. 用符号 $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \perp$ 填空:

(1) $a > 5$ _____ $a > 2$;

(2) 四边形的四边相等 _____ 四边形是正方形;

(3) $a < 5$ _____ $\frac{a}{b} < 1$;

(4) 数 a 能被 6 整除 _____ 数 a 能被 3 整除.

2. $\theta = 30^\circ$ 是 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 的 _____ 条件.

3. $p: |x| > 1$, $q: x < -2$, 则 p 是 q 的 _____ 条件.

4. 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $m+n = p+q$ 是 $a_m + a_n = a_p + a_q$ 的 _____ 条件.

第二章 不等式

考点要求

1. 理解不等式的基本性质、区间的概念；会用数轴和作差比较法比较实数的大小.
2. 掌握一元一次不等式、一元一次不等式组、二次一次不等式的解法.
3. 理解含绝对值不等式的解法，会求解含绝对值的简单不等式.

第一节 不等式的基本性质

知识要点

一、比较实数大小的方法

1. 实数与数轴上的点一一对应，数轴上任意两点中，右边的点对应的实数比左边的点对应的实数大.
2. 两个任意的实数 a 和 b ，有
(1) $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$ ；(2) $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$ ；(3) $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$.

二、不等式的性质

1. 同向不等式：不等号方向一致的不等式；
异向不等式：不等号方向不一致的不等式.
2. 对称性： $a>b \Leftrightarrow b<a$.
3. 传递性：若 $a>b, b>c$ ，则 $a>c$.
4. 可加性： $a>b \Rightarrow a+c>b+c$.
推论 1 (移项法则) 若 $a+b>c$ ，则 $a>c-b$.
推论 2 $a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$.
5. 可乘性：若 $a>b, c>0$ ，则 $ac>bc$ ；若 $a>b, c<0$ ，则 $ac<bc$.
推论 1 $a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$.
推论 2 $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n (n \in \mathbf{N}_+)$.
推论 3 $a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N}_+, n>1)$.

考点直击

例 1 比较下列各式的大小：

- (1) $(a+1)(a+2)$ 和 $(a-1)(a+4)$ ；(2) a^2+5 和 $4a$.

【分析与思路】 本题考查实数大小的比较，利用作差法判断.

二、填空题

1. 已知 $a+b>0, b<0$ ，从大到小将 $a, b, -a, -b$ 用不等号连接起来为_____.

2. 比较以下各组数的大小：

(1) 3.5^{-2} _____ $3.5^{-\sqrt{2}}$ ； (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ _____ 1； (3) 0.3^2 _____ $0.3^{2.1}$ ；

(4) $\log_2 3$ _____ $\log_2 \sqrt{3}$ ； (5) $\log_{0.2} \sqrt{3}$ _____ $\log_{0.2} \sqrt{5}$.

3. “ $a>0$ 且 $b<0$ ”是“ $ab<0$ ”的_____条件.

三、计算题

比较 x^2+x-1 与 $3(x-1)$ 的大小.

第二节 不等式的解法

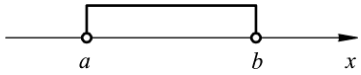
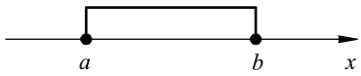
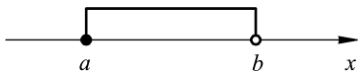
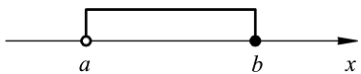
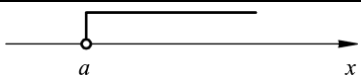
知识要点

一、区间及相关概念

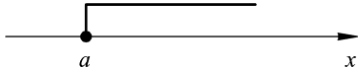
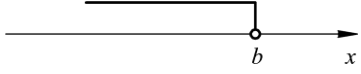


1. 区间：由数轴上两点间的一切实数所组成的集合称为区间，点称为区间的端点.
2. 开区间：不含端点的区间.
3. 闭区间：含有两个端点的区间.
4. 右半开区间：只含左端点的区间.
5. 左半开区间：只含右端点的区间.

常见区间见表 2-1.

表 2-1 常见区间

集合表示	区间表示	数轴表示
$\{x a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x a < x\}$	$(a, +\infty)$	

续表

集合表示	区间表示	数轴表示
$\{x a \leq x\}$	$[a, +\infty)$	
$\{x x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
\mathbf{R}	$(-\infty, +\infty)$	

二、不等式的有关概念

1. 不等式的解集：在含有未知数的不等式中，能使不等式成立的未知数的值的全体所构成的集合。
2. 同解不等式：如果两个不等式的解集相等，则称它们是同解不等式。
3. 同解变形：把一个不等式变成它的同解不等式的过程。
4. 解不等式：求出不等式的解集，并求出表明未知数取值范围的集合的过程。

三、一元一次不等式和不等式组

1. 一元一次不等式：只含有一个未知数，且未知数的次数是 1 的不等式。
2. 一元一次不等式组： n ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+$) 个一元一次不等式所组成的不等式组。
3. 不等式组的解集：组成不等式组的所有不等式的解集的交集构成的集合。

四、一元二次不等式

1. 一元二次不等式：只含有一个未知数，且未知数的最高次数为 2 的不等式。
2. 解一元二次不等式的基本步骤：
 - (1) 判断二次项系数是否为正数；如果不是，那么将不等式的两边同时乘以 -1 。
 - (2) 判断对应的一元二次方程解的情况；如果有解，求出方程的解。
 - (3) 根据表 2-2 写出一元二次不等式的解集。

表 2-2 一元二次不等式的解集

方程或不等式 ($a > 0$)	解集		
	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_0\}$	\emptyset
$ax^2 + bx + c > 0$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	$(-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$	\mathbf{R}
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$	\mathbf{R}	\mathbf{R}
$ax^2 + bx + c < 0$	(x_1, x_2)	\emptyset	\emptyset
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$[x_1, x_2]$	$\{x_0\}$	\emptyset

注： $\Delta = b^2 - 4ac$ ， $x_1 < x_2$ 。

五、含绝对值的不等式

1. 绝对值不等式：含有绝对值符号且绝对值符号内含有未知数的不等式.

2. 两种含绝对值的基本不等式的解集：

(1) 不等式 $|x| < a$ ($a > 0$) 的解集是 $(-a, a)$ ；

(2) 不等式 $|x| > a$ ($a > 0$) 的解集是 $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

考点直击

例 1 不等式 $x^2 - x - 2 \geq 0$ 的解集为_____.

【分析与思路】 本题考查一元二次不等式的解法，并用区间表示解集.

解 不等式 $x^2 - x - 2 \geq 0$ 对应的一元二次方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的解为 $x_1 = -1, x_2 = 2$ ，则不等式 $x^2 - x - 2 \geq 0$ 的解集为 $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.

例 2 设函数 $f(x) = 3^x$ ，不等式 $f(x-6) > 3$ 的解集为_____.

【分析与思路】 本题考查不等式的解法. 先写出最终要求解的不等式，再根据指数函数的单调性求解.

解 因为 $f(x) = 3^x$ ，则 $f(x-6) = 3^{x-6}$ ，从而求解的不等式为 $f(x-6) = 3^{x-6} > 3$. 又因为 $f(x) = 3^x$ 在定义域内单调递增，则 $3^{x-6} > 3^1 \Rightarrow x-6 > 1$ ，解得 $x > 7$ ，故所求不等式的解集为 $(7, +\infty)$.

例 3 不等式 $-2x^2 + x + 3 < 0$ 的解集为_____.

【分析与思路】 本题考查一元二次不等式的解法. 注意到不等式二次项的系数为 -2 ，故转化为同解不等式 $2x^2 - x - 3 > 0$ 的求解.

解 不等式两边乘以 -1 转化为 $2x^2 - x - 3 > 0$ ，其对应的一元二次方程 $2x^2 - x - 3 = (2x-3)(x+1) = 0$ 的两个实根为 $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2}$ ，故所求不等式的解集为 $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

例 4 求函数 $f(x) = \frac{\lg(x^2 - 2x - 3)}{\sqrt{3 - |x - 2|}}$ 的定义域.

【分析与思路】 本题考查函数定义域的求法. 求函数定义域时，要注意对数函数的真数要大于零、开算术平方根要大于等于零、分式分母不能为零等，本题涉及一元二次不等式及绝对值不等式组成的不等式组.

解 根据题意，有

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 3 - |x - 2| > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1) > 0 \\ |x-2| < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ 或 } x > 3 \\ -1 < x < 5 \end{cases}$$

作图（见图 2-1）.

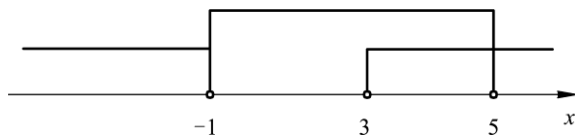


图 2-1

所以函数的定义域为 $(3, 5)$.

例 5 当 k 为何值时，关于 x 的方程 $kx^2 - (k-1)x + k - 1 = 0$ 有实数解.

【分析与思路】 本题主要考查方程解的判断及一元二次不等式的解法. 要考虑到未知数 x^2 的系数是 k , 当 $k=0$ 时, 方程是一元一次方程; 当 $k \neq 0$ 时, 方程是一元二次方程.

解 当 $k=0$ 时, 原方程简化为 $x-1=0$, 有实数解 $x=1$;

当 $k \neq 0$ 时, 原方程为一元二次方程, 则

$$\Delta = (k-1)^2 - 4k(k-1) = -3k^2 + 2k + 1 \geq 0$$

解得 $-\frac{1}{3} \leq k \leq 1$.

故原方程有实数解的 k 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

实战演练

一、选择题

- 已知区间 $I_1 = (1, 5), I_2 = (-2, 6)$, 则 $I_1 \cap I_2 = (\quad)$.
A. $(-2, 6)$ B. $(1, 5)$ C. \mathbf{R} D. \emptyset
- 已知区间 $I_1 = [-2, 4], I_2 = [0, 7]$, 则 $I_1 \cup I_2 = (\quad)$.
A. $[-2, 7]$ B. $[0, 4]$ C. \mathbf{R} D. \emptyset
- 设全集为 \mathbf{R} , $A = (0, 3)$, 则 $\delta_{\mathbf{R}}A = (\quad)$.
A. $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ B. $[-\infty, 0) \cup (3, +\infty]$
C. $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$
- 不等式 $7(x-2) \leq 4x+1$ 的解集为 (\quad) .
A. $(-\infty, 5)$ B. $(-\infty, 5]$ C. \mathbf{R} D. \emptyset
- 不等式组 $\begin{cases} 3x-4 > 2x-2 \\ 5x+6 > 13x-4 \end{cases}$ 的解集为 (\quad) .
A. $(2, +\infty)$ B. \emptyset
C. $\left(\frac{5}{4}, 2\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \cup (2, +\infty)$
- 不等式 $\frac{4-x}{2x-3} > 0$ 的解集为 (\quad) .
A. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ B. $(4, +\infty)$
C. $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup (4, +\infty)$
- 下列不等式中, 解集为空集的是 (\quad) .
A. $x^2 - 2x + 3 > 0$ B. $(x-1)^2 \leq 0$
C. $|5x+7|+1 < 0$ D. $\frac{1}{x^2} > 0$
- 一元二次方程 $mx^2 - 3x + \frac{3}{4}m = 0$ 有实数解的条件是 $m \in (\quad)$.
A. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ B. $(-\infty, -\sqrt{3})$
C. $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$ D. $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{3}, +\infty)$
- 不等式 $2 \leq |2x+5| < 3$ 的解集是 (\quad) .

A. $\left(-4, -\frac{7}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, -1\right)$

B. $(-4, -1) \cup \left[-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right]$

C. $(-4, -1)$

D. $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right]$

10. 不等式组 $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ 2x - 3 < 7 \end{cases}$ 的解集为 ().

A. $[-3, 1]$

B. $(-\infty, -3]$

C. $(-\infty, -3) \cup [1, 5)$

D. \emptyset

二、填空题

1. 若集合 $A = (-1, +\infty)$, $B = (-\infty, 4]$, 则 $A \cup B =$ _____, $A \cap B =$ _____.

2. 不等式 $(x+3)^2 > 9$ 的解集是_____.

3. 不等式 $\frac{3x-2}{4x-3} \leq 2$ 的解集是_____.

4. 不等式 $1 \leq |1-2x| < 3$ 的解集是_____.

5. 不等式组 $\begin{cases} x^2 - x - 12 \leq 0 \\ |2x+3| > 7 \end{cases}$ 的解集是_____.

三、计算题

已知 $-2x^2 + bx - c > 0$ 的解集为 $(1-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$, 求参数 b, c 的值.