高等职业技术教育提质培优行动计划成果系列
省级精品课配套教材
线上＋线下混动式新形态教材

高等数学

主　编　柴艳玲　欧阳建新

副主编　吴继康　陈小丹　梁勇锋

参　编　金瑾芸　李　曦　李　谊
聂　强　杨万梅　杨　赟

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 柴艳玲，欧阳建新主编. -- 成都：西南交通大学出版社，2024.1

ISBN 978-7-5643-9648-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①柴… ②欧… Ⅲ. ①高等数学 Ⅳ. ①O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字（2023）第 246111 号

Gaodeng Shuxue

高等数学

主编 柴艳玲 欧阳建新

责任编辑	孟秀芝
封面设计	吴 兵
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市金牛区二环路北一段 111 号 西南交通大学创新大厦 21 楼）
邮政编码	610031
营销部电话	028-87600564 028-87600533
网址	http://www.xnjdcbs.com
印刷	成都勤德印务有限公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印张	13.75
字数	343 千
版次	2024 年 1 月第 1 版
印次	2024 年 1 月第 1 次
定价	42.00 元
书号	ISBN 978-7-5643-9648-0

课件咨询电话：028-81435775
图书如有印装质量问题 本社负责退换

前 言 Preface

《职业教育提质培优行动计划（2020—2023 年）》提出，要面向公共基础课和量大面广的专业（技能）课，分级遴选 5 000 门左右职业教育在线精品课程. 本书是“高等数学”精品课程的配套教材，是符合贵州特色的教材，可作为各类高等职业院校高等数学课程的通用教材，也可作为学生专升本的参考用书，同时还可以作为数学爱好者的自学参考用书.

考虑到高等职业院校的学生数学基础，“高等数学”课程的教学要遵循“实用为本、够用为度”的基本要求. 在本书的编写过程中，我们参考了大量的资料，在内容上兼顾知识点的系统性和实用性，淡化了理论证明，尽可能地运用学生容易理解的语言阐述相关的定义、原理、定理等. 附录中增加了必要的初等数学知识，同时尽量覆盖专升本考试大纲知识点，既满足了基础较差的同学复习回顾的需要，又兼顾了专升本同学考试的需求.

本书的主要内容为函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分. 每一小节后面设置 A、B 两组习题，每章后设置 A、B 两组复习题，根据学生基础不同，做到分层教学.

本书作为“高等数学”精品课程配套教材，配有高质量的教学资源：电子版教案、多媒体课件、习题集、课程微课等视频资源，可供教师课堂教学使用，也可作为线上自学的示范资源供学生选用，在“线上 + 线下”混合教学中提供优质资源.

本书主要由贵州电子商务职业技术学院教师编写完成，柴艳玲、欧阳建新任主编. 编写分工为：第一章由杨赟、金瑾芸老师编写，第二章由李曦、梁勇锋老师编写，第三章由陈小丹、吴继康老师编写，第四章由李谊、杨万梅老师编写，第五章由聂强、柴艳玲老师编写. 全书统稿工作由柴艳玲完成，审稿工作由陈小丹完成.

在组织本书编写和统稿的过程中，我们参考了大量的高等数学相关文献资料，获得了许多宝贵的意见和建议，在此对这些资料的作者表示诚挚的感谢.

尽管我们在编写过程中尽心竭力，但由于水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，敬请广大专家和读者给予批评指正.

编 者

2023 年 2 月

目　录

Contents

第 1 章　函数、极限与连续

初等数学研究的基本上是常量，而高等数学研究的对象是函数.

17 世纪，函数才被作为明确的数学概念引入，但是当时引入的大部分函数是被当作曲线来研究的. 1673 年，德国数学家莱布尼茨首先使用函数（function）一词. 1734 年，瑞士数学家欧拉按代数观念给函数下了定义——变量的解析式. 19 世纪，法国数学家柯西从“对应关系”的角度定义函数，而德国数学家狄利克雷将之推广，并指出：“对于每一个确定的 x 值，y 总有完全确定的值与之对应，则 y 是 x 的函数.”这就是我们常说的经典函数定义. 我国清代数学家李善兰在翻译《代数学》一书时，把“function”译成“函数”，意为“凡式中含天，为天之函数”，这就是中文数学书中“函数”一词的由来.

函数极限是高等数学中的另一个主要概念，也是高等数学这门课程的基本推理工具. 极限的思维可以追溯到古希腊时期，我国古代的极限思想萌芽出自《庄子・天下篇》——“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，描述了一个趋于零但总不是零的无限变化过程. 魏晋时期数学家刘徽创造了“割圆术”：用圆内接正多边形无限接近圆周. 这是一个由近似到精确、由量变到质变的无限变化过程. 刘徽以及之后的祖冲之用“割圆术”计算出当时世界上最准确的圆周率. 这种无限逼近某个值的思想就是极限概念的基础.

连续性是函数的一个重要性态，连续函数是高等数学研究的主要对象之一. 1817 年，捷克数学家波尔查诺在《纯粹分析的证明》中给出了连续函数的定义.

本章要求在初等数学的函数、极限和连续概念的基础上进行学习、巩固和提高.

【本章学习目标】

◎ 理解函数的概念和性质，会求函数的定义域
◎ 熟练掌握六种基本初等函数的定义、性质及其图像
◎ 了解反函数、复合函数的概念，会分析复合函数的复合过程
◎ 理解极限的概念，掌握函数在某一点处极限的定义、左右极限与函数极限的关系
◎ 熟练掌握极限的四则运算及两个重要极限，熟练掌握函数极限的各种求法
◎ 理解无穷大、无穷小的概念及其相互关系，并对无穷小进行比较
◎ 熟练掌握函数连续性的概念，会判断函数的连续性，会求函数的间断点并确定其类型
◎ 了解闭区间上连续函数的性质，并会运用零点定理推证一些简单命题

1.1　初等函数

1.1.1　函数的概念

函数的概念与性质

函数主要探讨变量与变量之间的关系，先看如下实例.

实例 1　一枚炮弹发射后，经过 26 s 落到地面击中目标. 炮弹的射高为 845 m，且炮弹距地面的高度 h（单位：m）随时间 t（单位：s）变化的规律是

$$h=130t-5t^2$$

实例 2　“中国凉都”六盘水市 2022 年 8 月 1 日至 15 日每日最高气温统计如下表：

日期	8 月 1 日	8 月 2 日	8 月 3 日	8 月 4 日	8 月 5 日	8 月 6 日	8 月 7 日	8 月 8 日	8 月 9 日	8 月 10 日	8 月 11 日	8 月 12 日	8 月 13 日	8 月 14 日	8 月 15 日
当日最高气温/°C	27	25	28	27	26	23	25	28	29	28	26	27	28	28	28

以上两个实例中都有两个变量，并且这两个变量在某个范围内通过某种对应关系对应起来，且通过这个对应关系对应的是唯一确定的变量. 变量之间具有这样特征的依赖关系，就是函数关系.

1. 函数的定义

定义 1　如果变量 x 在其变化范围 D 内任意取一个数值，变量 y 按照一定对应法则总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记为

$$y=f(x), x\in D.$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 为函数的**定义域**.

对于 $x_0\in D$，按照对应法则 f，总有唯一确定的值 y_0 与之对应，称 y_0 为函数在点 x_0 处的**函数值**，记为

$$y_0=f(x_0) \quad \text{或} \quad y\big|_{x=x_0}.$$

当自变量 x 取遍定义域 D 内的各个数值时，对应变量 y 的全体组成的数集称为这个函数的**值域**.

函数的定义域 D 与对应法则 f 称为函数的两个要素. 如果两个函数的定义域 D 与对应法则 f 都相同，则称它们为**同一函数**.

函数的定义域在实际问题中应根据实际意义具体确定，如果不考虑实际意义，则使函数的表达式有意义的实数集合称为它的定义域，即自然定义域.

例 1　已知函数 $f(x)=x^2+2x-1$，求 $f(0), f(1), f(a)$ 及 $f(-x)$.

解　$f(0)=0^2+2\times0-1=-1$；

$f(1)=1^2+2\times1-1=2$；

$f(a)=a^2+2a-1$；

$f(-x)=(-x)^2+2(-x)-1=x^2-2x-1$.

通常求函数的定义域要考虑以下几点：

（1）分式函数的分母不为 0；

（2）偶次根式的被开方式大于等于 0；

（3）对数函数的真数大于 0；

（4）反正弦和反余弦函数的定义域均为$[-1, 1]$.

若函数表达式中含有上述两种以上，则应取各部分定义域的交集.

例 2　求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-2}$ 的定义域.

解　根据“偶次根式的被开方式应大于等于零”“分式函数分母不为零”，可以列式如下：

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x \geqslant -3 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

因此，函数的定义域为

$$D=[-3,2)\cup(2,+\infty).$$

例 3　判断下列各对函数是否为同一函数：

（1）$f(x)=\dfrac{x}{x}$ 和 $g(x)=1$；

（2）$f(x)=x$ 和 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

（3）$f(x)=x$ 和 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$.

解　根据同一函数的概念，有

（1）$f(x)=\dfrac{x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)=1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 定义域不同，不是同一函数.

（2）$f(x)=x$ 和 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$. 定义域相同，但是对应法则不同，不是同一函数.

（3）$f(x)=x$ 和 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$. 定义域相同，对应法则也相同，是同一函数.

2. 分段函数

例 4　2023 年贵阳市出租车白天的基本收费标准是：若行驶里程不超过 3 千米，则收费 10 元；若超过 3 千米，则超出的部分按每千米 1.8 元收费. 试写出出租车每次行驶的运费 y（元）与行驶里程数 x（千米）之间的关系

解　$y=\begin{cases} 10, & x \leqslant 3, \\ 10+(x-3)\times 1.8, & x>3, \end{cases}$ 即 $y=\begin{cases} 10, & x \leqslant 3 \\ 4.6+1.8x, & x>3 \end{cases}$

以上函数关系在定义域内的不同部分，函数关系由不同式子分段表达，称这种函数为分段函数. 分段函数是由几个关系式合起来表示的一个函数，而不是几个函数. 分段函数的定义域是由各段自变量取值的并集.

常见的分段函数有绝对值函数和符号函数.

（1）绝对值函数（见图 1-1-1）： $y=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

（2）符号函数（见图 1-1-2）： $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

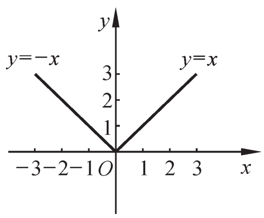


图 1-1-1

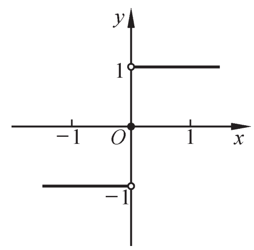


图 1-1-2

1.1.2 函数的性质

1. 函数的奇偶性

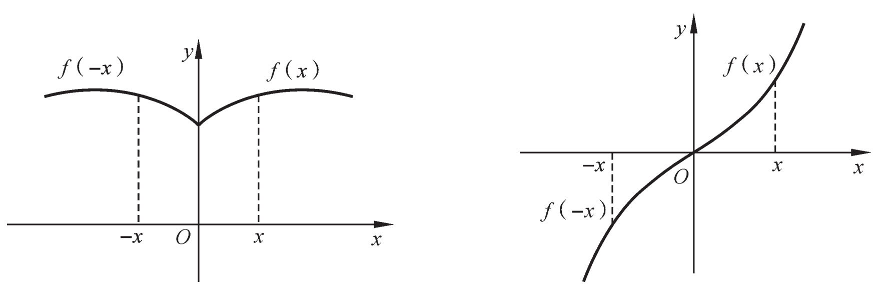
定义 2 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即对于任意 $x \in D$，都有 $-x \in D$，则

（1）若 $f(-x)=f(x)$， $x \in D$，称 $f(x)$ 为**偶函数**；

（2）若 $f(-x)=-f(x)$， $x \in D$，称 $f(x)$ 为**奇函数**.

否则，称 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

如图 1-1-3 所示，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.



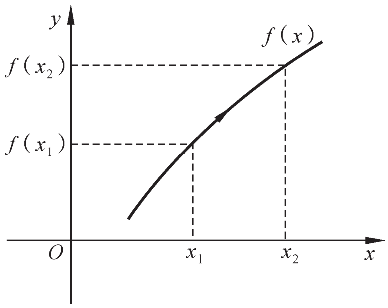
（a）偶函数　　（b）奇函数

图 1-1-3

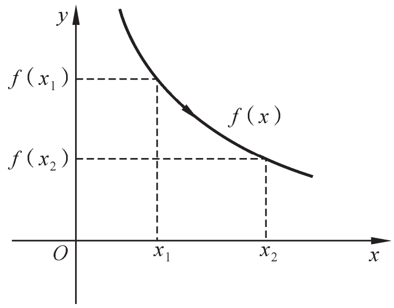
例如，函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内， $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，所以， $f(x)=x^2$ 为偶函数；函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内， $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，所以， $f(x)=x^3$ 为奇函数.

2. 函数的单调性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，对于任意 $x_1,x_2\in I$，
若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是**单调递增函数**，如图 1-1-4（a）所示；
若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是**单调递减函数**，如图 1-1-4（b）所示.



（a）单调递增函数



（b）单调递减函数

图 1-1-4

例如，函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增；函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减，在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内不单调.

3. 函数的周期性

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使得任意 $x\in D$，都有 $x\pm T\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**（通常指最小正周期）.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的周期为 2π；正切函数 $y=\tan x$ 和余切函数 $y=\cot x$ 的周期为 π.

4.函数的有界性

定义 5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果存在一个正数 M，对任意 $x\in I$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**，$f(x)$ 为 I 上的**有界函数**；否则，称函数 $f(x)$ 在 I 上**无界**，$f(x)$ 为 I 上的**无界函数**.

从图像来看，有界函数的图像必介于两条水平直线之间（见图 1-1-5）.

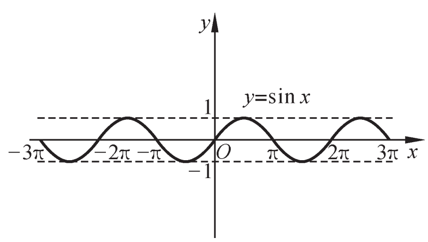


图 1-1-5

例如，正弦函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$；函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 内有界，在 $(0,1)$ 内无界.

1.1.3 反函数

定义 6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于值域 M 中的每一个 y，在 D 中都有唯一的 x 与之对应，也就是说变量 x 是变量 y 的函数，称它为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in M$. 习惯上，用 x 表示自变量，y 作因变量. 因此，$y=f(x)$ 的反函数通常记为 $y=f^{-1}(x)$.

例 5 求函数 $y=2x+1$ 的反函数.

解 先从 $y=2x+1$ 推导出 $x=\dfrac{1}{2}(y-1)$，再交换 x 和 y，得出反函数

$$y=\frac{1}{2}(x-1)\,,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

并不是所有函数都有反函数，但单调函数必有反函数.

注 （1）单调函数具有反函数；

（2）$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数；

（3）$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

1.1.4 基本初等函数

常数函数 $y=c(c\in\mathbf{R})$

幂函数 $y=x^{a}(a\in\mathbf{R})$

指数函数 $y=a^{x}(a>0,且a\neq1)$

对数函数 $y=\log_{a}x(a>0,且a\neq1)$

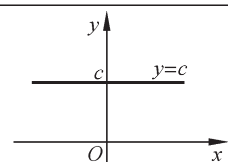
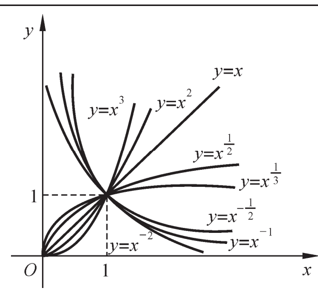
三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$

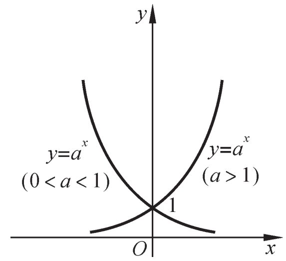
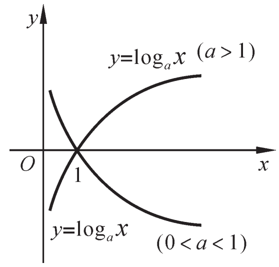
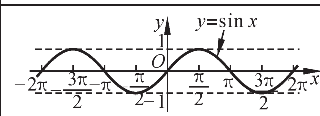
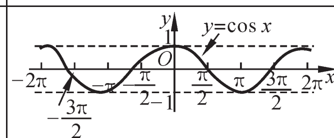
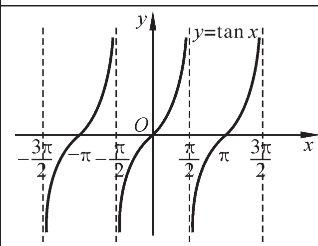
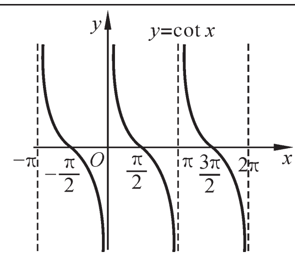
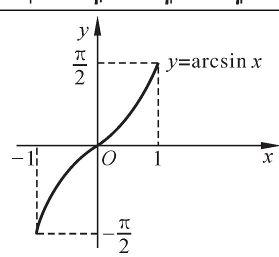
常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等六类函数构成初等函数的基础，习惯上称它们为基本初等函数.

下面对常用基本初等函数的定义域、值域、图像和主要特征作简单的介绍（见表 1-1-1）.

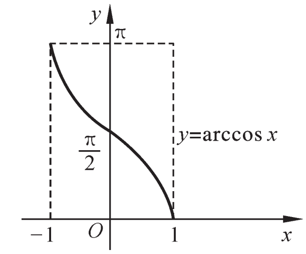
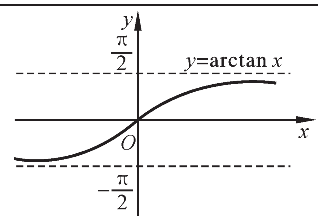
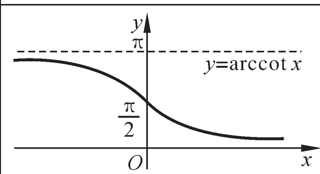
表 1-1-1

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要特征
常数函数	$y=c(c\in\mathbf{R})$	$x\in\mathbf{R}$ $y\in\{c\}$		经过点 $(0,c)$ 的水平直线
幂函数	$y=x^{a}(a\in\mathbf{R})$	不同的幂函数的定义域不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义，故仅作幂函数在第一象限的图像		经过点 $(1,1)$ 当 $a>0$ 时，$y=x^{a}$ 为增函数；当 $a<0$ 时，$y=x^{a}$ 为减函数

续表

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要特征
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,且a\neq 1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		图像在 x 轴上方，都经过点 $(0,1)$ 当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是减函数；当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是增函数
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,且a\neq 1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，都经过点 $(1,0)$ 当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是减函数；当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是增函数
三角函数	正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界
	余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界
	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(0,\pi)$ 内单调减少
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界

续表

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要特征
反三角函数	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

1.1.5 复合函数

定义 7 设 $y=f(u)$ 是 u 的函数，而 $u=\varphi(x)$ 是 x 的函数，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域交集非空，则 y 通过 u 成为 x 的函数，称 y 为 x 的**复合函数**，记为 $y=f(\varphi(x))$. 其中，u 称为**中间变量**.

注 （1）不是任意两个函数都可以复合成复合函数. 例如，$y=\log_2 u$ 和 $u=-x^2$ 不能复合. 因为 $y=\log_2 u$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$u=-x^2$ 的值域是 $(-\infty,0]$，二者没有公共元素.

（2）复合函数还可以由三个或三个以上的函数复合而成.

例 6 将下列函数复合成一个函数：

（1）$y=u^2,u=\sin x$；　　（2）$y=\arctan u,u=\lg v,v=x-1$.

解 （1）$y=\sin^2 x$；　　（2）$y=\arctan\lg(x-1)$.

为了更好地研究函数，还要掌握复合函数的复合过程，即复合函数的“分解”：将一个复合函数分解为若干个基本初等函数或基本初等函数的和差积商. 其分解方法是“由外到内，逐层分解”.

例 7 指出下列复合函数的复合结构：

（1）$y=\ln\sin x$；　　（2）$y=\sin^2 5x$.

解 （1）$y=\ln u,u=\sin x$；　　（2）$y=u^2,u=\sin v,v=5x$.

1.1.6 初等函数

定义 8 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所构成，并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，一次函数 $y=ax+b$，二次函数 $y=ax^2+bx+c$，$y=\sqrt{\cos\frac{x}{2}}$，$y=\sin x^2$ 和 $y=2\sqrt{\ln\cos x}+\frac{1}{1+x^2}$ 等都是初等函数.

本教材中所讨论的函数大部分为初等函数. 由初等函数的定义可知，分段函数一般不是初等函数.

习题 1.1

A 组

1. 下列各题中函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同，为什么？

（1）$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$；（2）$f(x)=\sqrt{\sin^2 x}, g(x)=\sin x$.

2. 求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\frac{x}{1-x}$；（2）$f(x)=-\sqrt{x-1}$；

（3）$f(x)=\lg(x+2)+1$；（4）$f(x)=\arccos\frac{x-1}{2}$.

3.（1）已知 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$，求 $f(0), f(2), f(a), f(x+1)$.

（2）已知 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x-2, & x>0, \end{cases}$ 求 $f(0), f(2), f(-1), f(f(1))$.

4. 将下列函数复合成一个函数：

（1）$y=u^4$，$u=\tan x$；（2）$y=\sin u$，$u=x^2+1$；

（3）$y=\mathrm{e}^u$，$u=\cos v$，$v=2x+1$；（4）$y=\log_2 u$，$u=\sin v$，$v=5x$.

5. 指出下列复合函数的复合过程：

（1）$y=(3x+1)^{10}$；（2）$y=\cos^2(x+1)$；

（3）$y=\lg(\sin(x-1))$；（4）$y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}$.

B 组

1. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty), (0,1), (1,+\infty)$ 上是否有界？

2. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x\cos x$；（2）$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$；（3）$f(x)=\ln(x^2+1)$.

3. 判断下列哪些函数是周期函数？对周期函数，求出其周期.

（1）$f(x)=\sin 5x$；（2）$f(x)=5\cos x$；（3）$f(x)=2\tan(3x+1)$.

4. 求出下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x-5}+\dfrac{1}{3-x}$；（2） $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\lg(2-x)$；

（3） $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x-1)$；（4） $y=5\arcsin(1-x)$.

5. 指出下列复合函数的复合过程：

（1） $y=\sin^2(3x+1)$；（2） $y=2\tan x^3$；

（3） $y=\ln\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)$；（4） $y=\cos\sqrt{1-x^2}$.

6. 下列函数是否可以构成复合函数：

（1） $f(u)=\arcsin u$， $u(x)=x^2$；（2） $f(u)=\sqrt{u}$， $u(x)=\lg\dfrac{1}{x^2+1}$.

7. 判断下列各组函数是否为同一函数：

（1） $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；（2） $f(x)=2\ln x, g(x)=\ln x^2$；

（3） $f(x)=x+3, g(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$；(4) $f(x)=\sin x, g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$.

1.2 极　限

1.2.1 数列的极限

1. 数列的概念

定义 1 按自然数 1, 2, 3, …编号依次排列的一组数，$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 称为数列，记为 $\{a_n\}$. 其中的每个数称为数列的项， a_1 称为首项， a_n 称为通项（一般项）.

例如： $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$ ，可记为数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$； $-1, 2, -3, 4, \cdots, (-1)^n n, \cdots$ ，可记为数列 $\{(-1)^n n\}$.

值得注意的是，每一个数列都对应着数轴上一个点列，点列中的每一个点都代表数列中的唯一项，这种对应好似函数中坐标和点的对应关系．再注意到，对数列 $\{a_n\}$ ，当 $n=1$ 时，得到第一项 a_1 ，当 $n=2$ 时，得到第二项 a_2 ，当 $n=3$ 时，得到第三项 a_3 ……可见，数列是一种特殊的函数，即数列可理解为定义域为正整数集 $\mathbf{N}^+$ 的函数，记为 $a_n = f(n)\ (n=1,2,\cdots)$.

例如： $a_n=\dfrac{1}{2^n}$ ，相应的数列为 $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \cdots$

2. 数列的极限

（1）当 n 无限增大时，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 无限接近于 0；

（2）当 n 无限增大时，数列 $\{(-1)^n n\}$ 的绝对值也无限增大；

（3）当 n 无限增大时，数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 无限接近于 0.

“无限接近”意味着什么？如何用数学语言描述它？接下来看数列极限的定义.

定义 2 若对于数列 $\{a_n\}$，当 n 无限增大时，数列的通项 a_n 无限接近于某个确定的常数 A，则称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，或称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 或 $a_n \to A\ (n\to\infty)$．若数列 $\{a_n\}$ 没有极限，则称该数列发散.

例 1 （1）讨论数列 $-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$ 的极限值；

（2）讨论数列 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \cdots, \frac{1}{3^{n-1}}, \cdots$ 的极限值.

解 （1）数列的通项公式为

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} -1, & n\ 为奇数, \\ 1, & n\ 为偶数 \end{cases}$$

所以，区分讨论：n 为奇数且趋于无穷大时，得 $a_n \to -1$；n 为偶数且趋于无穷大时，得 $a_n \to 1$．故数列 $\{(-1)^n\}$ 的极限不存在.

（2）数列的通项公式为

$$a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$$

当 $n\to\infty$ 时，有 $3^{n-1}\to\infty$，得 $\frac{1}{3^{n-1}}\to 0$．故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n-1}} = 0$.

3. 数列极限的性质

性质 1（唯一性） 收敛数列的极限必唯一.

性质 2（有界性） 收敛数列必有界.

性质 3（夹逼准则） 对于数列 $\{x_n\}\{y_n\}\{z_n\}$，若从某一项开始满足 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

性质 4（单调有界定理） 单调有界数列必有极限.

1.2.2 函数的极限

函数的极限

函数 $y = f(x)$ 的变化与自变量 x 的变化有关．只有给出自变量 x 的变化趋向，才能确定在这个变化过程中函数 $f(x)$ 的变化趋势．下面分两种情况讨论.

1. 自变量趋向无穷大时函数的极限

例 2 当 $x\to\infty$ 时，观察下列函数的变化趋势：

（1）$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$；　　（2）$f(x) = \sin x$；　　（3）$f(x) = x^2$.

解 作出所给函数图形，如图 1-2-1 所示.

（1）由图 1-2-1（a）可以看出，当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 从大于 1 趋近于 1，当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)$ 从小于 1 趋近于 1，即 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 趋近于一个确定的常数 1.

（2）由图 1-2-1（b）可以看出，不论 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 的值在 -1 和 1 之间波动，不趋于一个常数.

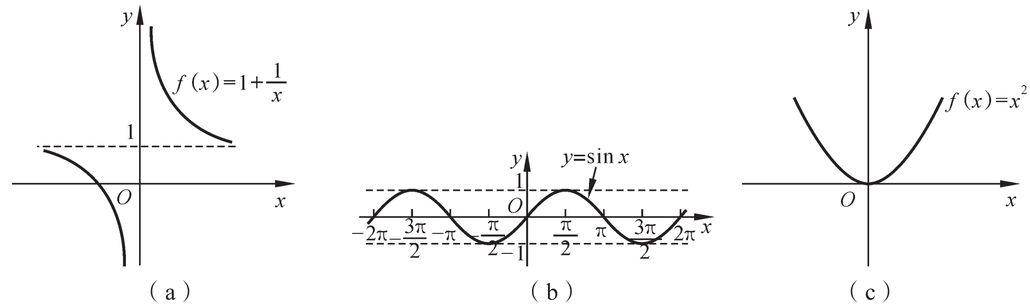


图 1-2-1

(3) 由图 1-2-1 (c) 可以看出，不论 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 时，$f(x)$ 的值都无限增大，不趋于一个常数.

例 2 表明，当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 的变化趋势有三种：一是趋于确定的常数；二是在某区间之间振荡；三是趋于无穷大. 第一种称 $f(x)$ 有极限，第二种和第三种称 $f(x)$ 没有极限.

定义 3 如果 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to \infty).$$

如果在上述定义中，限制 x 只取正值或只取负值，即有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty} f(x) = A,$$

则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 时的极限，且可以得到下面的定理 1.

定理 1 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

例 3 讨论下列极限是否存在：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$.

解 (1) 因为当 $|x|$ 无限增加时，$\frac{1}{x}$ 无限接近于 0，即函数 $\sin\frac{1}{x}$ 无限接近于 0，所以，

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = 0.$$

(2) 观察函数 $y = \arctan x$ 的图形 (如图 1-2-2)，可以看出，当 $x \to +\infty$ 时，y 无限接近于 $\frac{\pi}{2}$；当 $x \to -\infty$ 时，y 无限接近于 $-\frac{\pi}{2}$. 即有 $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x \neq \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ 不存在.

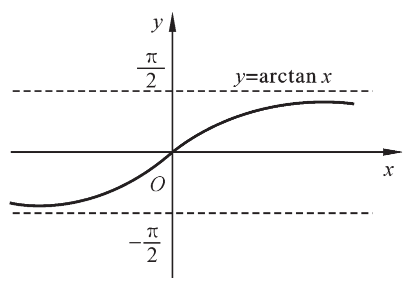


图 1-2-2

那么数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$，与函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 有什么关系呢？由于在数列极限 $n \to \infty$ 的过程中，n 是正整数，而在函数极限 $x \to +\infty$ 的过程中，是指 x 取正实数的情况，所以说 $n \to \infty$ 是 $x \to +\infty$ 的特殊情况，即数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$ 是极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 的特殊情况，且有下面的定理 2.

定理 2 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.

例如，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x}=0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

2. 自变量趋向有限值时函数的极限

例 4 考察当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=x^2-1$ 的变化趋势.

解 如图 1-2-3 所示，当 x 无限趋向于 0 时，$f(x)=x^2-1$ 无限趋近于 -1.

例 5 考察当 $x\to 2$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的变化趋势.

解 如图 1-2-4 所示，虽然函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 在 $x=2$ 处无定义，但是当 x 无论从左边还是右边无限趋向于 2 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 无限趋近于 4.

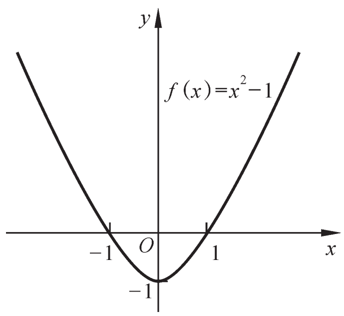


图 1-2-3

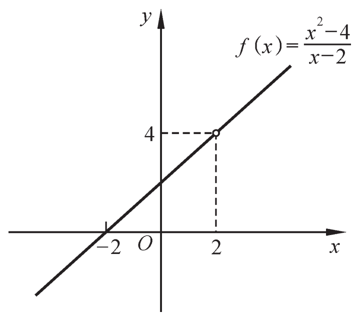


图 1-2-4

从例 4 和例 5 可以看到，当 $x\to x_0$ 时函数的变化趋势与函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否有定义无关.

先介绍邻域的概念：设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的全体，称为以点 a 为中心、δ 为半径的**邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$．若把邻域的中心去掉，所得邻域称为点 a 的**空心邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$．称 $(a-\delta,a)$ 为左邻域，$(a,a+\delta)$ 为右邻域.

定义 4 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 内有定义，当 x 无限趋向于 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

根据定义，容易得出下面的结论：

$$\lim_{x\to x_0} C=C\ （C\text{ 为常数}），\quad \lim_{x\to x_0} x=x_0 .$$

如图 1-2-5 所示，列出 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在的三种情况：

（1）当 $x\to 0$ 时，左侧无限接近的常数 A，右侧无限接近的常数 B，A 与 B 不同；

（2）当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的值总在 1 与 -1 之间无穷次振荡而不趋向确定的值；

（3）当 $x\to 0$ 时，函数 $|f(x)|$ 无限变大.

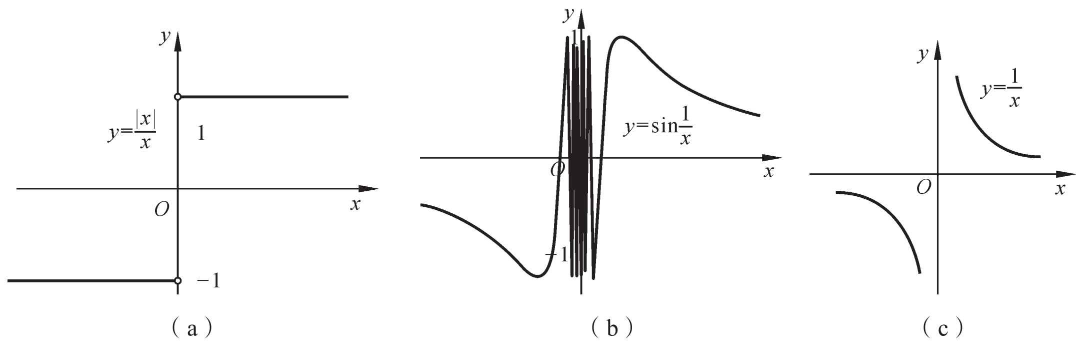


图 1-2-5

在定义 4 中，$x \to x_0$ 是指自变量 x 从 x_0 的左右两侧同时趋向于 x_0．在研究某些函数极限问题时，有时仅需考虑从某一侧趋向于 x_0 的情况.

定义 5　当自变量 x 从 x_0 的左侧（或右侧）无限趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左极限**（**或右极限**），记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A,$$

简记为

$$f(x_0-0)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A.$$

由定义 4 和定义 5 可以得到下面的定理 3.

定理 3　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

注　左、右极限主要用于讨论分段函数分段点处的极限情况.

例 6　设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ 1-x, & x<0, \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1, \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0,$$

即

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 7　设 $f(x)=\begin{cases} x, & x>0, \\ 1, & x=0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0, \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0,$$

即

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0,$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

3. 函数极限的性质

利用极限的定义，可以得到函数极限的一些重要性质.

性质 1（唯一性） 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则其极限是唯一的.

性质 2（有界性） 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，函数 $f(x)$ 必在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 内有界，即 $|f(x)|\leqslant M$（常数 $M>0$）.

性质 3（保号性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在 x_0 的某个去心邻域内恒有 $f(x)<0$（或 $f(x)>0$），则有 $A<0$（或 $A>0$）.

推论 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则在 x_0 的某个去心邻域内恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

习题 1.2

A 组

1. 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

（1）$\{a_n\}=\left\{(-1)^n\dfrac{1}{n}\right\}$；（2）$\{a_n\}=\left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}$.

2. 观察 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ 的极限.

3. 观察 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的极限.

4. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<3, \\ 3x-1, & x\geqslant 3, \end{cases}$$

作 $f(x)$ 的图形，并讨论 $x\to 3$ 时函数 $f(x)$ 的左、右极限.

5. 设函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$，求 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$，并说明 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在.

6. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} 1-2x, & x<0, \\ x^2, & x\geqslant 0, \end{cases}$$

求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，并由此判断 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是否存在.

B 组

1. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的（　　）条件.

A. 必要不充分　　B. 充分不必要

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要

2. 已知 $f(x_0)$ 不存在，下列说法中准确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 一定存在　　B. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 一定不存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 有可能存在　　D. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x+3, x<1,\\ 2, \quad x=1,\\ x^2-1, x>1,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x), \lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-x+a, x<0,\\ 2, \quad x=0,\\ x+b, \quad x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限为 1，则 a,b 的值分别是多少？

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2a+\sin x, x<0,\\ 4, \quad x=0,\\ 3x+b, \quad x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限为 2，则 a,b 的值分别是多少？

1.3　极限的运算

1.3.1　极限的运算法则

初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合运算构成的，所以计算初等函数极限，就需要掌握函数四则运算的极限法则与复合函数的极限运算法则.

法则 1（函数四则运算的极限法则）

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则有

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$；

特别地，$\lim\limits_{x\to x_0}(kf(x))=k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k\cdot A$（$k$ 为常数）;

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}$（$B\neq 0$）.

注　（1）当 x 以其他方式变化（$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时，相应的结论仍成立.

（2）该法则对数列极限，相应的结论仍成立.

（3）和、差、积的极限运算法则可以推广到有限个函数的情形.

法则 2（复合函数的极限法则）　设 $y=f(g(x))$ 是由 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 复合而成的. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0, \lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim_{x\to x_0} g(x)).$$

以上两个法则表明，只要满足法则中的条件，极限运算、函数的四则（复合）运算可以交换次序.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x-5}{3x^2+2x}$.（**直接代值法**）

解 因为

$$\lim_{x\to 1}(2x^3+x-5)=2\times 1^3+1-5=-2\,,$$

$$\lim_{x\to 1}(3x^2+2x)=3\times 1^2+2\times 1=5\neq 0\,,$$

所以
$$原式=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+x-5)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2x)}=-\frac{2}{5}\,.$$

不难证明：对有理函数（多项式及多项式之商）求 $x\to x_0$ 时的极限，只需将 x 代入有理式中，但要求分母的极限不为零.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}$.

解 显然，该函数满足法则 2 的条件，按法则 2，有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}=\sqrt{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x}=\sqrt{\tan\frac{\pi}{4}}=\sqrt{1}=1\,.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x-1}$.

解 因为当 $x\to 1$ 时分母的极限为 0，这时不能直接应用极限的运算法则. 考虑原函数倒数的极限，有 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+2}=0$，因此 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x-1}=\infty$.

计算函数极限，有时需作适当变形（如因式分解、根式有理化、约分、通分、分子分母同除以一个变量等）后才能套用上述法则.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$.（**约分消零因子法**）

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=\dfrac{1}{2}$.

例 5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.（**分子或分母有理化法**）

解 由于上式中的分母趋于 0，不满足法则 1 的条件. 但可先进行变形，使条件满足后再用法则 1，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$
$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.（**通分再约分法**）

解 由于第一式与第二式中分子、分母极限都不存在，不能直接用法则 1. 先通分，将两式变形后，再用法则 1，则有

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)-2}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

例 7 求下列极限：（**多项式相除**）

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4}{2x^2-3x+5}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x-1}{3x^3+x^2+1}$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^2+5}$.

解 题目给出的求极限的三个分式，分子、分母极限都不存在，不能直接用法则 1.

（1）分子、分母的最高次项均为 x^2，为了使分子、分母极限都存在，用分子、分母同时除以 x^2，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{2x^2-3x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2+4}{x^2}}{\dfrac{2x^2-3x+5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}=\frac{3}{2}.$$

（2）分子的最高次项为 x^2，分母的最高次项为 x^3，为了使分子、分母极限都存在，用分子、分母同时除以 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x-1}{3x^3+x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x^2+2x-1}{x^3}}{\dfrac{3x^3+x^2+1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=0.$$

（3）分子的最高次项为 x^3，分母的最高次项为 x^2，为了使分子、分母极限都存在，用分子、分母同时除以 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-1}{x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^3}}{\dfrac{x^2+5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}$$

上式的分母极限为 0，因此不能直接用极限的运算法则，仿照例 3，求原函数的倒数的极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{2x^3+x^2-1}==\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=0$$

所以 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-1}{x^2+5}=\infty.$$

由例 7，归纳可得以下的一般结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n\\ \infty, & m>n\end{cases}\quad (a_0\neq 0, b_0\neq 0).$$

1.3.2　两个重要极限

1．第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

列表 1-3-1，观察 $x\to 0$ 时 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的变化趋势，容易观察出第一个重要极限结论的正确性.

表 1-3-1

x（弧度）	± 0.5	± 0.1	± 0.05	± 0.01	$\cdots$	$\to 0$
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.958 86	0.999 33	0.999 58	0.999 98	$\cdots$	$\to 1$

该极限表明：当 $x\to 0$ 时，虽然分子、分母都趋于 0，但它们的比值却趋近于 1. 因此，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

例 8　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$；　（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}(a\neq 0, b\neq 0)$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=1$;

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{5x}=5\lim\limits_{5x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=5$;

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot ax}{\dfrac{\sin bx}{bx}\cdot bx}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{\lim\limits_{ax\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{bx\to 0}\dfrac{\sin bx}{bx}}=\dfrac{a}{b}$.

一般地，当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，若 $\alpha(x)\to 0$，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\right)$$

例 9　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$；　（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2\sin x}{3x+4\tan x}$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

（2）先用倍角公式变形，再用复合函数的极限法则，得

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x+2\sin x}{3x+4\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+2\frac{\sin x}{x}}{3+4\frac{\tan x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(1+2\frac{\sin x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to0}\left(3+4\frac{\tan x}{x}\right)}=\frac{1+2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}{3+4\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}}=\frac{1+2}{3+4}=\frac{3}{7}.$

2. 第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

先看 x 取正整数 n 的情况：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

列表 1-3-2，观察 $n\to\infty$ 时数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的变化趋势.

表 1-3-2

n	1	2	10	100	1 000	10 000	100 000	……
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2.000 000	2.250 000	2.593 742	2.704 814	2.716 924	2.718 146	2.718 268	……

由表 1-3-2 可以看出，当 n 不断增大时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的值也不断增大. 可以证明，当 n 无限增大时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 无限趋近于一个常数，通常用字母 e 表示这个常数，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

这个 e 就是自然对数的底. 许多自然现象都需要用它来表达，可计算得

$$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots$$

第二个重要极限结论，对 x 取任意实数也成立，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

上式中，如果令 $u=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$u\to0$，于是得 $\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$.

例 10 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$；（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$;

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\lim\limits_{2x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$;

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\left[\lim\limits_{\frac{x}{3}\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\mathrm{e}^{3}$;

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x\cdot(-1)}=\left[\lim\limits_{-x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$.

一般地，当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，若 $\alpha(x)\to\infty$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=\mathrm{e}$；当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，若 $\alpha(x)\to 0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}$.

例 11 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{x}$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+c}$.

解（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$;

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{3}=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$;

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+c}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{c}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}\cdot ab}\cdot 1=\mathrm{e}^{ab}$.

例 12 将本金 A_0 存入银行，设年利率为 r，试计算其连续复利.

解 根据已知条件，如果按一年计算一次利息，则

$$一年后本金与利息和=A_0+A_0r=A_0(1+r)；$$

如果按半年计算一次利息（这时半年利率为 $\dfrac{r}{2}$），则

$$一年后本金与利息和=A_0\left(1+\frac{r}{2}\right)+A_0\left(1+\frac{r}{2}\right)\cdot\frac{r}{2}=A_0\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2}；$$

如果按一年计算利息 n 次（这时每次利率为 $\dfrac{r}{n}$），则

$$一年后本金与利息和 = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n .$$

计算复利次数无限增大（即 $n\to\infty$ ）时，上式的极限就称为连续复利．则本金与利息和为

$$\lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = A_0\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}\cdot r} = A_0\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^r = A_0\mathrm{e}^r .$$

习题 1.3

A 组

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则（　　）．

A. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 一定不存在　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 不一定存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$ 一定不存在　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$ 一定存在

2. 下列关于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$ ($a_0\neq 0,b_0\neq 0$)的说法，错误的是（　　）．

A. 当 $m>n$ 时，所求极限为 0

B. 当 $m<n$ 时，所求为 ∞

C. 当 $m=n$ 时，所求极限为 $\dfrac{a_0}{b_0}$

D. 原式可化为 $\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)}{\lim\limits_{x\to\infty}(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n)}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$

3. 下列等式错误的是（　　）．

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

4. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{2x}=2$ ，则 $k=$（　　）．

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 计算下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+1}{5x^3+2x-3}$ ；　　（2） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ；

（3） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ ；　　（4） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

6. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 6x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(1-x)}{1-x^2}$；（4）$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$.

7. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x+1}$；（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}$.

B 组

1. 判断下列运算是否正确. 如果错误，请给出正确解法：

（1）$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-2}-\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4}{x^2-4}=\infty-\infty=0$；

（2）$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to3}(x^2-9)}{\lim\limits_{x\to3}(x-3)}=\dfrac{0}{0}=1$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+1}{x^3+4x-5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(3x^3+1)}{\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+3x-5)}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$；

（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

2. 若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$，则 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ 是（　　）.

A. 0　　B. −1　　C. 1　　D. 不存在

3. 若 $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$，$g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，则（　　）.

A. $f(x)=g(x)$　　B. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=g(x)$

C. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}g(x)$　　D. 以上等式都不成立

4. 填空题

（1）已知 a,b 为常数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+1}{2x-1}=3$，则 $a=$________，$b=$________.

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin bx}{\sin ax}=$________.

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+c}$ $(a,b,c$为整数$)=$________.

5. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{1-x^2}$；

（3）$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(x+t)^2-x^2}{t}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x}{3x^4-x+1}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x(x+1)}\right]$；

（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^5(3x-2)^{10}}{(2x-1)^{15}}$；

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{3x+1}$；

（10）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{2\sec x}$.

1.4 无穷小与无穷大

1.4.1 无穷小与无穷大的概念及关系

1. 无穷小

定义 1 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$），则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷小.

例如，$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}=0$，则称函数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ 当 $x\to 1$ 时为无穷小.

注 （1）无穷小不是很小的数，一个很小的正数（如百万分之一）不是无穷小；

（2）0 是无穷小，也是唯一可作为无穷小的常数；

（3）无穷小量必须指明自变量 x 的变化趋向.

2. 无穷大

定义 2 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty .$$

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$，因为当 $x\to 2$ 时，$\left|\dfrac{1}{x-2}\right|$ 无限增大，所以有 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$.

注 （1）无穷大不是很大的数，再大的正数（如 $10^{100\ 000}$）都不会无限增大，即不是无穷大；

（2）无穷大借用极限符号表示，所以无穷大必须指明自变量 x 的变化趋向；

（3）如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$，则函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限是不存在的. 但为了讨论方便，也可以说“函数的极限是无穷大”.

3. 无穷小与无穷大的关系

在同一变化过程中，无穷小与无穷大之间有如下关系：

定理 1 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；若 $f(x)$ 为无穷小（$f(x) \neq 0$），则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

定理 1 表明，非零无穷小与无穷大互为倒数. 如 $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$，则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

1.4.2 无穷小的性质

性质 1 有限个无穷小的代数和（和与差）仍是无穷小. 但无限个无穷小的代数和（和与差）未必是无穷小.

例如，当 $n \to \infty$ 时，$\dfrac{1}{n}$ 是无穷小，但是 n 个 $\dfrac{1}{n}$ 的和 $\underbrace{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}}_{n\text{个}}$ 的极限是 1，因此它不再是无穷小.

性质 2 有限个无穷小的积仍是无穷小.

性质 3 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小.

推论 常数与无穷小的乘积为无穷小.

例 1 设函数 $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2}$，求 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

解 因为 $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2} = 2 + \dfrac{1}{x^2}$，又因为 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}$ 为无穷小，所以

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty}\left(2 + \frac{1}{x^2}\right) = 2 + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 2.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

解 由 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ 知，$\dfrac{1}{x}$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷小，且 $|\sin x| \leqslant 1$（$\sin x$ 为有界函数），根据性质 5 可知，$\dfrac{\sin x}{x}$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷小，即

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

1.4.3 无穷小的比较

根据无穷小的性质可知，两个无穷小的和、差、积仍是无穷小，但是两个无穷小的商将出现不同的情况. 例如，当 $x \to 0$ 时，函数 x^2，$2x$，$\sin x$ 都是无穷小，但是

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}=\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\ .$$

这三个比值的极限不同，说明无穷小虽然都是以零为极限的函数，但是它们趋向于零的速度不一样. 为了反映无穷小趋向于零的快慢程度，下面给出无穷小阶的概念.

定义 3 设当 $x\to x_0$ 时，α 和 β 都是无穷小，则

（1）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

（2）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，称 β 是比 α 低阶的无穷小；

（3）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小. 特别地，当 $C=1$ 时，称 β 与 α 为等价无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$.

例如，由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}=0$，得 $x^2=o(2x)\ (x\to 0)$；

又如，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$，所以 $x-1$ 与 x^2-1 为 $x\to 1$ 时的同阶无穷小. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，得 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$.

可以证明：当 $x\to 0$ 时，有下列各组等价无穷小：

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \arctan x\sim x,$$

$$\arcsin x\sim x,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad (1+x)^a-1\sim ax$$

合理利用等价无穷小可以简化某些极限的运算.

定理 2 设 $x\to x_0$ 时，$\alpha\sim\alpha^*$，$\beta\sim\beta^*$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta^*}{\alpha^*}$ 存在，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta^*}{\alpha^*}\ .$$

注 当 x 以其他方式变化（如 $x\to\infty$, $x\to x_0^+$ 等）时，相应的结论仍成立.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$\sin 3x\sim 3x$，$\tan 5x\sim 5x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}\ .$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{2x}}{\ln(3x+1)}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{2x}-1\sim 2x$, $\ln(3x+1)\sim 3x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{2x}}{\ln(3x+1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\ln(3x+1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=-\frac{2}{3}\ .$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$.

由于当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}.$$

注 （1）等价无穷小替换只能用于乘除，而不能用于加减. 否则，容易出现如下错误：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^3}=0$.

（2）等价无穷小替换时，必须确保替换的因子是无穷小. 否则，容易出现如下错误：$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x+\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x+\pi}{x-\pi}=\infty$. 正确答案为

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x+\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{x-\pi}=1.$$

习题 1.4

A 组

1. 下列函数在什么情况下为无穷大，在什么情况下为无穷小?

（1）$f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$； （2）$f(x)=\ln x$；

（3）$f(x)=\dfrac{x-1}{x^3}$； （4）$f(x)=1-x$.

2. 下列函数在 $x\to 0$ 时，与 x^2 为同阶无穷小的是（　　）.

A. 2^x　　B. $x-\sin x$　　C. $1-\cos x$　　D. 2^x-2

3. 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}$； （2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan(1+x)}{1+x}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos n}{n^2}$； （4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$； （2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\arctan 2x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{\sin x^2}$；（4）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{x^2-1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 2x}$；（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\tan 2x}$.

B 组

1. 指出下列各题中哪些是无穷小，哪些是无穷大？

（1）$\dfrac{1+x}{5x^2}$，$x\to\infty$；（2）$\dfrac{3+x}{x^2-9}$，$x\to 3$；

（3）$\arctan x$，$x\to 0$；（4）$\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$，$x\to 0$.

2. 当 $x\to 0^+$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 是比 x ____________ 的无穷小.

3. 当 $x\to 0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，____________是高阶无穷小.

4. 当 $x\to 0$ 时，$2x+a\sin x$ 与 x 是等价无穷小，则常数 a 等于________.

5. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}-1}{1-\cos x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x^3+2x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sin(x-3)}$；（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

1.5 函数的连续性

连续性的概念

1.5.1 连续性的概念

1. 函数的改变量

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量从 x_0 变到 x，相应的函数值从 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$，则称 $x-x_0$ 为自变量的改变量（或称增量），记作 $\Delta x=x-x_0$，它可正可负；称 $f(x)-f(x_0)$ 为函数值的改变量（或称增量），记作 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，即 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如图 1-5-1 所示.

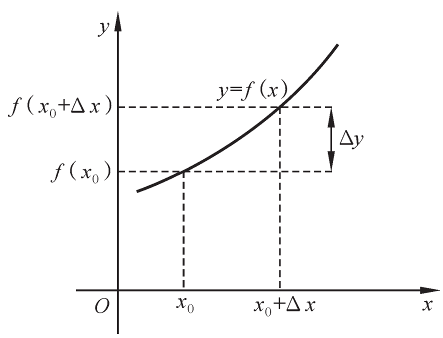


图 1-5-1

对于函数 $y=f(x)$，有

自变量 x：$x_0\to x$，即 $\Delta x=x-x_0$；

因变量 y：$f(x_0)\to f(x)$，即 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$.

例 1 求函数 $y=x^2$，当 $x_0=1$，$\Delta x=0.1$ 时的改变量.

解 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(1+0.1)-f(1)=1.1^2-1^2=0.21$.

2. 函数在点 x_0 处的连续性

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处的改变量 $\Delta x \to 0$ 时，相应地函数的改变量 $\Delta y \to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，其中 x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

注 （1）由 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$，则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = 0$；

（2）令 $x = x_0 + \Delta x$，当 $\Delta x \to 0$ 时，有 $x \to x_0$，因此等式可化为

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0 \text{，即 } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

所以，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义又可以叙述如下：

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

由定义 3 可知，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续要同时满足以下三个条件：

（1）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；

（2）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的几何意义是函数 $y=f(x)$ 的图形在点 $(x_0, f(x_0))$ 处不断开.

例 2 证明函数 $f(x)=x^3+1$ 在 $x_0=2$ 处连续.

证明 因为

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(x^3+1) = 9 = f(2)$$

所以，$f(x)=x^3+1$ 在 $x_0=2$ 处连续.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续；

如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续且左连续.

例 3 讨论函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处是否连续?

解 因 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(-x) = 0$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(x) = 0$，故 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

又 $f(0)=0$，即 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

所以，函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续.

例 4 设有函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x}, & x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ (1+bx)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

问 a 和 b 各取什么值时，$f(x)$ 在点 $x_0=0$ 处连续？

解 由连续性定义，$f(x)$ 在点 $x_0=0$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=2$，于是可得

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin ax}{x}=a\ ,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(1+bx)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^b$$

若 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 处连续，则 $a=\mathrm{e}^b=2$，即 $a=2,\quad b=\ln2$.

3．函数在区间上的连续性

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在**区间** (a,b) **内连续**．如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，且在 $x=a$ 处右连续，又在 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在**区间** $[a,b]$ **上连续**．函数 $y=f(x)$ 的全体连续点构成的区间称为函数的**连续区间**．在连续区间上，连续函数的图形是一条连续不断的曲线．

1.5.2 函数的间断点

定义 4 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断．其中，x_0 点称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点．

根据函数连续性的定义 3 可知，如果 $f(x)$ 在点 x_0 处满足下列三个条件之一，则点 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点：

（1）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义，即 $f(x_0)$ 不存在；

（2）$f(x)$ 在点 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

（3）$f(x)$ 在点 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

通常把函数的间断点分为第一类间断点和第二类间断点两大类．

1．第一类间断点

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，如果左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则称 $x=x_0$ 为函数的第一类间断点．

（1）可去间断点．

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则称 $x=x_0$ 为函数的可去间断点．

例 5 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 的间断点，并指出其类型．

解 函数 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没有定义，所以 $x=1$ 是函数的间断点．又因为

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3\ ,$$

所以 $x=1$ 为函数 $f\left(x\right)$ 的可去间断点．

例 6 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0\end{cases}$$

试问 $x=0$ 是否为其间断点？如果是，判断间断点的类型.

解 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义 $f(0)=2$，但由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\neq f(0)\text{，}$$

所以 $x=0$ 为函数 $f\left(x\right)$ 的可去间断点.

（2）跳跃间断点.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，如果左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在但不相等，则称 $x=x_0$ 为函数的跳跃间断点.

例 7 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0\end{cases}$$

试问 $x=0$ 是否为间断点？

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$， $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点，它是左极限与右极限都存在的间断点. 不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点.

2. 第二类间断点

（1）无穷间断点.

当 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)\to\infty$，则称 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 的无穷间断点.

例如， $x=0$ 是 $y=\dfrac{1}{x}$ 的无穷间断点.

（2）振荡间断点.

当 $x\to x_0$ 时，函数极限不存在，并呈现上下振荡情形，则称 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 的振荡间断点.

例如， $x=0$ 是 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的振荡间断点.

无穷间断点和振荡间断点统称为第二类间断点.

1.5.3　初等函数的连续性

函数的连续性是通过极限来定义的，因此由极限运算法则和连续定义可得下列连续函数的运算法则.

法则 1（连续函数的四则运算） 设函数 $f(x), g(x)$ 均在点 x_0 处连续，则它们的和、差、积、商（分母在点 x_0 处不为 0）在点 x_0 处连续. 即

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = f(x_0)\pm g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = f(x_0)\cdot g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}(g(x_0)\neq 0).$$

法则 2（反函数的连续性） 单调连续函数的反函数在其对应区间上也是单调连续的.

法则 3（复合函数的连续性） 设函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，又函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x_0 处连续.

因为初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合运算构成的，根据上述法则可得如下定理：

定理 1 初等函数在其定义区间内（包含在定义域内的区间）都是连续的.

函数的定义区间称为连续区间. 求函数的连续区间就是求它的定义区间，即包含在定义域内的区间.

例 8 求 $y=\sqrt{x+4}+\ln(1-x)$ 的连续区间.

解 函数的定义域为 $[-4,1)$，所以它的连续区间为 $[-4,1)$.

在定义区间内初等函数的图像是一条连绵不断的曲线.

求初等函数在定义区间内某点处的极限值，只需要算出函数在该点的函数值.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to 5}(\sqrt{x-4}+\ln(100-x^2))$.

解 因为 $f(x)=\sqrt{x-4}+\ln(100-x^2)$ 是初等函数，在其定义域内都是连续的，且 $x_0=5$ 是其定义域内的点，所以

$$\lim_{x\to 5}(\sqrt{x-4}+\ln(100-x^2)) = f(5) = 1+\ln 75.$$

1.5.4 闭区间上连续函数的性质

定理 2（最值定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在这个区间上一定有最大值和最小值. 如图 1-5-2 所示.

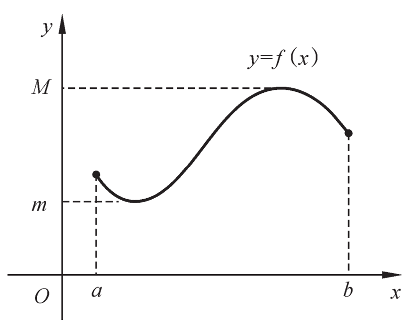


图 1-5-2

定理 3（零点定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$. 如图 1-5-3 所示.

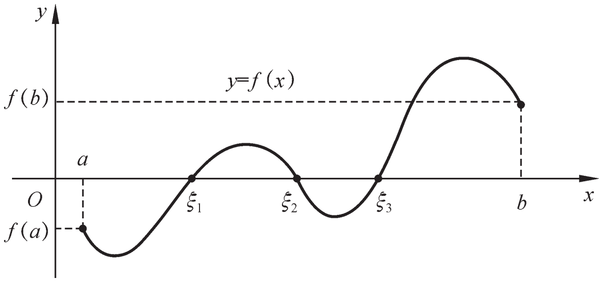


图 1-5-3

定理 4（介值定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则对介于 m 和 M 之间的任一实数 C，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$. 如图 1-5-4 所示.

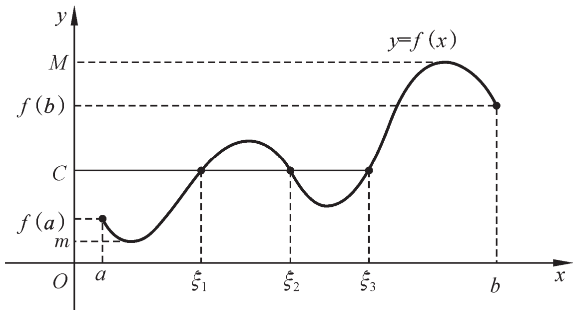


图 1-5-4

例 10 证明方程 $x^3+2x-5=0$ 在开区间 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

证明 设函数 $f(x)=x^3+2x-5$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 因为 $f(x)=x^3+2x-5$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，所以在 $[1,2]$ 上也连续. 又因为 $f(1)=-2<0, f(2)=7>0$，即 $f(1)$ 与 $f(2)$ 异号. 根据零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=\xi^3+2\xi-5=0$，即方程 $x^3+2x-5=0$ 在开区间 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

习题 1.5

A 组

1. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ 4, & x=0, \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

试问函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续？

2. 求下列函数的间断点，并判断其类型.

（1） $y=\dfrac{x}{(x+2)^3}$；

（2） $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

（3） $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1, \\ x+2, & x\geqslant 1; \end{cases}$

（4） $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{3x}, & x\neq 0, \\ 2, & x=0. \end{cases}$

3. 函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, x\leqslant 1 \\ 3-x, x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处间断，是由于（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ 不存在

B. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ 不存在

C. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

D. $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义

4. 求下列函数的连续区间，并求极限.

（1） $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$， $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$；

（2） $f(x)=\sqrt{x-4}-\sqrt{6-x}$， $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$；

（3） $f(x)=\ln(1-x^2)$， $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$.

5. 证明方程 $x^5-3x=1$ 在开区间 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

B 组

1. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，试问 $x=1$ 是否为间断点？

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin x, & x<0, \\ a, & x=0, \\ x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x>0, \end{cases}$ 则在 $x=0$ 处，下列结论不一定正确的是（　　）.

A. 当 $a=b$ 时， $f(x)$ 右连续

B. 当 $a=1$ 时， $f(x)$ 左连续

C. 当 $b=1$ 时， $f(x)$ 一定连续

D. 当 $a=b=1$ 时， $f(x)$ 必连续

4. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-25}$ 的连续区间是 ________.

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2x^2+1, x\neq 0 \\ 2a+1, x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，求 a 值.

本章小结

一、函数、极限、连续的概念

1. 函数 $y=f(x)$ 表示 x 与 y 之间存在着确定的数值对应关系，定义域与对应法则是它的两要素.

2. 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 表示在自变量 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 无限趋近一个确定常数 A 的一种确定的变化趋势. 特别地，称极限为零（或 ∞）的函数为无穷小（或无穷大）.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 表示函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，否则 $x=x_0$ 为间断点.

二、函数极限的计算

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$；

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=A$.

2. 函数四则运算的极限法则及复合函数的极限法则：当满足法则条件时（即所讨论的极限存在且有意义），极限运算与函数的四则（复合）运算可以交换次序.

3. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

4. 两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\text{，}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\text{ 或 }\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

5. 无穷小运算法则：

（1）非零无穷小与无穷大互为倒数；

（2）无穷小乘以有界函数仍为无穷小，极限为 0；

（3）对极限式中的无穷小因式，可以利用下述等价无穷小进行替换，以简化极限计算. 即当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \arctan x\sim x,$$

$$\arcsin x\sim x,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad (1+x)^a-1\sim ax.$$

三、函数的连续性

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，等价于

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\text{ 或 }\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0.$$

2. 函数的间断点：

（1）第一类间断点：左右极限都存在；

（2）第二类间断点：左右极限至少有一个不存在.

3. 闭区间上连续函数的性质：

（1）最值定理；（2）零点定理；（3）介值定理.

第 1 章复习题

A 组

1. 选择题

（1）函数 $y=\ln(1+x)$ 的定义域是（　　）.

A. $(-1,\ 0)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $(-1,+\infty)$　　D. $(-1,0)\cup(0,2]$

（2）下列函数中，奇函数是（　　）.

A. $1+\cos x$　　B. $x\cos x$　　C. $\tan x+\cos x$　　D. $|\cos x|$

（3）函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ 1-x, & x>0, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$（　　）.

A. 1　　B. 0　　C. －1　　D. 2

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-3x+1}{5x^2+1}=$（　　）.

A. $\dfrac{3}{5}$　　B. 0　　C. －5　　D. 3

（5）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}=$（　　）.

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. $\dfrac{5}{3}$　　C. 1　　D. $-\dfrac{15}{2}$

（6）当 $x\to 0$ 时，下列变量是无穷小量的是（　　）.

A. e^x　　B. $\sin\dfrac{1}{x+1}$　　C. $\ln x$　　D. $1-\cos x$

（7）当 $x\to 0$ 时，下列各无穷小量与 x 相比，更高阶的无穷小量是（　　）.

A. $2x^2+x$　　B. $\sqrt{x}$　　C. $x+\sin x$　　D. $\sqrt{x^3}$

（8）当 $n\to\infty$ 时，下列数列中极限存在的是（　　）.

A. $(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}$　　B. $(-1)^n n$

C. $(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$　　D. $[(-1)^n+1]n$

（9）函数 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 的间断点及其类型是（　　）.

A. 间断点为 $x=1$，可去间断点　　B. 间断点为 $x=1$，跳跃间断点

C. 间断点为 $x=2$，无穷间断点　　D. 间断点为 $x=1$，无穷间断点

（10）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{2x}=2$，则 $k=$（　　）．

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 填空题

（1）已知函数 $f(u)=\sqrt{u}$，$u=1-\cos x$，则复合函数 $f(x)=$______．

（2）函数 $y=1-\cos 2x$ 的等价无穷小量为______ $(x\to 0)$．

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{2x}=$______．

（4）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$ 的间断点为______．

（5）$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=$______．

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{e^{3x}-1}=$______．

（7）设 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x^2}-\dfrac{x}{1-x}\right)=\dfrac{3}{2}$，则 $a=$______．

（8）若 $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=2$，则 $a=$______．

（9）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在是函数在点 x_0 处连续的______条件.

（10）函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{2-x}$ 的连续区间是______．

3. 计算题

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(n^2+2)}{3n^3-1}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$；

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{3x^3+1}$；

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{4}{x-1}}$.

4. 讨论下列函数的连续性，若有间断点，指出其间断点的类型.

（1）$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$；

（2）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-1}{x}, & x<0,\\ x^2+1, & x>0.\end{cases}$

5. 已知当 $x\to 0$ 时，$(\sqrt{1+ax^2}-1)$ 与 $\sin^2 x$ 是等价无穷小，求常数 a 的值.

B组

1. 选择题

（1）下列函数中，偶函数是（　　）.

A. $1+\cos x$　　B. $x\cos x$　　C. $\tan x+\cos x$　　D. $\sin^3 x$

（2）由函数 $y=u^3, u=\tan x$ 复合而成的函数是（　　）.

A. $y=\tan 3x$　　B. $y=3\tan x$　　C. $y=\tan^3 x$　　D. $y=\tan x^3$

（3）函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0, \\ 1-x, & 0<x\leqslant 1, \end{cases}$ 则 $f(f(0))=$（　　）.

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 2

（4）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=$（　　）.

A. e^2　　B. e^{-3}　　C. $e^{\frac{1}{3}}$　　D. $e^{-\frac{1}{2}}$

（5）当 $x\to 0$ 时，下列各无穷小量与 x 相比，更高阶的无穷小量是（　　）.

A. $\sqrt{x}$　　B. $2x^2+x$　　C. $x+\sin x$　　D. $\sqrt{x^3}$

（6）如果 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin mx}{2x}=\dfrac{5}{2}$，则 $m=$（　　）.

A. 1　　B. $\dfrac{5}{2}$　　C. $\dfrac{15}{2}$　　D. 3

（7）函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & 0<x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 3 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处间断，是因为（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ 不存在　　B. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ 不存在

C. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在　　D. $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义

（8）已知 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{ax^2+9}{x-3}=-6$，则 $a=$（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

（9）函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, -2\leqslant x<0, \\ 1, \qquad x=0, \\ 1-x, \ 0<x\leqslant 2, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=$（　　）.

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 2

（10）函数 $y=\dfrac{3}{\ln|x|}$ 的间断点有（　　）.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 填空题

（1）函数 $y=3+\cos\dfrac{\pi}{3}x$ 的最小正周期是________.

（2）函数 $y=\tan^3(2x-1)$ 是由________________复合而成的.

（3）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{3x}=$________.

（4）若函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f(0)=1$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

（5）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ 的间断点是________________.

（6）已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{px}=\mathrm{e}^2$，则 $p=$________.

（7）函数 $y=1-\ln(2x+3)$ 的反函数是________________.

（8）$f(x_0)$ 存在是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的________________条件.

（9）函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}-\sqrt{2-x}$ 的连续区间是________________.

（10）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^2}{\cos 2x-1}=$________.

3. 计算题

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\arcsin 5x}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^{5n}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{1+x}-2}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{\sin 2x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x^2+5}$；

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x-1}{(1+x)(1-2x^2)}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\ln(1+2x^2)}$；

（8）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})$.

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x, & x>0\end{cases}$ 是否存在间断点？若存在，指出其间断点的类型.

5. 已知 a,b 为常数，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+b}{x-1}=2$，求 a,b 的值.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+3, & x<0,\\ x+k, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处有极限，求 k 的值.

实验操作一

用 MATLAB 求函数的极限

1. MATLAB 简介

MATLAB：Matrix Laboratory 矩阵实验室，是美国 MathWorks 公司开发的一套高性能的数值计算和可视化数学软件，便于初学者学习和掌握，也是数学建模竞赛中数据处理的主要工具之一.

MATLAB 的操作界面是一个高度集成的工作界面，常用的区域有菜单栏、命令窗口、工作空间、历史命令窗口等，如图 1 所示.

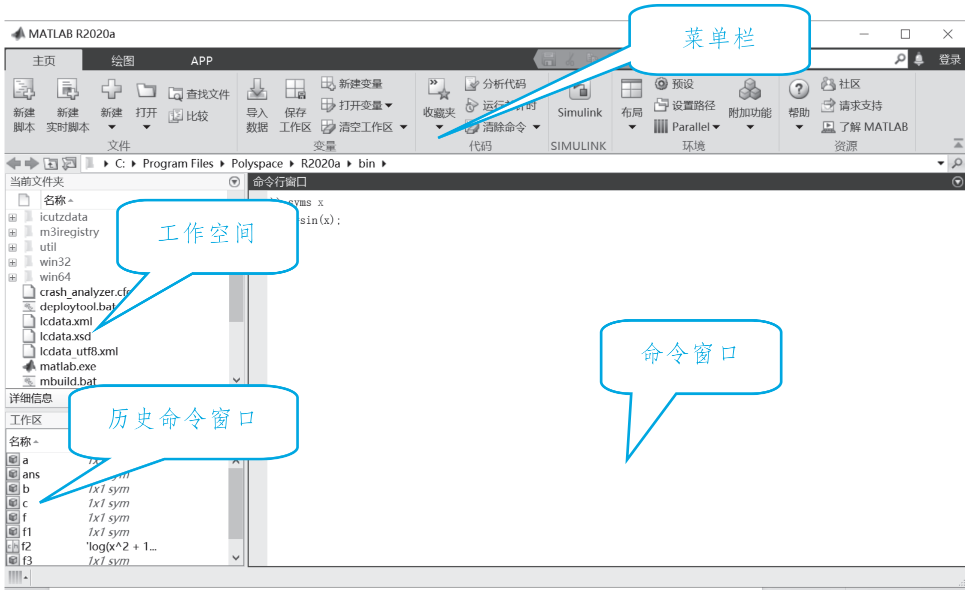


图 1　MATLAB 操作界面

2. MATLAB 的基本操作

MATLAB 语言是一种表达式语言，用户在命令窗口输入函数、矩阵、表达式等信息后，单击回车就可以执行. MATLAB 中常用的表达式如下表：

数学表达式	MATLAB 表达式	数学表达式	MATLAB 表达式
$a+b$	a+b	$a-b$	a-b
$a\times b$	a*b	$a\div b$	a/b
a^b	a^b	e^x	exp(x)
$\geqslant$	>=	$\leqslant$	<=
$=$	==	$\neq$	~=
$\ln x$	log(x)	$\log_a x$	loga(x)
$\sqrt{x}$	sqrt(x)	$\lvert x\rvert$	abs(x)
$\sin x$	sin(x)	$\arcsin x$	asin(x)
π	pi	∞	inf

MATLAB 功能非常强大，学习者可以利用 MATLAB 自带的 help 函数查询．在命令窗口里输入“help+想要查询的函数”，即可了解该函数的具体用法．例如，查询 exp 函数的用法，就在命令窗口输入“help exp”，回车即可查到 exp 函数的解释和具体用法．

```
>> help exp
   exp      Exponential.
      exp(X) is the exponential of the elements of X, e to the X.
         For complex Z=X+i*Y, exp(Z) = exp(X)*(COS(Y)+i*SIN(Y)).
```

例 1　计算 $1.5^2-e^3+\sqrt{3}-\sin\frac{\pi}{5}$．

解　在命令窗口中输入：

```
>> 1.5^2-exp(3)+sqrt(3)-sin(pi/5)
```

回车，输出计算结果：

```
ans =
   -16.6913
```

于是

$$1.5^2-e^3+\sqrt{3}-\sin\frac{\pi}{5}\approx-16.6913$$

MATLAB 命令窗口中的“>>”为命令提示符，表示 MATLAB 正处于准备状态．在命令提示符后输入命令，按下回车键，MATLAB 就会执行所输入的命令，给出计算结果．

例 2　已知函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x$，求 $f(1)$ 和 $f(3)$．

解　在命令窗口中输入：

```
>> syms x                          %创建符号变量 x
>> f(x)=x^3-6*x^2+9*x-1;      %输入函数 f(x)
>> f(1)
```

回车，输出计算结果：

```
ans =
3
>> f(3)
```

回车，输出计算结果：

```
ans =
-1
```

于是 $f(1)=3$，$f(3)=-1$．

MATLAB 中，用 syms 函数对所涉及的变量进行定义，“%”后面的内容表示对语句的解释，此内容不会被执行．

除了在命令窗口中直接输入命令，还可以利用 MATLAB 的 M 文件功能，方便多次重复调用函数，M 文件作用相当于编程空间，它里面所写的内容在保存后可以直接运行，不用重新打代码．比如例 2 中，可以新建文件“hanshu”，输入以下代码：

```
syms x
```

```
f(x)=x^3-6*x^2+9*x-1;
f(1)
f(3)
```

保存后，点击“运行”，即可得到以下结果：

```
>> hanshu
ans =
3
ans =
-1
```

例 3 绘制函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在区间 $[-20\pi, 20\pi]$ 上的图形.

解 在命令窗口中输入：

```
>> x=-20*pi:0.1:20*pi;
>> y=sin(x)./x;
>> plot(x,y)
```

回车后，得到函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在区间 $[-20\pi, 20\pi]$ 上的图形，如图 2 所示.

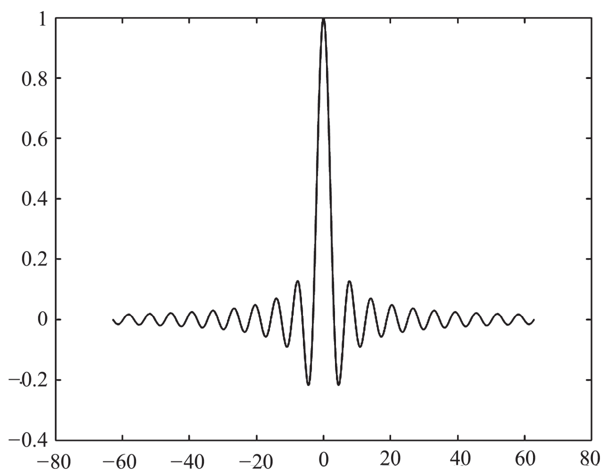


图 2 函数 $f(x)$ 的图形

例 4 绘制函数 $z=\dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在区域 $D: -10 \leqslant x \leqslant 10$ ，$-10 \leqslant y \leqslant 10$ 内的图像.

解 创建 M 函数：

```
x=-10:0.1:10;
y=-10:0.1:10;
[x,y]=meshgrid(x,y);
z=sin(sqrt(x.^2+y.^2))./sqrt(x.^2+y.^2);
mesh(x,y,z)
```

保存后，点击“运行”，即可得到图像（见图 3）.

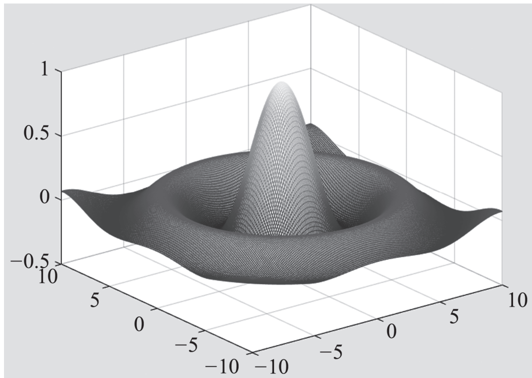


图 3　函数 z 的图形

3. 用 MATLAB 求函数的极限

在 MATLAB 中，一般用 limit 函数求极限，可以求函数的极限值、左极限和右极限.对于极限值为无穷大的极限，MATLAB 输出结果为 INF；对于其他没有极限的情况，MATLAB 输出结果为 NAN. limit 函数的调用格式主要有以下几种：

数学运算	MATLAB 中 limit 函数调用格式	数学运算	MATLAB 中 limit 函数调用格式
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	limit(f,x,a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	limit(f,x,inf)
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	limit(f,x,a,'right')	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	limit(f,x,inf,'right')
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	limit(f,x,a,'left')	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	limit(f,x,inf,'left')

如果是对默认变量 x 求极限 limit(f,x,a)，也可简记为 limit(f,a).

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$.

解　在命令窗口中输入：

```
>> syms x
>> limit(sin(7*x)/sin(3*x),0)
```

回车后，得到极限值：

```
ans =
7/3
```

于是，所求极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\frac{7}{3}.$$

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^x$.

解　在命令窗口中输入：

```
>> syms x
>>   limit((1-1/(3*x))^x,inf)
```

回车后，得到极限值：

```
ans =
exp(-1/3)
```

于是，所求极限为

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{x}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}.$$