

四川省产教融合示范项目系列教材

有限元法及其应用

向维 吴晓 于兰峰 © 编著

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

有限元方法 (Finite Element Method) 作为目前实际工程应用最广泛的一种数值计算方法, 其主要思想是将连续的求解域离散为有限个单元的集合, 每个单元采用假定的试函数来替代单元的场函数, 通过节点将有限个离散单元连接起来, 从而将连续的无限自由度求解问题转化为离散的有限自由度求解问题。从数学上来讲, 有限元法就是求解微分方程组边界值问题近似解的数值方法。

随着计算机技术的不断发展, 有限元方法获得极大的推广和应用, 出现了 MSC Nastran、ANSYS 等大型商业有限元软件。有限元分析已成为解决工程实际问题必不可少的工具, 其计算结果已成为结构设计和工程分析的可靠参考依据, 在机械、建筑、航空航天等行业有着广泛的应用。

目前, 大部分工科院校机械类、土木类、航空航天类本科专业都开设了有限元分析及应用方面的课程, 目的是使学生了解有限元理论以及掌握应用有限元分析软件分析实际工程问题的方法。然而, 目前大多数的有限元教材主要分为两类: 一类侧重于有限元理论, 内容包括变分原理、单元的构造、单元质量矩阵和刚度矩阵的计算、有限元编程的技巧等, 其定位是研究生教学, 起点较高, 对于只有材料力学基础的本科生而言有一定难度; 另一类侧重于应用现有软件进行结构分析, 内容偏重于建立模型、网格划分技巧、边界条件的处理等, 主要供工程技术人员使用。因此, 本书作者的初衷是为力学基础有限的工科专业本科生编写一本简明易懂、内容深度适中的有限元教材, 同时也适合工程技术人员自学使用。

考虑到有限元理论深奥难懂而本科生的力学和数学基础有限的情况, 本书的理论知识部分是从材料力学的角度出发, 通过杆系结构的直接解法引入有限元法的基本概念、原理和方法, 继而在弹性力学和虚功原理的基础上进一步介绍平面问题的有限元。

第 1~3 章为本书的理论篇, 其内容框架如下:

第 1 章是有限元方法概述, 介绍有限元方法的发展历程、发展趋势、基本概念和分析步骤。

第 2 章通过杆系结构的直接解法推导杆单元和梁单元的刚度矩阵, 通过刚度集成法建立系统的平衡方程, 并介绍了边界条件的处理方法。

第 3 章介绍了二维结构的有限元格式。重点介绍了平面问题, 从位移函数的选取出发, 从弹性力学的角度推导了单元的应变矩阵、应力矩阵, 并应用虚功原理推导单元的平衡方程、刚度矩阵和节点等效力。此外, 对薄板弯曲问题和剪切板弯曲问题也做了简单介绍。

第 4~10 章是本书的应用篇, 是针对通用有限元软件 ANSYS 编写的, 该部分是本书作者根据多年教学实践编写而成, 其特点是简明易懂、针对性强。关于操作实例, 本书搜集、精选了有实用价值和代表性的综合实例, 主要包括机械行业常见的桁架结构、钢架结构、轴承

座结构、塔式起重机金属结构等，分析类型主要包括静力学分析和模态分析、谐响应分析和瞬态响应分析。内容框架如下：

第4章主要介绍 ANSYS 软件的分析类型、用户界面、操作模式、文件类型、坐标系和单位制。

第5章介绍了典型的 ANSYS 分析过程，包括：创建有限元模型、施加载荷进行求解以及查看分析结果。

第6~9章分别介绍了二维和三维实体结构、板壳及梁杆结构的有限元静力学分析，主要内容包括：①常用2D实体单元（PLANE），3D实体单元（SOLID），壳单元（SHELL），梁单元（BEAM）和杆单元（LINK）的性能；②平面托架结构有限元分析实例；③轴承座及汽车连杆结构有限元分析实例；④门式起重机金属结构系统有限元分析实例及参数化建模方法；⑤桁架结构、空间刚架结构有限元分析实例。

第10章介绍了基于 ANSYS 的动力学分析，主要内容包括：①模态分析、谐响应分析和瞬态动力学分析的概念、方法和步骤；②质量单元（MASS21）、弹簧单元（COMBIN）的性能；③耦合和约束方程的概念及设置方法，刚性区设置方法；④载荷步、子步、步长的概念，动载荷加载方式；⑤弹簧质点系统，飞机机翼模态分析实例，“工作台-电动机”系统的谐响应分析实例，板梁结构工作台瞬态动力学分析实例。

本书的出版得到了四川省产教融合示范项目“交大-九洲电子信息装备产教融合示范”的资助。

向 雅

2022年6月

第 1 章 有限元方法概述	1
1.1 有限元法的发展历程	1
1.2 有限元法及分析软件的发展趋势	2
1.3 有限元法的概念	3
1.4 有限元法的分析步骤	4
1.5 使用商用软件进行结构分析的步骤	5
第 2 章 杆系结构的有限元法——直接法	8
2.1 基本概念	8
2.2 平面桁架	9
2.3 平面刚架	25
第 3 章 二维问题有限元	39
3.1 平面问题	39
3.2 薄板弯曲问题	52
3.3 剪切板	63
第 4 章 有限元软件 ANSYS 简介	69
4.1 ANSYS 的分析类型	69
4.2 ANSYS 的用户界面	70
4.3 ANSYS 的操作模式	70
4.4 ANSYS 的文件类型	71
4.5 ANSYS 的坐标系	72
4.6 ANSYS 的单位制	74
第 5 章 典型的 ANSYS 分析过程	75
5.1 创建有限元模型	75
5.2 施加载荷进行求解	85
5.3 查看分析结果	94

第 6 章 二维实体结构有限元分析	99
6.1 二维结构问题	99
6.2 二维实体单元	100
6.3 平面托架结构有限元分析实例	102
6.4 厚壁圆筒应力分析	107
第 7 章 三维实体结构有限元分析	113
7.1 常用三维实体单元的特性	113
7.2 实体单元的选择	114
7.3 轴承座结构有限元分析实例	114
7.4 汽车连杆结构有限元分析实例	121
第 8 章 板壳结构有限元分析	127
8.1 常用 SHELL 单元的特性	127
8.2 壳单元的选择	129
8.3 门式起重机结构系统有限元分析实例	129
8.4 塑料凳结构有限元分析实例	137
第 9 章 梁/杆结构有限元分析	149
9.1 常用 LINK 单元的特性	149
9.2 常用 BEAM 单元的特性	150
9.3 桁架结构有限元分析实例	152
9.4 钢架结构有限元分析实例	157
9.5 定制 BEAM188/189 单元的用户化截面	160
第 10 章 ANSYS 动力学分析	161
10.1 模态分析	161
10.2 谐响应分析	167
10.3 瞬态动力学分析	171
10.4 谱分析	176
10.5 动力学分析中的阻尼	179
参考文献	182

第 1 章 有限元方法概述

1.1 有限元法的发展历程

有限元法的出现与发展有着深刻的工程背景。20 世纪 40 年代，美、英等国的飞机制造业有了快速发展。随着飞机结构的逐渐变化，准确地了解飞机的静态特性和动态特性显得越来越迫切，但是传统的设计分析方法已经不能满足设计的需要，因此工程设计人员开始寻找一种更加适合分析的方法，于是出现了有限单元法。1943 年，Courant^[1]就提出用有限个三角形上的简单多项式函数替换整体函数来求解扭转问题。1960 年，Clough^[2]在研究平面弹性问题时，首次提出把这种方法命名为“有限元法”。1967 年，Zienkiewicz 和 Cheung 撰写了首部有限元法专著 *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*^[3]，该书是有限元领域最早、最著名的专著，其最新版本为 2013 年出版的第七版^[4]，内容由最初版本的一卷本扩展到四卷本，从结构、固体扩展到流体，凝聚了作者多年的研究成果，荟萃了近千篇文献的精华，深受全世界力学界、其他科学和工程界科技人员的欢迎，成为有限元领域的经典之作，为有限元法的推广应用、普及做出了杰出和奠基性的贡献。

20 世纪 60 年代初，我国的冯康在特定的环境中并行于西方，独立地发展了有限元法的理论。1964 年，他创立了数值求解偏微分方程的有限元方法，形成了标准的算法形态，编制了通用的工程结构分析计算程序。1965 年，他发表论文《基于变分原理的差分格式》，标志着有限元法在中国的诞生。1997 年春，菲尔兹奖得主、中国科学院外籍院士丘成桐教授在清华大学所作题为“中国数学发展之我见”的报告中提到：“中国近代数学能超越西方或与之并驾齐驱的主要原因有三个，当然我不是说其他工作不存在，主要是讲能够在数学历史上很出名的有三个：一个是陈省身教授在示性类方面的工作，一个是华罗庚在多复变函数方面的工作，一个是冯康在有限元计算方面的工作”。

1970 年以后，随着计算机技术的飞速发展，有限元法中人工难以完成的大量计算工作能够由计算机来实现并快速地完成，基于有限元方法原理的软件大量出现，并在实际工程中发挥了愈来愈重要的作用。目前，专业的著名有限元分析软件公司有几十家，国际上著名的通用有限元分析软件有 ANSYS 和 ABAQUS 等，还有一些专门的有限元分析软件，如 FELAC、DEFORM 等。

1995 年，钱学森在《我对今日力学的认识》中提到，今日力学是一门用计算机计算去回答一切宏观的实际科学技术问题，计算方法非常重要；另一个辅助手段是巧妙设计的实验。

现在，有限元法已成为工程和产品结构分析中必不可少的数值计算工具，其应用范围已经从最初的只能解决固体力学问题，发展到可以分析连续力学各类问题的一种重要手段。

到目前为止，有限元法已被应用于固体力学、流体力学、热传导、电磁学、声学、生物

力学等各个领域，能求解由杆、梁、板、壳、块体等各类单元构成的弹性、弹塑性或塑性问题；能求解各类场分布问题（流体场、温度场、电磁场等的稳态和瞬态问题）；还能求解水流管路、电路、润滑、噪声以及固体、流体、温度相互作用的问题。

1.2 有限元法及分析软件的发展趋势

国际上早在 20 世纪 50 年代末、60 年代初就投入大量的人力和物力开发具有强大功能的有限元分析程序。目前，专用或通用有限元分析软件主要有美国的 NASTRAN、ABAQUS、ADINA、ANSYS、SAP、MARC，德国的 ASKA，英国的 PAFEC，法国的 SYSTUS 等。

现在的有限元程序功能越来越强大，用户界面更加友好，使用更加方便。当今国际上有限元方法和软件发展呈现出以下一些趋势和特征：

1. 从单纯的结构力学计算发展到求解多物理场问题

有限元分析方法最早是从结构化矩阵分析发展而来，逐步推广到板、壳和实体等连续体固体力学分析，实践证明这是一种非常有效的数值分析方法。而且从理论上也已经证明，只要用于离散求解对象的单元足够小，所得的解就可以足够逼近于精确值。所以，近年来有限元方法已发展到流体力学、温度场、电传导、磁场、渗流和声场等问题的求解计算，以及多物理场的耦合分析。

2. 由求解线性工程问题进展到分析非线性问题

随着科学技术的发展，线性理论已经远远不能满足设计的要求。现在很多结构都表现出非线性状态。非线性的原因很多，主要有三种类型：状态变化（包括接触问题）、几何非线性、材料非线性。

（1）状态变化（包括接触）。

许多普通结构都能表现出一种与状态相关的非线性行为。例如，一根只能拉伸的柔性的电缆可能是松弛的，也可能是绷紧的。轴承套可能是接触的，也可能是不接触的。这些系统的刚度由于系统状态的改变在不同的值之间突然变化，呈现出非线性。

接触是一种很普遍的非线性行为，接触是状态变化非线性类型中一个特殊而重要的子集。

（2）几何非线性。

如果结构经受大变形，变化的几何形状可能会引起结构的非线性响应。

（3）材料非线性。

如材料在塑性状态下，应力与应变之间不再是线性关系。塑料、橡胶和复合材料等各种非线性材料的出现，仅靠线性计算理论不足以解决遇到的问题，只有采用非线性有限元算法才能解决。

3. 增强可视化的前置建模和后置数据处理功能

早期有限元分析软件的研究重点在于推导新的高效率求解方法和高精度的单元。随着数值分析方法的逐步完善，尤其是计算机运算速度的飞速发展，整个计算系统用于求解运算的时间越来越少，而数据准备和运算结果的表现问题却日益突出。因此，目前几乎所有的商业

化有限元程序系统都有功能很强的前置建模和后置数据处理模块。在强调“可视化”的今天，很多程序都建立了对用户非常友好的 GUI (Graphics User Interface)，使用户能以可视图形方式直观快速地进行网格自动划分，生成有限元分析所需数据，并按要求将大量的计算结果整理成变形图、等值线图，便于极值搜索和所需数据的列表输出。

4. 与 CAD 软件的无缝集成

当今有限元分析系统的另一个特点是与通用 CAD 软件的集成使用。在用 CAD 软件完成部件和零件的造型设计后，自动生成有限元网格并进行计算，如果分析的结果不符合设计要求则重新进行造型和计算，直到满意为止，从而极大地提高了设计水平和效率。今天，工程师可以在集成的 CAD 和 FEA 软件环境中快捷地解决一个在以前无法应付的复杂工程分析问题。所以，当今所有的商业化有限元系统商都开发了和著名的 CAD 软件（例如 Pro/ENGINEER、Unigraphics、SolidEdge、SolidWorks、IDEAS、Bentley 和 AutoCAD 等）的接口。

当前，进口 CAE 软件仍然占领了大部分我国市场。1979 年，美国的 SAP5 线性结构静、动力分析程序向国内引进移植成功，掀起了应用通用有限元程序来分析计算工程问题的高潮。这个高潮一直持续到 1981 年 ADINA 非线性结构分析程序引进，一时间许多一直无法解决的工程难题都迎刃而解了。现在，国外商业化的 FEA 软件在国内都有应用。

1.3 有限元法的概念

有限元法 (FEM, Finite Element Method) 就是把物理结构分割成有限个区域，这些区域称为单元。每个单元中有有限个节点，单元间通过节点相连。对每一个单元建立作用力方程，所有单元的方程组合成整个结构的系统方程，引入边界条件并求解该系统方程，得到结构的近似解。

有限元模型由节点和单元构成，如图 1-1 所示。节点、单元和自由度的概念如下：

(1) 节点 (Node): 空间中的坐标位置，具有一定自由度，是单元之间的连接点。

(2) 单元 (Element): 一组节点自由度间相互作用的数值、矩阵描述，满足一定几何特性和物理特性的最小结构域。单元有线、面或实体以及二维或三维的单元等种类。有限元模型由一些简单形状的单元组成，单元之间通过节点连接，并承受一定载荷。

(3) 自由度 (DOFs): 用于描述一个物理场的响应特性，如结构分析时用位移表示其自由度。节点自由度随连接该节点的单元类型变化。

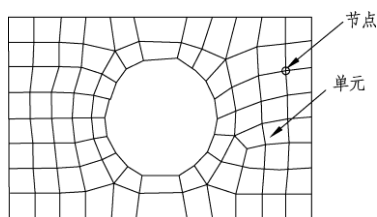


图 1-1 带孔板结构有限元模型

有限元法是把要分析的连续体假想地分割成有限个单元所组成的组合体，简称离散化。单元之间只能通过节点来传递内力，通过节点来传递的内力称为节点力，作用在节点上的载荷称为节点载荷。当连续体受到外力作用发生变形时，组成它的各个单元也将发生变形，因而各个节点要产生不同程度的位移，这种位移称为节点位移。

有限元方法用来解决实际工程需要解决而理论分析又无法解决的复杂问题，并且可以得到比较精确的解。有限元模型是真实系统理想化的数学抽象。有限元方法实际上是用数学方法来求解复杂的力学问题，涉及数学和力学方面的知识，应用有限元方法，还需要有限元分析的计算机程序，各方面互相结合才能形成完整的有限元分析方法。所以，有限元方法被称为是随着计算机的应用而发展起来的一种数值计算方法。

1.4 有限元法的分析步骤

1. 连续体离散化

(1) 根据连续体的形状选择最能完满描述连续体形状的单元。常见的单元形状有：点单元（质量单元）、线单元（如梁、杆、弹簧等单元）、平面单元（三角形、四边形）、体单元（四面体、六面体）等。

(2) 进行单元划分。将连续的结构划分为有限个单元组成的离散体，习惯上称为有限元网格划分。显然，单元越小则离散域的近似程度越好，计算结果也越精确，但计算量将增大，因此求解域的离散化是有限元法的核心技术之一。

(3) 对单元和节点按顺序编号。

2. 确定单元的位移模式

将单元中任意一点的位移场近似地表示成单元节点坐标及节点位移的函数，这种函数称为位移函数，形式如下：

$$\{u\} = [N^e]\{\delta^e\} \quad (1-1)$$

式中， u 为单元的位移场向量， N^e 为形函数矩阵， δ^e 为节点位移列向量。

由于多项式不仅能逼近任何复杂函数，也便于微分和积分等数学运算，所以广泛使用多项式来构造位移函数。位移函数的假设是否合理，直接影响到有限元分析的计算精度、效率和可靠度。

3. 单元力学特性分析

(1) 单元应变矩阵。

根据弹性力学中的几何方程（应变分量与位移分量之间的关系）以及位移函数的表达式，可得到单元应变与节点位移之间的关系如下：

$$\{\varepsilon^e\} = [B^e]\{\delta^e\} \quad (1-2)$$

式中， ε^e 为单元的应变场向量， B^e 为单元应变矩阵。

(2) 单元应力矩阵。

根据弹性力学中的本构方程（应力分量和应变分量之间关系）可得出用节点位移表示的

单元应力为

$$\{\sigma^e\} = [D][B^e]\{\delta^e\} \quad (1-3)$$

式中, σ^e 为单元的应力场向量, D 是与单元材料有关的弹性矩阵。

(3) 单元刚度矩阵。

根据虚功原理, 即内虚功等于外虚功, 可建立作用于单元上的节点力和节点位移之间的关系式, 即单元的平衡方程

$$F^e = k^e \delta^e \quad (1-4)$$

式中, k^e 为单元刚度矩阵, F^e 为单元的节点力列向量。

4. 整体分析

(1) 计算等效节点力, 集成整体节点载荷向量 $[R]$ 。

利用虚功等效原理, 将各种作用力换算为作用在节点上的等效节点力。作用在单元上的集中力、体积力及表面力都必须尽量等效地移置节点上, 形成等效节点载荷。最后, 将所有节点载荷按照整体节点编码顺序组集成整体节点载荷向量 $[R]$ 。

(2) 形成整体刚度矩阵 $[K]$, 建立整个结构的平衡方程。

由单元刚度矩阵按照刚度集成法形成整体刚度矩阵 $[K]$, 建立整个结构的平衡方程

$$[K]\{d\} = \{R\} \quad (1-5)$$

式中, K 为整体刚度矩阵, 直接由单元刚度矩阵组装得到; d 为整体节点位移向量; R 为全部节点载荷组成的列阵。

(3) 引进边界约束条件, 求解整体平衡方程求出节点位移分量。

(4) 根据节点位移与应变、应力的关系 (几何方程、物理方程) 计算出单元应变、应力等派生解。

1.5 使用商用软件进行结构分析的步骤

研究和发展理论的主要目的之一是为了有效解决实际问题。当然, 实际问题的解决也可以促进理论的发展, 甚至提出新的学科方向。数值方法尤其是有限元方法是从理论走向工程的桥梁或工具。虽然工具已经存在, 但如何利用这个工具去解决实际问题并不是一件简单的事。尽管不同的有限元商用软件各有特色, 但其主体结构与功能是类似的。在用这些有限元软件对具体工程问题进行分析时, 通常包括如下步骤:

(1) 问题分析与数学模型建立。

(2) 有限元分析 (包括: 前处理、数值计算、后处理)。

(3) 结果分析与重计算。

作为有限元软件的初级用户, 往往把注意力放在前、后处理上, 甚至认为有限元分析就是几何模型的建立与网格划分。毋庸置疑, 随着商用有限元软件的逐步完善, 对于比较简单的问题, 初学者也可以获得正确的结果。但作为一名合格的结构分析人员, 仅仅掌握有限元的前、后处理是不够的。下面对上述各步骤进行简单的讨论。

1. 问题分析与数学模型建立

简而言之，问题分析就是理解问题的物理性质。例如，需要解决的是动力问题还是静力问题，关心的是强度问题、刚度问题，还是稳定性问题等。对这些问题的回答决定了数学模型的简化程度与有限元模型的规模。

事实上，无论有限元软件如何完善，都需要结构分析人员根据问题的性质来控制软件执行任务的方向。例如，对于飞机机翼，若关心翼面的变形或刚度问题，则翼根区域的网格划分和所使用的单元类型并不是关键因素，这是因为刚度问题对局部并不敏感，于是有限元模型的规模可以较小，但几何模型必须是完整的。翼面的刚度分析可以用于解决气动弹性效应或操纵控制等问题。若关心翼根部分的应力分布或强度问题，则该部分的网格划分和所使用的单元类型是至关重要的，这是因为强度问题是局部敏感的。翼根的强度分析可以用于解决机翼与机身接头部分的形状和尺寸优化设计。为了减小有限元模型的总体规模以提高分析效率，通常只对翼根局部进行细致有限元分析，而总体变形或刚度分析结果可以作为局部强度分析的位移边界条件。

在问题分析的基础上，需要建立合适的数学模型来描述物理问题，如材料性质、边界条件和问题维数的确定及载荷的简化等。Cook^{错误！未找到引用源。}曾讨论一个简单问题：一个薄圆环片与一个长圆管置于地面上，求物体在重力作用下的响应。稍有弹性力学基础知识的人不难联想到平面应力与平面应变问题。虽然两结构体均是三维实体，但认识到该问题的几何特征和力学特性之后，就可以用平面弹性理论来简化该问题的分析工作。尽管使用三维体元同样可以解决这个问题，但在模型规模与计算效率两方面均会增加数个量级。另外，还有一些问题是需要经验与初步分析才能做出具体判断的，例如薄圆环片（或长圆管）与地面的接触区处理。从理论上来说，接触区不是理想空间点，而应该是一个区域，其大小与结构局部变形有关。如果接触区非常小，相比于结构整体的特征尺寸有量级上的差异，则该接触区可以简化为一个铰接点。这种简化不会对总体结果产生太大影响。当然，如果接触区较大或者关心接触区的应力分布，则应该引入接触边界条件，但接触边界条件的引入将使问题复杂化和非线性化。

与之类似，材料性质的选取也会涉及线性与非线性问题。通常需要经过初步分析才能决定是否应该引入材料的非线性本构关系。在初步分析中，使用线弹性材料进行试算是必要的。还有许多类似的问题，此处不再一一论述。

在问题分析与数学模型建立这一步骤中，根据理论分析来简化模型也是有益的。例如：利用对称性可以减小模型规模，提供网格划分疏密区域的依据，预测有限元结果（如某些特殊点的位移和应力应该等于零）等。虽然，这部分工作也可以在结构分析之后进行，但事先对计算结果的预估可提高分析效率，还可以避免在建立模型过程中的颠覆性错误。

2. 有限元分析

商用有限元软件均包括三个部分：前处理、数值计算和后处理。前处理包括定义材料与单元特性、几何建模、网格划分、施加边界条件等。数值计算是有限元分析的内核，主要完成单元矩阵生成与组装、矩阵运算和各节点参数的求解。后处理的功能主要是利用图形来显示有限元分析所得到的各物理量或按要求列出所需数据。尽管图形界面有很好的亲和力，并且具有避免出现低级建模错误的功能，但建模中计算参数的选择还是对分析者的理论基础提

出了要求。

3. 结果分析与重计算

常规的结果列表与总结只是结果分析的表象。结果分析的目的之一是回答这样的问题——这个计算结果正确吗？事实上，对于较复杂的工程结构，无法判断全部计算结果的正确性，但根据物理含义或与试验结果进行比较，对判断某些特殊点的结果及分布特征的正确性和合理程度是有益的。对于简单的问题，与已有的理论结果进行比较也是可行的。

人们通常认为数值结果的可信度总比实验结果或理论结果差，但事情不是绝对的。在查找有限元模型可能存在问题的同时，认识到理论解的假设条件与实验条件所引入的偏差也是非常必要的。对有限元模型本身而言，由于计算机技术的发展和软件可靠性的进步，基本可以忽略数值截断误差对结果产生的本质影响。而由于数学模型所造成的误差（如边界条件的定义不合理）却是比较严重的，计算方法中参数选择不当也可造成严重问题。

虽然较好的通用软件在结果中给出了一些与计算过程有关的参考信息，但对结果正确性的判断主要还是依赖于分析者本身的理论基础与工程经验。另外，计算结果的收敛性也是需要考虑的。加密网格对结果的影响或数值结果的连续性可作为考察收敛性的重要参考依据。在此过程中，进行详细的重分析往往是不可避免的。总之，从表面上看，有限元分析过程似乎是在计算机上完成界面操作，但问题的解决主要依赖于分析者的物理概念及其有限元理论基础和经验，初学者与有经验的结构分析人员的最大差别也在于此，所以掌握一定的理论基础知识并进行实践是十分必要的。

第2章 杆系结构的有限元法——直接法

在工程实际中大量存在杆系结构，研究杆系结构的力学基础知识主要来源于材料力学、结构力学和动力学。尽管实际结构体均是三维的，但在弹性力学基础上引入一定的假设，就可用一维模型来模拟三维问题，这样可以最大限度地简化分析工作。材料力学中的平面假设就实现了这个目的，它使均匀拉压杆、扭转轴、弯曲梁问题简化为一维问题。本质上，平面假设给出了平剖面内各点变形（或应变）的分布规律。当然，这些假设也被理论与实验证明在一定条件下是正确的或满足精度要求的。杆系结构的有限元方法类似于结构力学中的位移法，其主要区别在于有限单元的位移模式是近似的。有限元软件中与杆系结构对应的一维单元主要是杆与梁单元。以 ANSYS 软件为例，其中包括：LINK 杆元、BEAM 梁元，它们都是空间单元，杆元具有纵向拉压与扭转刚度，而梁元具有拉压、扭转和弯曲刚度，单元特征描述详见本书第 9 章的内容。杆元与梁元在航空航天、土木、建筑、机械、船舶、水利等工程中应用很广，例如桥梁、塔式起重机的起重臂和标准节、飞行器机身与翼面的桁条等。

2.1 基本概念

为了求解复杂的杆系结构中力与位移的关系，可以先把整个杆系结构分解开来，对每一杆件用材料力学或结构力学方法进行分析，得出其力学特性，然后再把这些杆件的内力特性借助于刚度集成法综合起来，最终得到整个结构的力学特性，这是早期有限元法的直接求解方法。

1. 结构离散化

结构离散化是用有限元法分析问题的基础。离散化是指将分析对象划分成有限个单元体，使相邻单元体之间在节点处连接，用这样的单元集合体来替代原有的结构。离散化主要包括确定单元类型、单元划分以及节点和单元编号三个过程。

2. 单元划分原则

两个节点之间的杆件构成一个单元，节点可按以下原则选取：

- (1) 杆件的交点一定要选为节点；
- (2) 杆件截面变化处一定要取为节点；
- (3) 支承点与自由端要取为节点；
- (4) 集中载荷作用处最好取为节点；
- (5) 欲求位移的点要取为节点；
- (6) 单元长度最好基本相同。

3. 节点和单元

在以节点位移为基本未知数的位移有限元法中，节点自由度是指单元上每个节点的位移（线位移和角位移）。杆系结构的单元类型分为杆单元和梁单元，两者均为线单元。杆单元的节点仅传递力而不传递力矩，其节点位移只有沿坐标系各个轴向的线位移；梁单元的节点不仅传递力，而且还传递力矩，其节点位移有沿坐标系各个轴向的线位移和绕坐标系各轴旋转的角位移。

节点和单元编号是对离散模型的每一个节点和单元都给予的一个确定号码，节点顺序对计算结果无影响，但对求解计算时间有较大的影响。其编号原则如下：

(1) 节点编号原则：编号不能重复且不能遗漏，相邻节点编号号码差尽量小。

例如在图 2-1 中，单元节点编号有两种方法。图 2-1 (a) 中，单元①包含节点 1 与 2，单元②包含节点 1 与 3，依此类推。图 2-1 (a) 中的最大节点号差为 2，图 2-1 (b) 中的最大节点号差为 4，显然前者的节点编号较好。

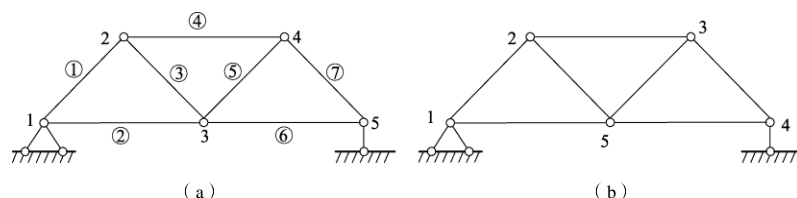


图 2-1 单元与节点编号方法

(2) 单元编号原则：编号不能重复且不能遗漏，同类单元尽可能编号相近。

目前，随着商业有限元应用软件的发展，节点和单元编号基本由有限元分析程序的前处理部分自动完成。

4. 整体坐标系和单元局部坐标系

(1) 整体坐标系：是指标出计算模型空间位置关系的坐标系，常用的整体坐标系有笛卡尔坐标系、柱坐标系和球坐标系。节点坐标表示节点在整体坐标系下的空间位置。

(2) 单元局部坐标系：选取一个节点为坐标轴原点 \bar{o} （例如节点 i ），通常以出现在单元信息中的第一个节点号作为 i 点，第二个节点号为 j 点。规定单元局部坐标系的 \bar{x} 轴由节点 i 指向节点 j ，并按由 \bar{x} 轴到 \bar{y} 轴逆时针旋转 90° 确定局部坐标系的 \bar{y} 轴（实际上是按右手定则确定坐标系的 \bar{y} 轴和 \bar{z} 轴，则 \bar{z} 轴由纸面向外）。

2.2 平面桁架

图 2-2 所示为一平面桁架。在桁架结构中，每个杆件与其他杆件在杆件的两端铰接，只承受轴向力。因此，桁架用杆单元进行离散化，即划分单元、确定节点坐标并对节点和单元编号。

对平面桁架用平面杆单元进行离散时，可按其自然组成将每个杆件当作一个单元，因其节点是铰节点，每个节点有两个方向的线位移，即每个节点有两个自由度。在整体坐标系 oxy

下, 沿 x 轴方向的位移用 u 表示, 沿 y 轴方向的位移用 v 表示, 则节点 i 沿 x 轴方向的位移用 u_i 表示, 沿 y 轴方向的位移用 v_i 表示。如图 2-2 所示的桁架共由 7 个平面杆单元组成, 编号为 ①、②、③、④、⑤、⑥和⑦。同时将各杆件的铰接点作单元的节点, 共有 5 个节点, 编号为 1、2、3、4、5。

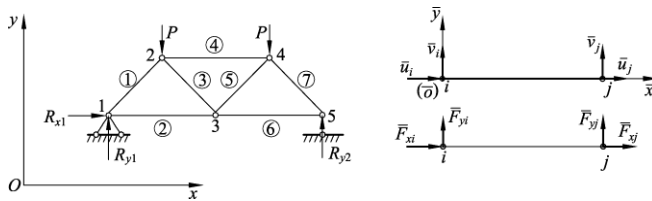


图 2-2 平面桁架有限元模型

2.2.1 局部坐标系下的单元刚度矩阵

为了更清楚地理解刚度矩阵所反映的力学量之间的关系, 下面利用材料力学方法来分析单元节点力与节点位移之间的关系, 进而建立平面桁架单元的刚度矩阵^{错误!未找到引用源。}。

1. 单元局部坐标系下的节点位移和节点力

在局部坐标系 \bar{oxy} 下, 平面杆单元节点位移如图 2-2 所示。节点位移 \bar{u} 和 \bar{v} 可分别表示沿 \bar{x} 轴和 \bar{y} 轴方向的位移, 节点位移规定以沿局部坐标系的坐标轴方向为正, 反之为负。节点 i 在局部坐标系下的位移分量分别为 \bar{u}_i 和 \bar{v}_i , 节点 j 在局部坐标系下的位移分量分别为 \bar{u}_j 和 \bar{v}_j , 其向量形式分别为

$$\bar{\delta}_i = \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{bmatrix}, \bar{\delta}_j = \begin{bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

式中, $\bar{\delta}_i$ 和 $\bar{\delta}_j$ 分别表示节点 i 和 j 在局部坐标系下的位移向量。

在单元局部坐标系下, 由单元节点位移引起的单元节点力沿 \bar{x} 轴和 \bar{y} 轴方向分别为 \bar{F}_x 和 \bar{F}_y , 其方向的规定与相应节点位移方向一致。

在单元 e 中, 节点 i 和 j 在单元局部坐标系下的节点力向量分别表示为

$$\bar{F}_i^e = \begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \end{bmatrix}, \bar{F}_j^e = \begin{bmatrix} \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

对于单元 e , 将节点 i 和 j 的位移向量合写在一起, 构成单元节点位移向量, 表示为

$$\bar{\delta}^e = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_i \\ \bar{\delta}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

即每个平面杆单元有 4 个节点线位移自由度。同理, 单元节点力向量的形式为

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_i^e \\ \bar{\mathbf{F}}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

2. 单元节点位移与节点力的关系

从桁架中任意取出一个杆单元（即一根杆）为研究对象，如图 2-3 所示。计算两端铰接的杆单元在节点位移作用下的单元节点力，单元在轴向拉压载荷下的受力如图 2-3 所示。

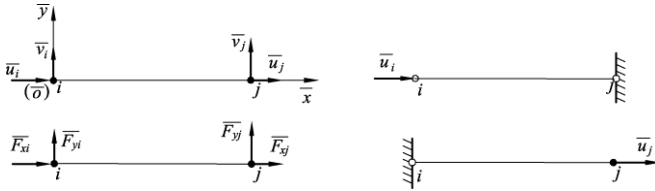


图 2-3 平面杆单元受力分析

假设节点 j 铰接固定，在单元节点位移 \bar{u}_i 和 $\bar{u}_j = 0$ 的作用下，根据材料力学中的胡克定律，在线弹性范围内，轴向力 \bar{F}_{xi}^i 与变形满足以下关系式：

$$\frac{\bar{F}_{xi}^i}{EA} l = \bar{u}_i \quad (2-5)$$

式中， E 为材料的弹性模量； A 为杆的横截面面积； l 为杆单元长度。

由式 (2-5) 求得

$$\bar{F}_{xi}^i = \frac{EA}{l} \bar{u}_i \quad (2-6)$$

根据单元的力平衡关系得出节点 j 端的轴向力 \bar{F}_{xj}^i 为

$$\bar{F}_{xj}^i = -\bar{F}_{xi}^i = -\frac{EA}{l} \bar{u}_i \quad (2-7)$$

同理，假设节点 i 铰接固定，在单元节点位移 $\bar{u}_i = 0$ 和 \bar{u}_j 的作用下，节点 i 和 j 的轴向力分别为

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{xj}^j &= \frac{EA}{l} \bar{u}_j \\ \bar{F}_{xi}^j &= -\bar{F}_{xj}^j = -\frac{EA}{l} \bar{u}_j \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

由于节点 i 和 j 为单元的铰接点，单元节点位移 \bar{v}_i 和 \bar{v}_j 对单元节点力无影响。根据线性叠加原理，单元在节点 i 和 j 的位移联合作用下，其节点位移与节点力满足以下关系式：

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{xi} &= \bar{F}_{xi}^i + \bar{F}_{xi}^j = \frac{EA}{l} \bar{u}_i - \frac{EA}{l} \bar{u}_j \\ \bar{F}_{yj} &= \bar{F}_{yj}^i + \bar{F}_{yj}^j = -\frac{EA}{l} \bar{u}_i + \frac{EA}{l} \bar{u}_j \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

此外，由于轴向位移仅产生轴向力，而不产生横向力 \bar{F}_y 。因此，上述单元节点位移与节点力的关系用矩阵的形式表示为

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

式(2-10)可缩写为

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\boldsymbol{\delta}}^e \quad (2-11)$$

式中， $\bar{\mathbf{K}}^e$ 为杆单元在局部坐标系下的单元刚度矩阵：

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} & \bar{K}_{14} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} & \bar{K}_{24} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} & \bar{K}_{34} \\ \bar{K}_{41} & \bar{K}_{42} & \bar{K}_{43} & \bar{K}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

每个单元有两个节点，每个节点有两个线位移自由度，因此，在单元局部坐标系下，平面杆单元的刚度矩阵为 4×4 阶矩阵。

3. 单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 的性质

(1) $\bar{\mathbf{K}}^e$ 是单元 e 上由节点位移向量 $\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$ 与节点力向量 $\bar{\mathbf{F}}^e$ 之间的转换矩阵。

(2) 刚度矩阵中各元素的力学意义为： $\bar{\mathbf{K}}^e$ 中的元素均是单位节点位移所引起的节点力的数值，所以称它们为刚度系数。刚度矩阵中每行或每列元素的力学意义是：同一行的 4 个元素是 4 个节点位移对同一个节点力的影响系数（或称贡献系数）；同一列的 4 个元素是同一个节点位移对 4 个节点力的影响系数。

(3) 对称性：根据功的互等定理和单元刚度系数的力学意义，有 $\bar{K}_{ij} = \bar{K}_{ji}$ ，由此可知单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 为对称矩阵。

(4) 奇异性：单元刚度矩阵是奇异矩阵，即单元刚度矩阵对应行列式值等于零，即 $|\bar{\mathbf{K}}^e| = 0$ 。若把式(2-12)表示的单元刚度矩阵的第 3 行加到第 1 行上去，能使第 1 行的元素全部为零，因此，单元刚度矩阵对应的行列式值等于零。单元刚度矩阵的奇异性反映了矩阵中还没有考虑到单元两端与整个结构的联系，所以可以产生任意的刚体位移。

(5) 分块性：在式(2-3)中，单元节点位移向量是由两个子向量组成的，每一子向量包

含一个节点上的两个位移分量；在式(2-4)中，单元节点力向量也是由两个子向量组成的，每一个子向量包含一个节点上的两个力分量；同样，在式(2-10)中，对单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 的行与列按同样的原则划分，这样就得到单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 的分块形式。若将其中每一子块记作 $\bar{\mathbf{K}}_{ij}^e$ ，则式(2-12)可写为

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^e & \bar{\mathbf{K}}_{ij}^e \\ \bar{\mathbf{K}}_{ji}^e & \bar{\mathbf{K}}_{jj}^e \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

式(2-11)若按单元节点向量的形式可写为

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_i^e \\ \bar{\mathbf{F}}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^e & \bar{\mathbf{K}}_{ij}^e \\ \bar{\mathbf{K}}_{ji}^e & \bar{\mathbf{K}}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\delta}}_i \\ \bar{\boldsymbol{\delta}}_j \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

由上式可以得出单元节点力向量为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_i^e &= \bar{\mathbf{K}}_{ii}^e \bar{\boldsymbol{\delta}}_i + \bar{\mathbf{K}}_{ij}^e \bar{\boldsymbol{\delta}}_j \\ \bar{\mathbf{F}}_j^e &= \bar{\mathbf{K}}_{ji}^e \bar{\boldsymbol{\delta}}_i + \bar{\mathbf{K}}_{jj}^e \bar{\boldsymbol{\delta}}_j \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

在式(2-12)中，每个单元刚度矩阵可划分为4个子刚度矩阵，由于每个单元有2个节点，所以每个子刚度矩阵为 2×2 阶矩阵。主对角线上的子块反映了单元上同一节点处的力与位移的关系，如 $\bar{\mathbf{K}}_{ii}^e$ 反映了单元 e 上节点 i 的力与该点上的位移之间的关系，而非对角线上的子块反映的是单元 e 上不同节点上的力与位移的关系，如 $\bar{\mathbf{K}}_{ij}^e$ 反映了单元 e 上节点 i 上的力与节点 j 上的位移之间的关系。

上述性质虽然是针对平面桁架杆单元来讨论的，但仍具有普遍性。尽管其他各种单元的自由度数可能不同，刚度系数也可能不同，但其刚度矩阵仍具有以上性质。

2.2.2 整体坐标系下的单元刚度矩阵

在2.2.1节中，对局部坐标系下单元的特性进行了研究。可以看出，在局部坐标系下，单元刚度矩阵的形式是完全相同的，分析也十分方便。但是，由于各个单元的空间位置各不相同，在整体坐标系下，单元的局部坐标系的空间位置也各不相同。因此，为了能将单元集合起来进行整体分析，用局部坐标系分析就不那么方便了。为此需要设置一个整体坐标系，其不随单元位置的变化而变化，应是整个结构的公共的、统一的坐标系。在进行整体分析之前，需对整体坐标系和局部坐标系进行坐标变换，把在2.2.1节中得到的局部坐标系下的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 转换成整体坐标系下的单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 。

1. 坐标变换

在整体坐标系下，同样可以将节点位移和节点力用向量的形式表示为

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_i &= \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_i^e &= \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_j^e = \begin{bmatrix} F_{xj} \\ F_{yj} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

式中, δ_i 和 δ_j 分别表示节点 i 和 j 在整体坐标系下的位移向量; F_i^e 和 F_j^e 分别表示节点 i 和 j 在整体坐标系下的节点力向量。

在整体坐标系下, 单元节点位移和节点力向量分别为

$$\delta^e = \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}, \quad F^e = \begin{bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

在平面桁架问题中, 整体坐标系与单元局部坐标系的空间位置关系如图 2-4 所示, 整体坐标系 x 轴与局部坐标系 \bar{x} 轴之间的夹角为 α , 规定夹角 α 由 x 轴向 \bar{x} 轴逆时针旋转为正。

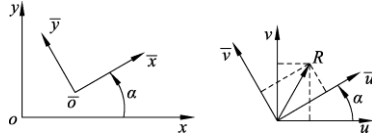


图 2-4 局部坐标系与整体坐标系及其变换

局部坐标系和整体坐标系下的节点位移之间的关系为

$$\begin{cases} \bar{u} = u \cos \alpha + v \sin \alpha \\ \bar{v} = v \cos \alpha - u \sin \alpha \end{cases} \quad (2-18)$$

式 (2-18) 用矩阵的形式表示为

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

令

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

则 λ 称为节点坐标变换矩阵, 为 2×2 阶矩阵。此时式 (2-19) 为

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

单元节点位移的坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

式 (2-21) 可简化为

$$\bar{\delta}^e = T \delta^e \quad (2-22)$$

式中, T 称为单元坐标变换矩阵, 为 4×4 阶矩阵, 且

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & & \mathbf{0} \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & & \\ & & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \mathbf{0} & & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

对单元节点力, 同样有类似的转换关系:

$$\bar{F}^e = T F^e \quad (2-24)$$

2. 整体坐标系下的单元刚度矩阵

若假设在整体坐标系中单元节点力和节点位移之间的关系式为

$$F^e = K^e \delta^e \quad (2-25)$$

则由单元节点力的坐标变换关系式 (2-24) 有

$$F^e = T^{-1} \bar{F}^e \quad (2-26)$$

因为 T 是正交变换矩阵, 所以 $T^{-1} = T^T$ (正交变换矩阵的判定方法是: 同一行或同一列各元素的平方和等于 1, 不同行或不同列对应元素乘积之和等于 0)。

将式 (2-11) 代入式 (2-26) 有

$$F^e = T^T \bar{K}^e \bar{\delta}^e \quad (2-27)$$

再将式 (2-22) 代入式 (2-27) 有

$$F^e = T^T \bar{K}^e T \delta^e \quad (2-28)$$

比较式 (2-25) 和式 (2-28), 则有

$$K^e = T^T \bar{K}^e T \quad (2-29)$$

式 (2-29) 即为整体坐标系下的单元刚度矩阵 K^e 与局部坐标系下的单元刚度矩阵 \bar{K}^e 之间的关系式, 即由式 (2-28) 建立了单元在整体坐标系下的节点力与节点位移之间的关系式。

整体坐标系下的单元刚度矩阵 K^e 写为子刚度矩阵的形式为

$$\begin{aligned} K^e = T^T \bar{K}^e T &= \begin{bmatrix} \lambda^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K}_{ii}^e & \bar{K}_{ij}^e \\ \bar{K}_{ji}^e & \bar{K}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^T \bar{K}_{ii}^e \lambda & \lambda^T \bar{K}_{ij}^e \lambda \\ \lambda^T \bar{K}_{ji}^e \lambda & \lambda^T \bar{K}_{jj}^e \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-30)$$

即有

$$K_{ij}^e = \lambda^T \bar{K}_{ij}^e \lambda \quad (2-31)$$

式 (2-29) 中, 若按单元节点向量的形式可写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^e \\ \mathbf{F}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^e & \mathbf{K}_{ij}^e \\ \mathbf{K}_{ji}^e & \mathbf{K}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

整体坐标系下的单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 仍为 4×4 阶矩阵, 且具有局部坐标系下单元刚度矩阵的所有特性。

2.2.3 整体分析

求得在整体坐标系下的刚度矩阵 \mathbf{K}^e 后, 单元刚度矩阵分析结束, 进入结构整体分析。在整体分析中, 需采用整体坐标系, 如图 2-2 所示的整体坐标系 $oxyz$ 。要把离散模型的所有单元重新集合起来, 需以单元节点为研究对象, 建立单元节点力与作用于节点的外载荷和结构支撑处的支座反力的力平衡方程, 导出以节点位移为未知数的线性方程组——有限元方程。

1. 等效节点载荷计算

对于作用在节点上的载荷, 可以直接与单元节点力建立平衡方程。但对于非节点载荷, 必须进行等效处理转化, 使之成为等效节点载荷, 在组建有限元方程时按节点外载荷的方式进行处理。

将非节点载荷转换到节点上, 转化为等效节点载荷, 应按静力等效原则来进行。由此转化而引起的内力和应力差异, 只是局部的, 不会影响整个结构上的应力分布。在桁架结构中, 将其中某一杆件上的非节点载荷转化为等效节点载荷, 只影响该杆件上的应力分布, 而对其他杆件的应力不产生影响。

对于杆系结构, 既可以根据单元的连接方式用力法计算等效节点载荷, 也可以用虚功等效原理 (原载荷和等效节点载荷在任何虚位移上所做的虚功都相等) 或用变分原理求得等效节点载荷。在桁架结构中, 铰节点即为单元的节点, 由于铰节点仅传递力, 因此, 以下根据单元连接方式用力法计算等效节点载荷。

对于图 2-5 (a) 所示承受集中载荷的杆单元, 设单元长度为 l , 集中力 P 距节点 i 的距离为 a , 距节点 j 的距离为 b 。

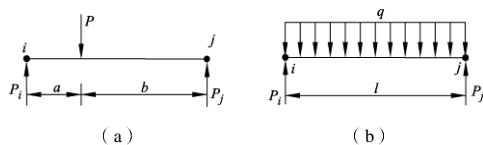


图 2-5 集中力和均布载荷的等效节点载荷

由于单元两端为铰接, 则两节点的等效节点载荷分别为

$$\left. \begin{aligned} P_i^e &= \frac{b}{l} P \\ P_j^e &= \frac{a}{l} P \end{aligned} \right\} \quad (2-33)$$

对于图 2-5 (b) 所示承受均布线载荷的杆单元, 如其上作用有均匀分布载荷 q , 则相应的

等效节点载荷为

$$P_i^e = P_j^e = \frac{ql}{2} \quad (2-34)$$

等效节点载荷的方向与原载荷方向一致。如果原载荷沿着某一坐标轴方向，那么等效节点载荷也沿该坐标方向；如果原载荷与坐标轴斜交，那么，该载荷将按坐标轴方向进行分解，求得相应坐标轴方向上的等效节点载荷。

2. 求整体刚度矩阵

图 2-2 所示的桁架结构由 7 个平面杆单元和 5 个节点组成，每个节点有 2 个自由度，整个有限元模型共有 10 个自由度，即模型的节点位移分量共有 10 个，用节点位移向量的形式表示为

$$\delta = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4 \quad \delta_5]^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5]^T$$

相应地，每个节点有 2 个方向的节点载荷分量，包括作用于节点的载荷和支座反力。因此，模型的节点的载荷分量也有 10 个，用力向量的形式表示为：

$$\begin{aligned} P &= [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5]^T \\ &= [P_{x1} \quad P_{y1} \quad P_{x2} \quad P_{y2} \quad P_{x3} \quad P_{y3} \quad P_{x4} \quad P_{y4} \quad P_{x5} \quad P_{y5}]^T \\ &= [R_{x1} \quad R_{y1} \quad 0 \quad -P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -P \quad 0 \quad R_{y2}]^T \end{aligned}$$

根据整体坐标系下单元刚度矩阵的分块性，可将单元①、②、③、④、⑤、⑥和⑦的节点力与节点位移写成如下子刚度矩阵的形式：

对于单元①

$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

对于单元②

$$\begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\ K_{31}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

对于单元③

$$\begin{bmatrix} F_2^{(3)} \\ F_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22}^{(3)} & K_{23}^{(3)} \\ K_{32}^{(3)} & K_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

该单元的局部节点号 i 是整体节点号 3，局部节点号 j 是整体节点号 2，故该式顺序为 3、2。

对于单元④

$$\begin{bmatrix} F_2^{(4)} \\ F_4^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22}^{(4)} & K_{24}^{(4)} \\ K_{42}^{(4)} & K_{44}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_4 \end{bmatrix}$$

批注 [21]: 表述是否完整、正确

对于单元⑤

$$\begin{bmatrix} F_3^{\textcircled{5}} \\ F_4^{\textcircled{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{33}^{\textcircled{5}} & K_{34}^{\textcircled{5}} \\ K_{43}^{\textcircled{5}} & K_{44}^{\textcircled{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}$$

对于单元⑥

$$\begin{bmatrix} F_3^{\textcircled{6}} \\ F_5^{\textcircled{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{33}^{\textcircled{6}} & K_{35}^{\textcircled{6}} \\ K_{53}^{\textcircled{6}} & K_{55}^{\textcircled{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \end{bmatrix}$$

对于单元⑦

$$\begin{bmatrix} F_4^{\textcircled{7}} \\ F_5^{\textcircled{7}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44}^{\textcircled{7}} & K_{45}^{\textcircled{7}} \\ K_{54}^{\textcircled{7}} & K_{55}^{\textcircled{7}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \end{bmatrix}$$

该单元的局部节点号 i 是整体节点号 5, 局部节点号 j 是整体节点号 4, 故该式顺序为 5、4。

现以节点 2 为例, 建立节点位移与节点载荷的关系式。与节点 2 相连的单元共有 3 个, 分别为单元①、③和④, 单元①包含的节点为 1 和 2; 单元③包含的节点为 2 和 3; 单元④包含的节点为 2 和 4。每个平面杆单元 e 都受到节点 2 对单元的作用力 F_2^e 。由于作用力与反作用力的关系, 单元 e 对节点 2 的作用力为 $-F_2^e$ 。在节点 2 上, 全部单元对节点的作用力与作用于节点上的载荷相平衡, 满足关系式

$$\sum_{e=1,3,4} -F_2^e + P_2 = 0 \text{ 或 } \sum_{e=1,3,4} F_2^e = P_2$$

由于单元刚度矩阵的分块性, 节点 2 对每个单元的作用力用子刚度矩阵表示为:

对于单元①

$$F_2^{\textcircled{1}} = K_{22}^{\textcircled{1}} \delta_2 + K_{21}^{\textcircled{1}} \delta_1$$

对于单元③

$$F_2^{\textcircled{3}} = K_{22}^{\textcircled{3}} \delta_2 + K_{23}^{\textcircled{3}} \delta_3$$

对于单元④

$$F_2^{\textcircled{4}} = K_{22}^{\textcircled{4}} \delta_2 + K_{24}^{\textcircled{4}} \delta_4$$

将单元①、③和④对节点 2 的作用力代入上式得

$$F_2^{\textcircled{1}} + F_2^{\textcircled{3}} + F_2^{\textcircled{4}} = (K_{22}^{\textcircled{1}} + K_{22}^{\textcircled{3}} + K_{22}^{\textcircled{4}}) \delta_2 + K_{21}^{\textcircled{1}} \delta_1 + K_{23}^{\textcircled{3}} \delta_3 + K_{24}^{\textcircled{4}} \delta_4 = P_2$$

同理, 可以对其余节点进行分析, 得出节点位移与节点载荷的向量关系式, 并将其综合, 得出整个模型的节点位移与节点载荷用向量表示的关系式为

$$K\delta = P \quad (2-35)$$

$$\text{其中 } \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{①} + \mathbf{K}_{11}^{②} & \mathbf{K}_{12}^{①} & \mathbf{K}_{13}^{②} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^{①} & \mathbf{K}_{22}^{①} + \mathbf{K}_{22}^{③} + \mathbf{K}_{22}^{④} & \mathbf{K}_{23}^{③} & \mathbf{K}_{24}^{④} & 0 \\ \mathbf{K}_{31}^{②} & \mathbf{K}_{32}^{③} & \mathbf{K}_{33}^{②} + \mathbf{K}_{33}^{③} + \mathbf{K}_{33}^{⑤} + \mathbf{K}_{33}^{⑥} & \mathbf{K}_{34}^{⑤} & \mathbf{K}_{35}^{⑥} \\ 0 & \mathbf{K}_{42}^{④} & \mathbf{K}_{43}^{⑤} & \mathbf{K}_{44}^{④} + \mathbf{K}_{44}^{⑥} + \mathbf{K}_{44}^{⑦} & \mathbf{K}_{45}^{⑦} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{53}^{⑥} & \mathbf{K}_{54}^{⑦} & \mathbf{K}_{55}^{⑥} + \mathbf{K}_{55}^{⑦} \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

式中， \mathbf{K} 为整体刚度矩阵，为 10×10 阶矩阵。

式 (2-35) 用子刚度矩阵表示的形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{①} + \mathbf{K}_{11}^{②} & \mathbf{K}_{12}^{①} & \mathbf{K}_{13}^{②} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^{①} & \mathbf{K}_{22}^{①} + \mathbf{K}_{22}^{③} + \mathbf{K}_{22}^{④} & \mathbf{K}_{23}^{③} & \mathbf{K}_{24}^{④} & 0 \\ \mathbf{K}_{31}^{②} & \mathbf{K}_{32}^{③} & \mathbf{K}_{33}^{②} + \mathbf{K}_{33}^{③} + \mathbf{K}_{33}^{⑤} + \mathbf{K}_{33}^{⑥} & \mathbf{K}_{34}^{⑤} & \mathbf{K}_{35}^{⑥} \\ 0 & \mathbf{K}_{42}^{④} & \mathbf{K}_{43}^{⑤} & \mathbf{K}_{44}^{④} + \mathbf{K}_{44}^{⑥} + \mathbf{K}_{44}^{⑦} & \mathbf{K}_{45}^{⑦} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{53}^{⑥} & \mathbf{K}_{54}^{⑦} & \mathbf{K}_{55}^{⑥} + \mathbf{K}_{55}^{⑦} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

式 (2-35) 或式 (2-37) 称为模型的有限元方程。如果单元的节点自由度为 m 、总节点数为 N ，则整体刚度矩阵的阶数为 $m \cdot N \times m \cdot N$ ；节点位移列向量的元素为 $m \cdot N$ 个；节点载荷列向量元素为 $m \cdot N$ 个。

从上述分析可以看出，整体刚度矩阵中的元素是由有关单元的单元刚度矩阵中的元素叠加而成的。例如在式 (2-36) 中，整体刚度矩阵中的 \mathbf{K}_{11} 是由单元①的 \mathbf{K}_{11}^1 和单元②的 \mathbf{K}_{11}^2 叠加而成；又如式 (2-36) 中，整体刚度矩阵中的 \mathbf{K}_{33} 是由单元②的 \mathbf{K}_{33}^2 、单元③的 \mathbf{K}_{33}^3 、单元⑤的 \mathbf{K}_{33}^5 和单元⑥的 \mathbf{K}_{33}^6 叠加而成。可以认为是每个单元的刚度对结构刚度的贡献。反映到整体刚度矩阵中，应根据单元在结构中的位置，将单元刚度矩阵中的元素放入总刚度矩阵的相应位置上。实际上，单元对结构刚度贡献可以逐点来考虑，由于每个节点有 2 个自由度，且连在一起编号，因此将单元刚度矩阵放入整体刚度矩阵时，不必逐个元素进行，而可以逐个子块来进行。此外，由于节点 1 分别与节点 4 和 5 及节点 2 与节点 5 不在同一个单元上，所以在整体刚度矩阵中， \mathbf{K}_{14} 、 \mathbf{K}_{41} 、 \mathbf{K}_{15} 、 \mathbf{K}_{51} 、 \mathbf{K}_{25} 和 \mathbf{K}_{52} 均为零，以上这种确定有限元模型整体刚度矩阵的方法称为“刚度集成法”。

由式 (2-36) 的整体刚度矩阵可以看出，整体刚度矩阵 \mathbf{K} 与单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 一样，具有以下相似的性质：

- (1) \mathbf{K} 是结构上的节点位移向量与节点载荷向量之间的转换矩阵。
- (2) 矩阵中的元素均为刚度系数，其力学意义是：同一行所有元素是所有节点位移对同一个节点力的影响系数（或称贡献系数）；同一列的所有元素是同一个节点位移对所有节点力的影响系数。
- (3) 对称性：由功的互等定理可知， $\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ji}$ 。从而可知整体刚度矩阵是个对称阵。这个性质可为整体刚度矩阵的存放节省内存。一般来说，只要存放矩阵的下三角或上三角就可以了。
- (4) 分块性：处于主对角线上的子块称为主子块，其余子块称为副子块。主子块反映的是同一节点处的力与位移的关系，为正非零子块。副子块反映了结构上不同节点间的力与位

移的相互关系。对于副子块 \mathbf{K}_{ij} ，如果节点 i 与节点 j 在一个单元上，则 \mathbf{K}_{ij} 是非零子块；如果节点 i 与节点 j 不在一个单元上，则 \mathbf{K}_{ij} 就是零子块。

(5) 稀疏性：即在 \mathbf{K} 中的非零元素集中在主对角线的周围，在其余位置上存在大量的零元素。其主要原因是只有在同一单元上的各个节点之间才能形成子刚度矩阵和整体刚度矩阵的元素，不在同一单元上的各个节点不形成刚度矩阵的元素。因此，整体刚度矩阵中有大量零子块，如式 (2-36) 所示。

(6) 奇异性：即刚度矩阵 \mathbf{K} 对应的行列式值为零，因此 \mathbf{K} 是奇异阵。其力学原因是结构上的几何约束还未在有限元方程式 (2-35) 中体现，其结构的刚体位移尚未消除，该结构属于自由结构。由于没有位移限制，求解其位移时，结构可以在任何位置处于平衡状态，其位移有无穷多组解。为了使公式 (2-35) 有定解，必须对其进行修正——引入约束条件。

3. 约束条件的引入

由于整体刚度矩阵的奇异性，必须对整体刚度矩阵进行修正，即引入约束条件后才能求解。进行有限元方程修正时，必须限制结构刚体运动的线位移和角位移，即消除结构刚体运动的自由度。对于平面结构至少应合理布置 3 个方向的约束；对于空间结构至少应有 6 个方向的约束。在实际结构中，应按结构约束的实际情况，合理地选择某些节点的某些自由度（线位移或角位移），使其位移值为零，或为某个定值，修正后的有限元方程式 (2-35) 或式 (2-37) 即可求解，而且其系数矩阵（修正后的总体刚度矩阵）是正定矩阵，可以不必换主元而顺利求解。引入约束条件常用的几种方法是：

(1) 划行划列法。

把整体刚度矩阵中位移为零的自由度所对应的行、列和相应的载荷项划去，缩小线性方程组的规模。其原因是：若节点位移已知可不必再解，该方程可以划去，同时该位移对其他方程的影响也为零。因此，尽管在其他方程中该位移前的系数不为零，但在整体刚度矩阵中这些列仍然可以划去。最后只剩下对求解未知位移有用的系数矩阵和载荷项。例如有以下方程组：

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} \quad (2-38)$$

当 $x_5 = 0$ 时，则 P_5 未知，因此划去系数阵第 5 行和右端载荷项的第 5 行。由于 $x_5 = 0$ ，系数矩阵的第 5 列的其他元素在其他方程中不再起作用，也可以划去。用划行划列法引入约束条件，原理简单，且可以降低系数矩阵的规模，但是划行划列之后需将节点编号重新编排一下，编程不大方便。这种方法不能用于非零位移的约束条件。

(2) 主对角线元素置“1”法。

在刚度系数矩阵 \mathbf{K} 中，如果第 i 个位移自由度 $\delta_i = 0$ ，那么将其所对应的行和列中的全部元素都置“0”，而在行和列交点处的元素置“1”，同时将右端载荷项中相应的元素置为“0”。例如，在式 (2-38) 中，当 $x_5 = 0$ 时，则方程式 (2-38) 可以写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & 0 & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & 0 & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & 0 & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ 0 \\ P_6 \end{bmatrix}$$

从上式取出第5个方程简化得

$$X_5 = 0$$

这就是约束条件，这种做法既引入了约束条件，又保持了原方程的阶数与对称性，是处理固定约束条件的常用方法，但是这一方法一般不能直接用于非零位移约束。

(3) 主元赋大值法。

如果说主对角线元素置“1”法引入的位移约束条件是精确的话，那么主元赋大值法引入的位移约束条件是近似的。

在刚度系数矩阵 \mathbf{K} 中，如果第 i 个位移自由度 $\delta_i = \delta_i^*$ ，那么将系数矩阵中对应的主元赋一个大值 A （如 $A=10^{20}$ ），右端载荷项中的对应行用此大值与已知位移的乘积 $A\delta_i^*$ 代替。

例如，在式(2-38)中，当 $X_5 = \delta_5^*$ 时，则方程式(2-38)可以写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & A & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ A\delta_5^* \\ P_6 \end{bmatrix}$$

从上式取出第5个方程

$$k_{51}\delta_1 + k_{52}\delta_2 + k_{53}\delta_3 + k_{54}\delta_4 + A\delta_5 + k_{56}\delta_6 = A\delta_5^*$$

方程的两端均除以大值 A （如 $A=10^{20}$ ），由于各个刚度系数远远小于 A ，略去小项得

$$X_5 = \delta_5^*$$

只要 A 足够大，上式同样可以近似地表示已知的位移约束条件。

这种方法在计算程序处理中十分方便，在引入支承条件的同时，保持了原方程的阶数与对称性。更大的优点是它们既能用于零位移约束，也可以用于非零位移约束，是常用的引入约束条件的方法。

4. 求单元内力

对有限元方程式(2-35)引入约束条件，在整体坐标系下求得全部节点位移，经过坐标变换求得局部坐标系下的单元节点位移 $\bar{\delta}^e = \mathbf{T}\delta^e$ ；利用局部坐标系下的单元节点位移与节点力的关系式 $\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\delta}^e$ ，求得局部坐标系下的单元节点力向量 $\bar{\mathbf{F}}^e$ ，将局部坐标系下的单元节点力向量 $\bar{\mathbf{F}}^e$ 与作用单元上的力组合在一起，求出杆件的内力和应力，进而进行强度校核。

由于整体刚度矩阵的奇异性，必须对整体刚度矩阵进行修正即引入约束条件后才能求解。

5. 有限元法的求解步骤

由上面的介绍可知，有限元法求解桁架结构的步骤为：

- (1) 合理简化结构，将结构离散化（划分单元），选取局部和整体坐标系，对单元和节点编号；
- (2) 给出原始参数（各杆件的几何参数、材料特性参数、节点坐标等）；
- (3) 计算节点载荷列阵（节点载荷和等效节点载荷）；
- (4) 计算局部坐标系下的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ ，确定每个单元的坐标转换矩阵 \mathbf{T} ，求得整体坐标系下的单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e ；
- (5) 用刚度集成法形成整体刚度矩阵；
- (6) 引入约束条件；
- (7) 用线性方程组的求解方法（高斯消元法等）解方程组，求得节点位移；
- (8) 计算各杆件内力与应力，并可进行强度校核。

【例 2-1】计算如图 2-6 所示平面桁架的节点位移和杆件的内力。设各杆件的截面尺寸和制造材料均相同，其截面面积为 $A = 4 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ，弹性模量 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 。

解：

- (1) 结构离散化。

图 2-6 (a) 所示平面桁架的单元划分、节点和单元编号及整体坐标系与单元局部坐标系如图 2-6 (b) 所示。

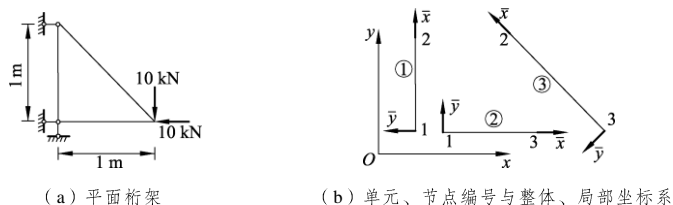


图 2-6 平面桁架及单元、节点编号与整体、局部坐标系

- (2) 计算单元在局部坐标系下的刚度矩阵。

因为图示的单元①和②的长度、截面尺寸和制造材料均相同，所以 2 个单元①和②在局部坐标系下的单元刚度矩阵完全相同。

由式 (2-12) 知，3 个单元刚度矩阵中各个元素的分别为：

对于单元①和②：

$$\frac{EA}{l} = 8.40 \times 10^9 \text{ N/m}$$

对于单元③：

$$\frac{EA}{l} = 5.9397 \times 10^9 \text{ N/m}$$

将以上各个参数代入式(2-12)得

$$\bar{\mathbf{K}}^1 = \bar{\mathbf{K}}^2 = 8.4 \times 10^9 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}^3 = 5.9397 \times 10^9 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 计算单元在整体坐标系下的刚度矩阵。

对于单元①, $\alpha = 90^\circ$, 代入式(2-23)求得单元的坐标变换矩阵为

$$\mathbf{T}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由式(2-29)得该单元在整体坐标系下的刚度矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^1 &= 8.4 \times 10^9 \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 8.4 \times 10^9 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对于单元②, 由于单元的局部坐标系与整体坐标系的方向相同, 且 $\alpha = 0^\circ$, 则有

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{K}^2 = 8.4 \times 10^9 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于单元③, $\alpha = 135^\circ$, 代入式(2-23)求得单元的坐标变换矩阵为

$$\mathbf{T}^3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

由式(2-29)得该单元在整体坐标系下的刚度矩阵为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^3 &= 5.9397 \times 10^9 \times \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & & & & \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & & & & \\ & & \mathbf{0} & & & \\ & & & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \\ & & & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \\ & & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & & & & \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & & & & \\ & & \mathbf{0} & & & \\ & & & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \\ & & & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \\ & & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
 &= 2.9698 \times 10^9 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(4) 建立有限元方程。

根据图 2-6 (b) 所示单元和节点的位置关系, 根据刚度集成法可导出平面桁架的有限元方程, 其用子刚度矩阵表示的形式为

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} + \mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{13}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} + \mathbf{K}_{22}^{(2)} & \mathbf{K}_{23}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{32}^{(2)} & \mathbf{K}_{33}^{(2)} + \mathbf{K}_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

将 3 个单元在整体坐标系的刚度矩阵和节点外荷载代入上式得

$$10^6 \times \begin{bmatrix} 8.4 & 0 & 0 & 0 & -8.4 & 0 \\ 0 & 8.4 & 0 & -8.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9698 & -2.9698 & -2.9698 & 2.9698 \\ 0 & -8.4 & -2.9698 & 11.3698 & 2.9698 & -2.9698 \\ -8.4 & 0 & -2.9698 & 2.9698 & 11.3698 & -2.9698 \\ 0 & 0 & 2.9698 & -2.9698 & -2.9698 & 2.9698 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ 0 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix} \quad (2-39)$$

(5) 引入边界条件。

由于总刚度矩阵为奇异矩阵, 所以上式的解不确定, 必须引入边界条件。现采用对角元素置“1”法, 将已知位移为 0 的行和列中的全部元素均置为“0”, 在行和列的交点处的元素置为“1”; 同时将力向量矩阵中已知位移为 0 的对应元素也置为“0”。

由图 2-6 (a) 知, 在整体坐标系下, 节点 1 沿两个坐标轴方向的线位移均为 0; 节点 2 沿 x 轴方向的线位移均为 0, 代入式 (2-39) 得

$$10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11.3698 & 2.9698 & -2.9698 \\ 0 & 0 & 0 & 2.9698 & 11.3698 & -2.9698 \\ 0 & 0 & 0 & -2.9698 & -2.9698 & 2.9698 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10^4 \\ -10^4 \end{bmatrix}$$

(6) 求线性解方程组。

将上式中的方程 1、2 和 3 去掉, 则上式简化为

$$\left. \begin{aligned} 11.3698v_2 + 2.9698u_3 - 2.9698v_3 &= 0 \\ 2.9698v_2 + 11.3698u_3 - 2.9698v_3 &= -10^{-5} \\ -2.9698v_2 - 2.9698u_3 + 2.9698v_3 &= -10^{-5} \end{aligned} \right\} \quad (2-40)$$

对式(2-40)求解得

$$v_2 = -1.1905 \times 10^{-6}, \quad u_3 = -2.3810 \times 10^{-6}, \quad v_3 = -6.9388 \times 10^{-6}$$

(7) 计算节点位移引起的节点载荷。

由式(2-22)计算单元在局部坐标系下的节点位移, 根据式(2-11)计算单元节点力。

对于单元①

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{T}^1 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.1905 \end{bmatrix} \times 10^{-6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.1905 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \\ \begin{bmatrix} \bar{F}_{x1}^1 \\ \bar{F}_{y1}^1 \\ \bar{F}_{x2}^1 \\ \bar{F}_{y2}^1 \end{bmatrix} &= \bar{\mathbf{K}}^1 \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = 8.4 \times 10^3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.1905 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 0 \\ -10.0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \end{aligned}$$

式中, $\bar{F}_{x1}^1 = -\bar{F}_{x2}^1 = 10 \text{ kN}$, 即为单元①所受的力, 表明单元①代表的杆件受压。

对于单元②, 其局部坐标系与整体坐标系的方向相同, 因此有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.3810 \\ -6.9388 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \\ \begin{bmatrix} \bar{F}_{x1}^2 \\ \bar{F}_{y1}^2 \\ \bar{F}_{x3}^2 \\ \bar{F}_{y3}^2 \end{bmatrix} &= \bar{\mathbf{K}}^2 \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} = 8.4 \times 10^3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.3810 \\ -6.9388 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.0 \\ 0 \\ -20.0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \end{aligned}$$

式中, $\bar{F}_{x1}^2 = -\bar{F}_{x3}^2 = 20 \text{ kN}$, 即为单元②所受的力, 表明单元②代表的杆件受压。

对于单元③

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{T}^3 \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & & \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & & \\ & & & \mathbf{0} \\ & & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ & & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.3810 \\ -6.9387 \\ 0 \\ -1.1905 \end{bmatrix} \times 10^{-6} = \begin{bmatrix} -3.2228 \\ 6.5900 \\ -0.8418 \\ 0.8418 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{x3}^3 \\ \bar{F}_{y3}^3 \\ \bar{F}_{x2}^3 \\ \bar{F}_{y2}^3 \end{bmatrix} = \bar{K}^3 \begin{bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = 5.9397 \times 10^9 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.2228 \\ 6.5900 \\ -0.8418 \\ 0.8418 \end{bmatrix} \times 10^{-6} = \begin{bmatrix} -14.1424 \\ 0 \\ 14.1424 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3$$

式中， $\bar{F}_{x3}^3 = -\bar{F}_{x2}^3 = -14.1424 \text{ kN}$ ，即为单元③所受的力，负号表明单元③代表的杆件受拉。

2.3 平面刚架

图 2-7 所示为一平面刚架。在刚架结构中，杆件之间用刚节点连接，刚节点不仅可以传递力（轴向力和横向力），而且还可以传递力矩。因此，刚架用梁单元进行离散化。

平面刚架结构的单元划分原则与桁架相同，在载荷作用下，单元的每个节点有两个方向的线位移和一个方向的角位移，即每个节点有 3 个自由度。在整体坐标系 $oxyz$ 下，沿 x 轴和 y 轴方向的位移分别用 u 和 v 表示，平面内角位移用 θ 表示。节点 i 沿 x 轴方向的位移用 u_i 表示，沿 y 轴方向的位移用 v_i 表示，平面内角位移用 θ_i 表示。如图 2-7 所示的平面刚架共由 7 个平面梁单元组成，编号为①、②、③、④、⑤、⑥和⑦。同时将各杆件的刚节点作单元的节点，共有 5 个节点，编号为 1、2、3、4、5。

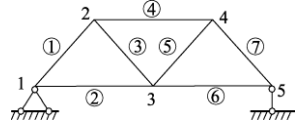


图 2-7 平面刚架有限元模型

2.3.1 局部坐标系下的单元刚度矩阵

1. 单元节点位移与节点力的关系

从图 2-7 所示的平面刚架中取出任意一个梁单元，在局部坐标系 \bar{oxy} 下，平面梁单元的节点位移和节点载荷如图 2-8 所示。

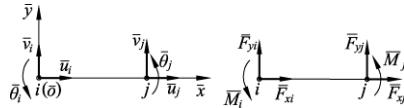


图 2-8 平面刚架有限元模型

节点位移 \bar{u} ， \bar{v} 和 $\bar{\theta}$ 分别表示沿局部坐标系 \bar{x} 轴、 \bar{y} 轴方向的线位移和平面内的角位移，与节点位移相对应的节点力和力矩分别为 \bar{F}_x 、 \bar{F}_y 和 \bar{M} 。节点线位移规定以沿局部坐标系的坐标轴方向为正，角位移由 \bar{x} 轴到 \bar{y} 轴逆时针旋转为正，否则为负。节点 i 在局部坐标系下的位移分量分别为 \bar{u}_i 、 \bar{v}_i 和 $\bar{\theta}_i$ ，节点 j 在局部坐标系下的位移分量分别为 \bar{u}_j 、 \bar{v}_j 和 $\bar{\theta}_j$ ，其向量形式分别为

$$\bar{\delta}_i = [\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i]^T, \quad \bar{\delta}_j = [\bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{\theta}_j]^T$$

式中， $\bar{\delta}_i$ 和 $\bar{\delta}_j$ 分别表示节点 i 和 j 在局部坐标系下的位移向量。

对于单元 e ，将节点 i 和 j 的位移向量合写在一起，构成单元节点位移向量，表示为

$$\bar{\delta}^e = [\bar{\delta}_i \quad \bar{\delta}_j]^T = [\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{\theta}_j]^T \quad (2-41)$$

即每个平面梁单元有 6 个节点位移自由度。

在单元局部坐标系下，由单元节点位移引起的单元节点力方向的规定与相应节点位移方向一致。在单元 e 中，节点 i 和 j 在单元局部坐标系下的节点力向量分别表示为

$$\bar{F}_i^e = [\bar{F}_{xi} \quad \bar{F}_{yi} \quad \bar{M}_i]^T, \quad \bar{F}_j^e = [\bar{F}_{xj} \quad \bar{F}_{yj} \quad \bar{M}_j]^T$$

单元节点力向量的转置形式为

$$\bar{F}^e = [\bar{F}_{xi} \quad \bar{F}_{yi} \quad \bar{M}_i \quad \bar{F}_{xj} \quad \bar{F}_{yj} \quad \bar{M}_j]^T \quad (2-42)$$

在单元局部坐标系下，平面梁单元上节点位移与节点力的关系可表示为

$$\bar{F}^e = \bar{K}^e \bar{\delta}^e \quad (2-43)$$

由于每个平面梁单元有 6 个自由度，所以单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 为 6×6 阶矩阵，上式写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} & \bar{k}_{14} & \bar{k}_{15} & \bar{k}_{16} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} & \bar{k}_{24} & \bar{k}_{25} & \bar{k}_{26} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{34} & \bar{k}_{35} & \bar{k}_{36} \\ \bar{k}_{41} & \bar{k}_{42} & \bar{k}_{43} & \bar{k}_{44} & \bar{k}_{45} & \bar{k}_{46} \\ \bar{k}_{51} & \bar{k}_{52} & \bar{k}_{53} & \bar{k}_{54} & \bar{k}_{55} & \bar{k}_{56} \\ \bar{k}_{61} & \bar{k}_{62} & \bar{k}_{63} & \bar{k}_{64} & \bar{k}_{65} & \bar{k}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{bmatrix} \quad (2-44)$$

2. 单元刚度矩阵的确定

用材料力学中的方法原理计算单位节点位移引起的单元节点力。对于线性小变形问题，结构的位移与载荷成正比。计算位移时，载荷满足叠加原理，而当载荷全部撤除后，位移也完全消失，且应力与应变的关系同样符合胡克定律。在刚架结构中，梁单元节点变形（或位移）与节点力的关系与梁两端固定连接时支座发生位移时引起的支座反力的关系相同。

当 j 端固定时，单元 e 的基本结构如图 2-9 所示。单元长为 l ，弹性模量为 E ，截面惯性矩为 I_z 。设 i 端沿 \bar{x} 轴、 \bar{y} 轴方向的线位移和平面内的角位移分别为 \bar{u}_i 、 \bar{v}_i 和 $\bar{\theta}_i$ ，其相应地作用于 i 端多余的未知力为水平方向的力 \bar{F}_{xi} 、垂直方向的力 \bar{F}_{yi} 和平面内的弯曲 \bar{M}_i ； j 端的支座反力为水平方向的力 \bar{F}_{xj} 、垂直方向的力 \bar{F}_{yj} 和平面内的弯曲 \bar{M}_j ，且满足关系式

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{xi} + \bar{F}_{xj} &= 0 \\ \bar{F}_{yi} + \bar{F}_{yj} &= 0 \\ \bar{M}_i - \bar{F}_{yj} \cdot l + \bar{M}_j &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-45)$$

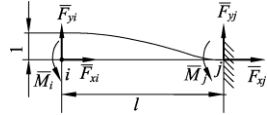


图 2-9 梁单元受力分析

当 $\bar{v}_i = 1$ 且其余位移为 0 时，根据轴向位移 $\bar{u}_i = \bar{u}_j = 0$ ，可知轴向力 $\bar{F}_{xi} = \bar{F}_{xj} = 0$ ，因此 $\bar{k}_{12} = \bar{k}_{42} = 0$ 。

由

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_i &= \frac{\bar{F}_{yi} l^3}{EI_z} - \frac{\bar{M}_i l^2}{2EI_z} = 1 \\ \bar{\theta}_i &= -\frac{\bar{F}_{yi} l^2}{2EI_z} + \frac{\bar{M}_i l}{EI_z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-46)$$

可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{yi} &= \frac{12EI_z}{l^3} = \bar{k}_{22} \\ \bar{M}_i &= \frac{6EI_z}{l^2} = \bar{k}_{32} \end{aligned} \right\} \quad (2-47)$$

由平衡条件可得

$$\begin{aligned}\bar{F}_{yj} &= -\bar{F}_{yi} = -\frac{12EI_z}{l^3} = \bar{k}_{52} \\ \bar{M}_j &= \bar{F}_{yi}l - \bar{M}_i = \frac{6EI_z}{l^2} = \bar{k}_{62}\end{aligned}\quad (2-48)$$

用同样的方法可解出此单元刚度矩阵的其余元素。梁单元的刚度矩阵为

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}\quad (2-49)$$

单元平衡方程，即单元节点力和节点位移的关系为

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{bmatrix}\quad (2-50)$$

从式(2-50)可以看出单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 具有如下性质:

- (1) $\bar{\mathbf{K}}^e$ 是单元 e 上由节点位移向量 $\bar{\delta}^e$ 求节点力向量 \bar{F}^e 的转换矩阵。
- (2) $\bar{\mathbf{K}}^e$ 中元素的力学意义为:元素 \bar{k}_{mn} 是单元上第 n ($n=1,2,3,L,6$)个自由度对应的位移(线位移或角位移)等于单位位移时,且其余自由度对应的位移等于零时,需在第 m ($m=1,2,3,L,6$)个自由度处施加的力(或力矩)。

刚度矩阵中每行或每列元素的力学意义是:同一行的6个元素是6个节点位移对同一个节点力的影响系数(或称贡献系数);同一列的6个元素是同一个节点位移对6个节点力的影响系数。

单元刚度矩阵中的元素只与单元本身的特性有关,与外载荷无关。当不考虑剪切变形对

位移的影响时，局部坐标系下的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 为

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

(3) 对称性：根据力学中力的互等定理和单元刚度系数的力学意义，有 $\bar{\mathbf{K}}_{ij}^e = \bar{\mathbf{K}}_{ji}^e$ ，由此可知单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 为对称矩阵。

(4) 奇异性：单元刚度矩阵是奇异矩阵，即单元刚度矩阵的对应行列式值等于零，即 $|\bar{\mathbf{K}}^e| = 0$ 。若把式 (2-51) 表示的单元刚度矩阵的第 4 行加到第 1 行上去，也能使第 1 行的元素全部为零，因此，单元刚度矩阵对应的行列式值等于零。单元刚度矩阵的奇异性反映了矩阵中还没有考虑到单元两端与整个结构的联系，所以可以产生任意的刚体位移。

(5) 分块性：在式 (2-41) 中，单元节点位移向量是由两个子向量组成的，每一子向量包含一个节点上的两个位移分量；在式 (2-42) 中，单元节点力向量也是由两个子向量组成的，每一个子向量包含一个节点上的两个力分量；同样在式 (2-50) 中，对单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 的行与列按同样的原则划分，这样就得到单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 的分块形式，若将其中每一子块记作 $\bar{\mathbf{K}}_{ij}^e$ ，则式 (2-49) 可写为

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^e & \bar{\mathbf{K}}_{ij}^e \\ \bar{\mathbf{K}}_{ji}^e & \bar{\mathbf{K}}_{jj}^e \end{bmatrix} \quad (2-52)$$

式 (2-50) 若按单元节点向量的形式可写为

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_i^e \\ \bar{\mathbf{F}}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^e & \bar{\mathbf{K}}_{ij}^e \\ \bar{\mathbf{K}}_{ji}^e & \bar{\mathbf{K}}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_i \\ \bar{\delta}_j \end{bmatrix} \quad (2-53)$$

由式 (2-53) 可以得出单元节点力向量为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_i^e &= \bar{\mathbf{K}}_{ii}^e \bar{\delta}_i + \bar{\mathbf{K}}_{ij}^e \bar{\delta}_j \\ \bar{\mathbf{F}}_j^e &= \bar{\mathbf{K}}_{ji}^e \bar{\delta}_i + \bar{\mathbf{K}}_{jj}^e \bar{\delta}_j \end{aligned} \right\} \quad (2-54)$$

在式 (2-53) 中，每个单元的刚度矩阵可划分为 4 个子刚度矩阵，由于每个单元有 2 个节点，所以每个子刚度矩阵为 3×3 阶矩阵。主对角线上的子块反映了单元上同一点处的力与位移的关系，如 $\bar{\mathbf{K}}_{ii}^e$ 反映了单元 e 上 i 节点上的力与 i 节点上的位移之间关系；而非对角线上的子

块反映的是单元 e 上不同节点上的力与位移的关系, 如 $\bar{\mathbf{K}}_j^e$ 反映了单元 e 上 i 节点上的力与 j 节点上的位移之间的关系。

2.3.2 整体坐标系下的单元刚度矩阵

前面在单元的局部坐标系下对单元的特性进行了研究。可以看出, 在局部坐标系下, 单元刚度矩阵的形式是完全相同的, 对单元进行分析十分方便。但是, 由于各个单元的空间位置各不相同, 在模型的整体坐标系下, 单元的局部坐标系的空间位置也各不相同。因此, 为了能将单元集合起来, 进行整体分析, 用单元局部坐标系进行分析并不十分方便。为此建立一个整体坐标系, 它并不随着单元空间位置的变化而变化, 而是整个结构模型的公共的、统一的坐标系。

在进行整体分析之前, 需对整体坐标系和局部坐标系进行坐标变换, 将在前文中得到的局部坐标系下的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 转换成整体坐标系下的单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 。

1. 坐标变换

在整体坐标系下, 同样可以将单元节点位移和节点力用向量的形式表示为

$$\left. \begin{aligned} \delta_i &= [u_i \ v_i \ \theta_i]^T, \delta_j = [u_j \ v_j \ \theta_j]^T \\ \mathbf{F}_i^e &= [F_{ix} \ F_{iy} \ M_{ij}]^T, \mathbf{F}_j^e = [F_{jx} \ F_{jy} \ M_{ij}]^T \end{aligned} \right\} \quad (2-55)$$

式中, δ_i 和 δ_j 分别表示节点 i 和 j 在整体坐标系下的位移向量; \mathbf{F}_i^e 和 \mathbf{F}_j^e 分别表示节点 i 和 j 在整体坐标系下的力向量。

在平面刚架中, 整体坐标系与单元局部坐标系的空间位置关系如图 2-10 所示, 整体坐标系 x 轴与局部坐标系 \bar{x} 轴之间的夹角为 α , 规定夹角 α 由 x 轴向 \bar{x} 轴逆时针旋转为正。

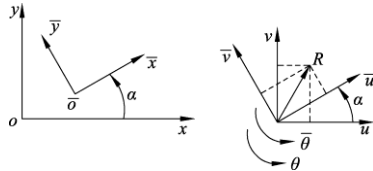


图 2-10 局部坐标系与整体坐标系及其变换

局部坐标系与整体坐标系下的节点位移之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= u \cos \alpha + v \sin \alpha \\ \bar{v} &= -u \sin \alpha + v \cos \alpha \\ \bar{\theta} &= \theta \end{aligned} \right\}$$

上式用矩阵的形式表示为

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2-56)$$

令

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

λ 称为节点坐标转换矩阵，为 3×3 阶矩阵。

式(2-56)用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}$$

单元节点位移的坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (2-57)$$

式(2-57)可化简为

$$\bar{\delta}^e = T \delta^e \quad (2-58)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & & & \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \mathbf{0} & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ & & & & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

式中， T 称为单元坐标变换矩阵，为 6×6 阶矩阵。

对单元节点力同样有类似的转换关系：

$$\bar{F}^e = T F^e \quad (2-60)$$

2. 整体坐标系下的单元刚度矩阵

因为 T 为正交变换矩阵，有 $T^{-1} = T^T$ 。将式(2-58)和式(2-60)代入式(2-50)得

$$F^e = T^T \bar{K}^e T \delta^e \quad (2-61)$$

则有

$$K^e = T^T \bar{K}^e T \quad (2-62)$$

式(2-62)即为整体坐标系下的单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 与局部坐标系下的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 之间的关系式, 即由式(2-61)建立了单元在整体坐标系下的节点力与节点位移之间的关系式。

整体坐标系下的单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 写为子刚度矩阵的形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^e & \bar{\mathbf{K}}_{ij}^e \\ \bar{\mathbf{K}}_{ji}^e & \bar{\mathbf{K}}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^T \bar{\mathbf{K}}_{ii}^e \lambda & \lambda^T \bar{\mathbf{K}}_{ij}^e \lambda \\ \lambda^T \bar{\mathbf{K}}_{ji}^e \lambda & \lambda^T \bar{\mathbf{K}}_{jj}^e \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^e & \mathbf{K}_{ij}^e \\ \mathbf{K}_{ji}^e & \mathbf{K}_{jj}^e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即有 $\mathbf{K}_{ij}^e = \lambda^T \bar{\mathbf{K}}_{ij}^e \lambda$ (2-63)

式(2-61)若按单元节点向量的形式可写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^e \\ \mathbf{F}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^e & \mathbf{K}_{ij}^e \\ \mathbf{K}_{ji}^e & \mathbf{K}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} \quad (2-64)$$

由式(2-64)可以得出整体坐标系下的单元节点力向量为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_i^e &= \mathbf{K}_{ii}^e \delta_i + \mathbf{K}_{ij}^e \delta_j \\ \mathbf{F}_j^e &= \mathbf{K}_{ji}^e \delta_i + \mathbf{K}_{jj}^e \delta_j \end{aligned} \right\} \quad (2-65)$$

整体坐标系下的单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 仍为 6×6 阶矩阵, 且具有局部坐标系下单元刚度矩阵的所有特性。导出整体坐标系下的单元刚度矩阵, 其余分析与桁架有限元分析方法完全一致。

2.3.3 等效节点载荷和载荷向量

与桁架结构一样, 对于作用在节点上的载荷, 可以直接与单元节点力建立平衡方程, 但对于非节点载荷, 必须进行等效处理转化为等效节点载荷, 组建有限元方程时按节点外载荷的方式进行处理。

1. 局部坐标系下的等效节点载荷计算

将非节点载荷转换到节点上, 转化为等效节点载荷, 应按静力等效原则来进行, 由此转化而引起的单元的内力和应力差异, 只是局部的, 不会影响整个结构上的应力分布。在刚架结构中, 将某一杆件上的非节点载荷转化为等效节点载荷, 只影响该杆件上的应力分布, 而对其他杆件的应力不产生影响。

对于作用于梁单元上的非节点载荷只需给出载荷作用下两端固定梁的固端反力(相当于节点对单元的作用力)计算表达式, 然后将固端反力加一负号即为等效节点载荷(相当于单元对节点的作用力)。在表2-1中给出用力法求得的几种常用非节点载荷的等效节点载荷。

表 2-1 几种常用非节点载荷的等效节点载荷

	$F_{xi} = F_{xj} = 0,$ $F_{yi} = (3a + b)Pb^2 / l^3, F_{yj} = (a + 3b)Pa^2 / l^3,$ $M_i = Pab^2 / l^2, M_j = -Pa^2b / l^2$

续表

	$F_{xi} = F_{xj} = 0,$ $F_{yi} = 6Mab / l^2, F_{yj} = -F_{yi},$ $M_i = (2a - b)Mb / l^2, M_j = (2b - a)Ma / l^2$
	$F_{xi} = Pb / l, F_{yi} = Pa / l,$ $F_{xj} = F_{yj} = 0, M_i = M_j = 0$
	$F_{xi} = F_{xj} = 0,$ $F_{yi} = ql / 2, F_{yj} = F_{yi},$ $M_i = ql^2 / 12, M_j = -ql^2 / 12$
	$F_{xi} = F_{xj} = 0, F_{yi} = (2l^3 - 2a^2l + a^3)qa / (2l^2),$ $F_{yj} = (2l - a)qa^3 / (2l^3),$ $M_i = (6l^2 - 8al + 3a^3)qa^2 / (12l^2),$ $M_j = -(4l - 3a)qa^3 / (12l^2)$
	$F_{xi} = F_{xj} = 0,$ $F_{yi} = 3ql / 20, F_{yj} = 7ql / 20,$ $M_i = ql^2 / 30, M_j = -ql^2 / 30$
	$M_{ki} = M_k b / l, M_{kj} = M_k a / l,$ M_k, M_j, M_j 均为绕杆件轴线的扭矩

2. 整体坐标系下的载荷向量计算

上述得出的等效节点载荷和节点载荷是沿单元局部坐标系的坐标轴方向，为了建立节点平衡方程，须将其转换为整体坐标系下的节点载荷，满足关系式 $F^e = T^T \bar{F}^e$ ，即为有限元方程的右端载荷向量。

此外，平面刚架的有限元方程组建方法与平面桁架的完全相同，仍采用刚度集成法。

【例 2-2】 计算图 2-11 中所示平面刚架的内力（不考虑剪切的影响）。设各杆件的长度、截面尺寸和制造材料均相同，其面积为 $A = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ，惯性矩 $I = 1.22 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ ，弹性模量 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 。

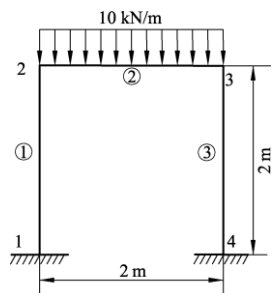


图 2-11 平面刚架及单元、节点编号

解:

(1) 结构离散化。

对图 2-11 所示平面刚架进行单元划分及节点和单元编号。

(2) 计算单元在局部坐标系下的刚度矩阵。

因为图示 3 个单元的长度、截面尺寸和制造材料均相同, 所以 3 个单元在局部坐标系下的单元刚度矩阵完全相同。

由于不考虑剪切的影响, 由式 (2-49) 知, 单元刚度矩阵中各个元素的分别为 $\frac{EA}{l} = 8.40 \times 10^8 \text{ N/m}$, $\frac{12EI}{l^3} = 0.39 \times 10^8 \text{ N/m}$, $\frac{6EI}{l^2} = 0.39 \times 10^8 \text{ N}$, $\frac{2EI}{l} = 0.26 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\frac{4EI}{l} = 0.51 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

将以上各个参数代入式 (2-49) 得

$$\bar{\mathbf{K}}^1 = \bar{\mathbf{K}}^2 = \bar{\mathbf{K}}^3 = 10^8 \times \begin{bmatrix} 8.40 & 0 & 0 & -8.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0.39 & 0.39 & 0 & -0.39 & 0.39 \\ 0 & 0.39 & 0.51 & 0 & -0.39 & 0.26 \\ -8.40 & 0 & 0 & 8.40 & 0 & 0 \\ 0 & -0.39 & -0.39 & 0 & 0.39 & -0.39 \\ 0 & 0.39 & 0.26 & 0 & -0.39 & 0.51 \end{bmatrix}$$

(3) 计算单元在整体坐标系下的刚度矩阵。

单元①和③的局部坐标系与整体坐标系的夹角相同, 且 $\alpha = 90^\circ$, 代入式 (2-59) 求得单元的坐标变换矩阵为

$$\mathbf{T}^1 = \mathbf{T}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

单元②的局部坐标系与整体坐标系的方向相同, 且 $\alpha = 0^\circ$, 代入式 (2-59) 求得单元的坐

标变换矩阵为

$$T^2 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由式(2-62)得,不同单元在整体坐标系下的刚度矩阵分别为

$$K^1 = K^3 = 10^8 \times \begin{bmatrix} 0.39 & 0 & -0.39 & -0.39 & 0 & -0.39 \\ 0 & 8.40 & 0 & 0 & -8.40 & 0 \\ -0.39 & 0 & 0.51 & 0.39 & 0 & 0.26 \\ -0.39 & 0 & 0.39 & 0.39 & 0 & 0.39 \\ 0 & -8.40 & 0 & 0 & 8.40 & 0 \\ -0.39 & 0 & 0.26 & 0.39 & 0 & 0.51 \end{bmatrix}$$

$$K^2 = 10^8 \times \begin{bmatrix} 8.40 & 0 & 0 & -8.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0.39 & 0.39 & 0 & -0.39 & 0.39 \\ 0 & 0.39 & 0.51 & 0 & -0.39 & 0.26 \\ -8.40 & 0 & 0 & 8.40 & 0 & 0 \\ 0 & -0.39 & -0.39 & 0 & 0.39 & -0.39 \\ 0 & 0.39 & 0.26 & 0 & -0.39 & 0.51 \end{bmatrix}$$

(4) 计算等效节点载荷。

由表 2-1 知,单元②在均布载荷作用下,节点对单元②的作用力和力矩分别为

$$\begin{aligned} P_{x2} = P_{x3} &= 0 \\ P_{y2} = P_{y3} &= -ql/2 = -10 \text{ kN} \\ M_2 = -M_3 &= -ql^2/12 = -3.33 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

则 2、3 节点的等效节点载荷与上式各力和力矩大小相等方向相反,是一对作用力与反作用力。

由于单元②的局部坐标系与整体坐标系一致,因此,2、3 节点的等效节点载荷不需进行坐标变换。

(5) 有限元方程的建立。

因为单元刚度矩阵在整体坐标系下具有分块性,因此,根据式(2-64)可将 3 个单元的节点力与节点位移写成子刚度矩阵的形式如下:

对于单元①

$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

对于单元②

$$\begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

对于单元③

$$\begin{bmatrix} F_4^{(3)} \\ F_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44}^{(3)} & K_{43}^{(3)} \\ K_{34}^{(3)} & K_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_4 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

在以上各式中，节点力分别为节点对相应单元的作用力，与单元对节点的作用力大小相等方向相反，是一对作用力与反作用力。

现以节点 2 为研究对象，建立节点的平衡方程为

$$\begin{aligned} \sum F_2 &= -F_2^1 - F_2^2 + P_2 = 0 \\ P_2 &= F_2^1 + F_2^2 \end{aligned}$$

同理，可以得出其余节点的平衡方程分别为

$$\begin{aligned} P_1 &= F_1^{(1)} \\ P_2 &= F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ P_3 &= F_3^{(2)} + F_3^{(3)} \\ P_4 &= F_4^{(3)} \end{aligned}$$

综合以上各式，有

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & 0 \\ 0 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ 0 & 0 & K_{43}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}$$

将 3 个单元在整体坐标系下的刚度矩阵代入上式，得出平面刚架的有限元方程为

$$10^5 \times \begin{bmatrix} 0.39 & 0 & -0.39 & -0.39 & 0 & -0.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.40 & 0 & 0 & -8.40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.39 & 0 & 0.51 & 0.39 & 0 & 0.26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.39 & 0 & 0.39 & 0.39 + 8.40 & 0 + 0 & 0.39 + 0 & -8.40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8.40 & 0 & 0 + 0 & 8.40 + 0.39 & 0 + 0.39 & 0 & -0.39 & 0.39 & 0 & 0 & 0 \\ -0.39 & 0 & 0.26 & 0.39 + 0 & 0 + 0.39 & 0.51 + 0.51 & 0 & -0.39 & 0.26 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8.40 & 0 & 0 & 8.40 + 0.39 & 0 + 0 & 0 + 0.39 & -0.39 & 0 & 0.39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.39 & -0.39 & 0 + 0 & 0.39 + 8.40 & -0.39 + 0 & 0 & -8.40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.39 & 0.26 & 0 + 0.39 & -0.39 + 0 & 0.51 + 0.51 & -0.39 & 0 & 0.26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.39 & 0 & -0.39 & 0.39 & 0 & -0.39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.40 & 0 & 0 & 8.40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.39 & 0 & 0.26 & 0.39 & 0 & 0.51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{21} \\ P_{21} \\ M \\ 0 \\ -10 \\ -3.33 \\ 0 \\ -10 \\ 3.33 \\ P_{24} \\ P_{24} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

(6) 引入边界条件。

由于总刚度矩阵为奇异矩阵，所以上式的解不确定，必须引入边界条件。现采用对角元素置“1”法，将已知位移为 0 的行和列中的全部元素均置为“0”，在行和列的交点处的元素置为“1”；同时将力向量矩阵中已知位移为 0 的对应元素也置为“0”。

由图 2-11 知，该平面刚架在节点 1 和 4 处的线位移和角位移均为 0，代入上式得

$$10^5 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.79 & 0 & 0.39 & -8.40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.79 & 0.39 & 0 & -0.39 & 0.39 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.39 & 0.39 & 1.02 & 0 & -0.39 & 0.26 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8.40 & 0 & 0 & 8.79 & 0 & 0.39 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.39 & -0.39 & 0 & 8.79 & -0.39 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.39 & 0.26 & 0.39 & -0.39 & 1.02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ -3.33 \\ 0 \\ -10 \\ 3.33 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(7) 求解线性方程组。

将上式中的方程 1、2、3、10、11 和 12 去掉，并利用对称性 $u_2 = -u_3$, $v_2 = v_3$, $\theta_2 = \theta_3$ ，则上式简化为

$$\left. \begin{aligned} 17.19u_2 + 0.39\theta_2 &= 0 \\ 8.4u_2 &= -10 \times 10^{-5} \\ 0.39u_2 + 0.76\theta_2 &= -3.33 \times 10^{-5} \end{aligned} \right\}$$

对上式求解得

$$\begin{aligned} u_2 &= 0.10 \times 10^{-5}, v_2 = -1.19 \times 10^{-5}, \theta_2 = -4.43 \times 10^{-5} \\ u_3 &= -0.10 \times 10^{-5}, v_3 = -1.19 \times 10^{-5}, \theta_3 = 4.43 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

(8) 计算节点位移引起的节点载荷。

由式 (2-58) 计算单元在局部坐标系下的节点位移，根据式 (2-43) 计算由单元节点位移引起的单元节点力分别计算如下：

对于单元①有

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0.1 \\ & & & & & & -1.19 \\ & & & & & & -4.43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.19 \\ -4.43 \end{bmatrix} \times 10^{-5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.19 \\ -0.10 \\ -4.43 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{x1}^1 \\ \bar{F}_{y1}^1 \\ M_1^1 \\ \bar{F}_{x2}^1 \\ \bar{F}_{y2}^1 \\ \bar{M}_2^1 \end{bmatrix} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 8.40 & 0 & 0 & -8.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0.39 & 0.39 & 0 & -0.39 & 0.39 \\ 0 & 0.39 & 0.51 & 0 & -0.39 & 0.26 \\ -8.40 & 0 & 0 & 8.40 & 0 & 0 \\ 0 & -0.39 & -0.39 & 0 & 0.39 & -0.39 \\ 0 & 0.39 & 0.26 & 0 & -0.39 & 0.51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.19 \\ -0.10 \\ -4.43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.996 \\ -1.689 \\ -1.113 \\ -9.996 \\ 1.689 \\ -2.220 \end{bmatrix}$$

在局部坐标系下，作用于节点 1 的力为固定支座对单元①的作用力。

对于单元③，根据对称性得

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{x4}^3 \\ \bar{F}_{y4}^3 \\ M_4^3 \\ \bar{F}_{x3}^3 \\ \bar{F}_{y3}^3 \\ \bar{M}_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{x1}^1 \\ -\bar{F}_{y1}^1 \\ -M_1^1 \\ \bar{F}_{x2}^1 \\ -\bar{F}_{y2}^1 \\ -\bar{M}_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.996 \\ 1.689 \\ 1.113 \\ -9.996 \\ -1.689 \\ 2.220 \end{bmatrix}$$

在局部坐标系下，作用于节点 4 的力为固定支座对单元③的作用力。

对于单元②，有 $\bar{\delta}^2 = \delta^2$ ，则

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{x2}^2 \\ \bar{F}_{y2}^2 \\ \bar{M}_2^2 \\ \bar{F}_{x3}^2 \\ \bar{F}_{y3}^2 \\ \bar{M}_3^2 \end{bmatrix} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 8.40 & 0 & 0 & -8.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0.39 & 0.39 & 0 & -0.39 & 0.39 \\ 0 & 0.39 & 0.51 & 0 & -0.39 & 0.26 \\ -8.40 & 0 & 0 & 8.40 & 0 & 0 \\ 0 & -0.39 & -0.39 & 0 & 0.39 & -0.39 \\ 0 & 0.39 & 0.26 & 0 & -0.39 & 0.51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.10 \\ -1.19 \\ -4.43 \\ -0.10 \\ -1.19 \\ 4.43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.680 \\ 0 \\ -1.108 \\ -1.680 \\ 0 \\ 1.108 \end{bmatrix}$$

在局部坐标系下，作用于节点 2 和 3 的力与力矩分别满足平衡条件。

